О СИММЕТРИЯХ НЕИНВОЛЮТИВНЫХ СИСТЕМ

А.А. Талышев
Новосибирский государственный университет
e-mail: `tal@academ.org`

In this paper we show that each symmetry for any system of differential equations will admitted of prolongation this system. Group symmetries for some non-involutive systems will widen after the system is brought into an involutive form.

1. Введение

Алгоритм вычисления допускаемой группы Ли точечных преобразований описанный, например, в [1, §5], вообще говоря, сам по себе применим к любой системе дифференциальных уравнений. Даже, если множество решений этой системы пусто.

Классическое свойство инволютивности [2], [3] гарантирует, что продолжение инволютивной системы всегда инволютивно и, что любая система конечным числом продолжений приводится к инволютивной или алгебраически противоречивой системе.

В работе [4] показано, что для инволютивных систем в классе касательных (на решениях системы) преобразований группа продолженной системы является продолжением группы исходной системы. Откуда следует аналогичное утверждение и для групп точечных преобразований.

В настоящей работе устанавливается, что при некоторых условиях на форму записи системы дифференциальных уравнений каждая ее точечная симметрия допускается и продолженной системой. Откуда следует, что в точках общего положения инволютивная система, полученная в результате продолжения, не «потеряет» ни одну из точечных симметрий исходной системы. А пример системы изобарических движений газа демонстрирует, что группа может расшириться после приведения системы к инволютивному виду.

2. Симметрии продолженных систем

В настоящей работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
&\Phi(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^k u) = 0, &(1)\\
&x \in X = R^n, \quad u\colon R^n \to Y_0, \quad Y_0 = R^m,\\
&\partial_x^i u\colon X \to Y_i, \quad Y_i = R^m \otimes S^i R^n, \quad i = 1, \ldots, k,\\
&\Phi\colon Z_k \to R^s, \quad Z_i = X \times Y_0 \times \cdots \times Y_i, \quad i = 0, 1 \ldots
\end{aligned}$$

Групповой анализ дифференциальных уравнений использует геометрическое представление дифференциальных уравнений и их решений, как конечномерных многообразий в продолженном пространстве Z_k. Такой подход накладывает некоторое условие на форму записи системы. Это условие означает, что вместе со всяким алгебраическим следствием $\phi = 0$ порядка $l < k$ алгебраическими следствиями системы являются уравнения, левые части которых равны всевозможным производным от ϕ по независимым переменным до порядка $k - l$ включительно. Например, к уравнениям Навье-Стокса (10), (11) должны быть добавлены еще четыре уравнения полученные дифференцированием уравнения (11) по всем независимым переменным. Предполагается, что это соглашение о форме записи для системы (1) выполнено. Также предполагается, что из (1) не следует никаких соотношений связывающих переменные x и u, т.е.

$$\dim p_0^k\left(\{z \in Z_k : \Phi(z) = 0\}\right) = n + m, \tag{2}$$

где $p_j^i : Z_i \to Z_j$ — естественная проекция Z_i в Z_j для $i > j$.

В настоящей работе рассматривается точечные преобразования, т.е. преобразования пространства зависимых и независимых переменных, которые для нужд дифференциальных уравнений продолжают на пространство полилинейных отображений до соответствующего порядка.

Однопараметрическую локальную группу Ли точечных преобразований вполне определяет инфинитезимальный оператор

$$L = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \zeta^j(x,u)\partial_{u^j} \tag{3}$$

продолжение которого на пространство Z_k записывается в виде

$$L^k = L + \sum_{|\alpha|>0}^{|\alpha|\leqslant k} \zeta_\alpha \partial_{u_\alpha},$$

где

$$\zeta_{\alpha+\gamma_j} = D_j\zeta_\alpha - u_{\alpha+\gamma_i}\sum_{i=1}^{n} D_j\xi^i, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$D_j = \partial_{x_j} + \sum_{|\alpha|\geqslant 0} u_{\alpha+\gamma_j}\partial_{u_\alpha}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Здесь $\alpha = (\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ — целочисленные мультииндексы, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha^i$, γ_j — мультииндекс, у которого j-я компонента равна единице, а остальные равны нулю и $\zeta_{(0,\ldots,0)} = \zeta$.

Система (1) допускает оператор (3), если и только если выполняется соотношение

$$L^k\Phi\big|_{\Phi=0} = 0. \tag{5}$$

Из формул продолжения (4) следует лемма о коммутаторе [1, §4]

$$L^\infty D_j = D_j L^\infty - \sum_{i=1}^{n} D_j(\xi^i)D_i, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Лемма. *Продолженная система допускает каждую симметрию исходной системы дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Для доказательства леммы требуется установить, что соотношение

$$L^{k+1} D_j \Phi\big|_{\Phi=0,\Phi_1=0} = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{7}$$

выполняется в силу соотношения (5), где $\Phi_1 = \{D_1\Phi, \dots, D_n\Phi\}$.

В выражениях (5) и (7) операторы L^k и L^{k+1} можно заменить бесконечно продолженным оператором L^∞. После такой замены лемма о коммутаторе (6) позволяет переписать соотношение (7) в виде

$$\begin{aligned} L^\infty D_j\Phi|_{\Phi=0,\Phi_1=0} &= \left(D_j L^\infty \Phi - \sum_{i=1}^{n} D_j(\xi^i) D_i \Phi \right)\Bigg|_{\Phi=0,\Phi_1=0} = \\ &= D_j L^\infty \Phi|_{\Phi=0,\Phi_1=0} \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Выражение (8), вообще говоря, не обязано равняться нулю, но теорема о представлении неособого инвариантного многообразия [1, §18] позволяет выбрать в качестве отображения Φ в (1) инвариант оператора L^k в Z_k. Действительно, условие (2) гарантирует, что для всякой однопараметрической группы допускаемой системой (1) многообразие заданное уравнениями (1) будет неособым инвариантным многообразием k-го продолжения этой группы.∎

Следствие 1. *Многообразие*

$$\Theta = p_k^{k+1}(\{z \in Z_{k+1} : \Phi(p_k^{k+1}(z)) = 0, \Phi_1(z) = 0\})$$

инвариантно относительно каждой симметрии допускаемой системой (1).

Доказательство. Очевидно, что $\Theta \subseteq F = \{z \in Z_k : \Phi(z) = 0\}$. Если Θ пусто или совпадает с F, то утверждение верно. Если же многообразие Θ является собственным подмногообразием многообразия F, то существует такое отображение $\varphi : Z_k \to R^{s_1}$, что $\Theta = \{z \in Z_k : \Phi(z) = 0, \ \varphi(z) = 0\}$.

Для всякого инфинитезимального оператора L множество уравнений

$$(L^\infty\Phi, L^\infty\Phi_1)|_{\Phi=0,\Phi_1=0} = 0$$

совпадает с множеством уравнений

$$(L^\infty\Phi, L^\infty\varphi, L^\infty\Phi_1)|_{\Phi=0,\varphi=0,\Phi_1=0} = 0,$$

которое может быть переписано в виде объединения двух множеств уравнений

$$\begin{aligned} &(L^\infty\Phi, L^\infty\varphi)|_{\Phi=0,\varphi=0} = 0, \\ &(L^\infty\Phi_1)|_{\Phi=0,\Phi_1=0} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Если оператор L допускается системой (1), то соотношения (9) выполнены в силу доказанной выше леммы. Однако, множество уравнений (9) не совпадает с множеством уравнений (5). Во-первых из-за уменьшения числа переменных, по которым будет производится расщепление уравнений (5), и во-вторых из-за добавления новых уравнений $\varphi = 0$ в систему. Поэтому возможно появление новых симметрий у системы $\Phi = 0, \varphi = 0$. Пример изобарического движения газа демонстрирует такое расширение группы.∎

Приведение системы к инволютивному виду осуществляется посредством продолжений. Любая система конечным числом продолжений приводится к инволютивной или алгебраически противоречивой системе [3, §63]. Итак, если система может быть приведена к инволютивному виду конечным числом продолжений, то конечным числом применений утверждения следствия 1 устанавливается справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. *Приведенная к инволютивному виду система дифференциальных уравнений в точках общего положения допускает все точечные симметрии исходной системы.*

3. Примеры

Уравнения Навье-Стокса.

Для уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_x &= \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y &= \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + p_z &= \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \end{aligned} \tag{10}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{11}$$

группа точечных симметрий была посчитана в работе [5]:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3}(x_i\partial_{x_i} - u^i\partial_{u^i}) + 2t\partial_t - 2p\partial_p, \\ &x_j\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_j} + u^j\partial_{u^k} - u^k\partial_{u^j}, \quad (j, k = 1, 2, 3; j < k), \\ &\partial_t, \quad \varphi(t)\partial_p, \quad \psi_i(t)\partial_{x_i} + \dot{\psi}_i(t)\partial_{u^i} + \ddot{\psi}_i(t)x_i\partial_p, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{12}$$

где φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — произвольные функции переменной t и переменные x, y, z и u, v, w обозначаются через x_1, x_2, x_3 и u^1, u^2, u^3 соответственно.

Действие оператора дивергенции на уравнения (10) с учетом (11) приводит к уравнению второго порядка

$$\Delta p + 2(u_y v_x + v_z w_y + u_z w_x) + u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) является дифференциальным следствием системы (10), (11) и имеет тот же порядок, что и система. Это, в частности, означает, что система (10), (11) не является инволютивной. Непосредственным вычислением можно убедиться, что система (10), (11), (13) инволютивна и ее характеры Картана [3, §61] равны: $s_0 = 15$, $s_1 = 15$, $s_2 = 11$, $s_3 = 9$, $s_4 = 0$. Инволютивность системы уравнений (10), (11), (13) для двумерного случая детально доказана в работе [6, §12].

В силу следствия 2 из предыдущего пункта система (10), (11), (13) допускает симметрии (12) и непосредственным вычислением можно убедится, что других симметрий эта система не допускает.

Уравнения изобарических движений газа

Для изобарических движений газа

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{15}$$

20-параметрическая группа точечных симметрий была посчитана в работе [7].

Действие оператора дивергенции на уравнения (14) с учетом (15) приводит к уравнению

$$2(u_y v_x + v_z w_y + u_z w_x) + u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 = 0. \tag{16}$$

Дифференцирование уравнения (16) по переменной t с последующим исключением вторых производных полученных из продолжений уравнений (14) и (15) приводит еще к одному уравнению первого порядка

$$\begin{aligned} &3(u_x u_y v_x + u_x u_z w_x + u_y v_x v_y + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y + \\ &+ u_z w_x w_z + v_y v_z w_y + v_z w_y w_z) + u_x^3 + v_y^3 + w_z^3 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Множество решений системы (14)–(17), на которых уравнения (15), (16), (17) разрешимы относительно производных функций u, v, w по одной из переменных x, y или z, удовлетворяют инволютивной системе с характерами Картана [3, §61]: $s_0 = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = 3$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$.

Следующие уравнения выражают условие того, что система (15), (16), (17) неразрешима относительно производных функций u, v, w ни по одной из переменных x, y или z.

$$\begin{aligned} u_y^2 v_z - u_y u_z v_y + u_y u_z w_z - u_z^2 w_y &= 0, \\ u_x v_x v_z - u_z v_x^2 - v_x v_z w_z + v_z^2 w_x &= 0, \\ u_x w_x w_y - u_y w_x^2 + v_x w_y^2 - v_y w_x w_y &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Множество решений системы (14)–(18), для которых хотя бы одна из производных u_y, u_z ,v_x ,v_z, w_x или w_y отлична от нуля, удовлетворяют инволютивной системе с характерами Картана: $s_0 = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$. Если все указанные выше производные равны нулю, тогда в силу уравнения (16) и $u_x = v_y = w_z = 0$, т.е. такие решения постоянны.

Ниже, как и в предыдущем примере, переменные x, y, z и u, v, w обозначаются через x_1, x_2, x_3 и u^1, u^2, u^3 соответственно. В работе [8] показано, что система (14)–(17) допускает группу со следующей алгеброй

$$\xi^i = u^i(\xi^0 + \varphi^0) + \varphi^i, \quad \eta^i = D(\varphi^i + u^i\varphi^0), \quad i = 1, 2, 3, \tag{19}$$

где $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ — произвольные линейные функции переменных t, x_1, x_2, x_3, а ξ^0 — произвольная функция переменных $t, x_1, x_2, x_3, u^1, u^2, u^3$ и

$$D = \partial_t + u^j \partial_{x_j}.$$

Система (14)–(18) допускает группу со следующей алгеброй

$$\xi^i = u^i\xi^0 + t(\eta^i - u^j\eta^i_{u^j} - u^i\psi^0) + x_j\eta^i_{u^j} + x_i\psi^0 + \psi^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

где $\eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \psi^0,\ \psi^1,\ \psi^2,\ \psi^3$ — произвольные функции переменных u^1, u^2, u^3, а ξ^0 произвольная функция переменных $t, x_1, x_2, x_3, u^1, u^2, u^3$.

В работе [8] показано, что 20-мерная алгебра из [7] является подалгеброй как алгебры (19), так и алгебры (20). Система (14)–(17) является проекцией в Z_1 двухкратного продолжения системы (14)–(15) и потому следствие 2 из предыдущего пункта гарантирует, что каждая симметрия системы (14)–(15) допускается системой (14)–(17). Но система (14)–(18) не является алгебраическим следствием продолжения системы (14)–(15) — уравнения (18) выделяют особые точки пространства Z_1, в которых меняется набор характеров Картана. Поэтому тот факт, что система (14)–(18) допускает все симметрии системы (14)–(15) имеет какие-то другие причины.

При проведении объемных вычислений использовалась система аналитических вычислений «Reduce 3.8» (http://reduce-algebra.sourceforge.net).

Автор выражает свою благодарность С.В. Хабирову за полезные обсуждения вопросов связанных с инвариантностью продолженных систем дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд. МГУ, 1962. 238 с.

[3] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: Гостехиздат, 1947. 354 с.

[4] Талышев А.А. О касательных преобразованиях высокого порядка систем в частных производных// В сб.: Динамика сплошной среды. 1982. вып. 54. С. 142–152.

[5] Бытев В.О. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1972. Т. 3, № 3. С. 13–17.

[6] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. 272 с.

[7] Овсянников Л.В. Изобарические движения газа// Дифференциальные уравнения. 1994. Т 30, № 10. С. 1792–1799.

[8] Талышев А.А. О симметриях изобарических движений газа// Уфимский мат. журнал. 2010. Т. 2, № 3. С. 108–112.