К ДИНАМИКЕ РОТОРА, ЗАПОЛНЕННОГО ДВУМЯ ЖИДКОСТЯМИ, УСТАНОВЛЕННОГО НА ФУНДАМЕНТЕ

А.Б.Кыдырбекулы, Л.А.Хаджиева
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: almatbek@list.ru

Введение

Динамика роторных систем с полостями, частично заполненными несмешивающимися жидкостями недостаточно изучена. При исследовании динамики роторных систем большинство авторов считая, что жидкость, содержащаяся в полости однородная, таким образом, пренебрегают многофазностью обрабатываемого материала. Во многих исследованиях, помимо этого, не принимается во внимание движение фундамента (корпуса). В действительности любой фундамент не является абсолютно неподвижным и под действием колебаний ротора совершает движение, и не принятие во внимание колебаний фундамента приводит к серьёзным погрешностям при расчёте динамических и кинематических характеристик роторной системы.

Постановка задачи

Рассмотрим массивный ротор, установленный на упругом валу и расположенный симметрично относительно опор. Вал с коэффициентом жёсткости c_0 установлен на упругом фундаменте и закреплён с помощью подшипников качения, обеспечивающих условие плоскопараллельного движения ротора. Упругие характеристики подшипников считаем линейными с одинаковым коэффициентом жёсткости c_2 [1]. Фундамент установлен на упругих изотропных опорах с коэффициентом жёсткости c_1. Цилиндрическая полость ротора, высоты h и радиуса R, частично заполнена двумя несмешивающимися жидкостями с кинематическими коэффициентами вязкости ν_1 и $\nu_2\,(\nu_2 > \nu_1)$. Угловая скорость вращения ротора $\Omega_0 = const$ достаточно велика так, что жидкости принимают форму кольца с радиусами свободной поверхности r_0 и границы раздела жидкостей r_1. Ротор имеет статическую неуравновешенность. Между упругой опорой ротора и фундаментом установлен демпфер с коэффициентом трения χ_3.

Здесь приняты следующие допущения: эффектом сил поверхностного натяжения пренебрегается; амплитуда колебаний ротора, фундамента и жидкостей считаются малыми; силы тяжести и гироскопические силы достаточно малы по сравнению с остальными силами; толщина слоёв жидкостей много меньше их высоты.

В силу двух последних высказываний движение жидкостей принимается плоским.

Движение ротора и фундамента определяется относительно неподвижной системы координат O_1XYZ, а движение жидкостей – относительно подвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$, жёстко связанной с ротором, ось ξ направлена вдоль оси вектора эксцентриситета; (r, φ, z) – цилиндрическая система координат. Начало координат неподвижной системы координат O_1 совпадает с центром тяжести фундамента и через него проходит линия центров подшипников вала при равновесном положении СРЖФ. Обозначим через x и y координаты точки крепления цилиндра к валу (координаты точки O, геометрический центр ротора), через x_s и y_s– координаты центра тяжести ротора, через x_1 и y_1 – координаты центра тяжести фундамента. Положение частицы жидкости определяется в подвижной системе $O\xi\eta\zeta$ координатами r и φ. Движение подвижной цилиндрической системы координат (r, φ, z) определяется вектором скорости начала координат $\bar{V}_0$ и вектором мгновенной угловой скорости $\bar{\Omega}$. Кроме сил упругости, инерции и сил реакции жидкостей, учитываются силы внешнего трения, которые принимаются пропорциональными первой степени скорости перемещения ротора и фундамента [2].

После введения комплексных векторов $z = x+iy$ и $z_1 = x_1+iy_1$, уравнения движения ротора и фундамента на комплексной плоскости, имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{z} + k^2\,(z - z_1) + n\,\dot{z} + k_{10}(\dot{z} - \dot{z}_1) = e\Omega_0^2\exp(i\Omega_0 t) + \frac{F_z}{m}, \\ \ddot{z}_1 + k_0^2\,(z_1 - z) + k_1^2 z_1 + n_1\,\dot{z}_1 + k_{12}(\dot{z}_1 - \dot{z}) = 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

где $F_z = F_x + iF_y$– комплексная величина гидродинамической силы,

$$\left.\begin{array}{l} F_x = Rh\int_0^{2\pi} \sigma_{2/r=R}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right)d\varphi, \\ F_y = Rh\int_0^{2\pi} \sigma_{2/r=R}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right)d\varphi. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{2|_{r=R}}$ есть нормальное напряжение силы реакции жидкости на стенке ротора,

$$\sigma_{\,2\,|\,r=R} = \left(P_{\,2\,|\,r=R} + \frac{1}{2}\rho_{\,2}\,\Omega_{\,0}^{\,2}\,(r^{\,2} - r_{\,0}^{\,2}) - 2\,\nu_2\,\rho_{\,2}\,\frac{\partial\,U_2}{\partial\,r}\right), \tag{3}$$

$P_{2|_{r=R}}$ – давление самой тяжёлой жидкости на стенку ротора.

После проектирования гидродинамического уравнения на полярные оси координат r и φ, получим нелинейные уравнения движения жидкости j-го слоя [3]

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{V_j}{r}\frac{\partial U_j}{\partial\varphi} - \frac{V_j^2}{r} - 2\Omega_0 V_j - \frac{\nu_j}{r}\frac{\partial f_j}{\partial\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial P_j}{\partial r} - \ddot{x}\cos(\Omega_0 t + \varphi) - \ddot{y}\sin(\Omega_0 t + \varphi), \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} + U_j\frac{\partial V_j}{\partial r} + \frac{V_j}{r}\frac{\partial V_j}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}U_j V_j + 2\Omega_0 U_j + \nu_j\frac{\partial f_j}{\partial r} =$$

$$= -\frac{1}{r\rho_j}\frac{\partial P_j}{\partial\varphi} + \ddot{x}\sin(\Omega_0 t + \varphi) - \ddot{y}\cos(\Omega_0 t + \varphi), \tag{5}$$

$\frac{\partial(rU_j)}{\partial r} + \frac{\partial V_j}{\partial\varphi} = 0$; $f_j = \frac{1}{r}\frac{\partial U_j}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_j}{\partial r} - \frac{V_j}{r}$ есть лапласиан функции тока $(j = 1, 2)$.
Граничные условия задачи:

при $r = r_n = R$ $U_2\big|_{r=R} = 0$, $V_2\big|_{r=R} = 0$;

при $r = r_1$ $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$;

$$\nu_1\rho_1(\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{V_1}{r}) = \nu_2\rho_2(\frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} - \frac{V_2}{r}),$$

$$\left[-P_1+\frac{1}{2}\rho_1\Omega_0^2(r^2-r_1^2)-2\nu_1\rho_1\frac{\partial U_1}{\partial r}\right]|_{r=r_1+\xi_1}==\left[-P_2+\frac{1}{2}\rho_2\Omega_0^2(r^2-r_1^2)+2\nu_2\rho_2\frac{\partial U_2}{\partial r}\right]|_{r=r_1+\xi_1}$$

$\frac{\partial\xi_1(\varphi,t)}{\partial t}=U_1=U_2$; $\xi_1(\varphi,t)$ – смещение границы раздела жидкостей от равновесного положения;

$$\nu_1\rho_1(\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_1}{\partial r}-\frac{V_1}{r})=0;\left[-P_1+\frac{1}{2}\rho_1\Omega_0^2(r^2-r_0^2)-2\nu_1\rho_1\frac{\partial U_1}{\partial r}\right]|_{r=r_o+\xi_0(\varphi,t)}=0;$$

$\frac{\partial\xi_0(\varphi\,,\,t)}{\partial\,t}=U_1\,|_{r=r_0}$; $\xi_0(\varphi,t)$ – смещение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния.

Уравнения (1) и (4)-(5) с соответствующими граничными условиями являются уравнениями совместного движения фундамента и ротора с несмешивающимися жидкостями.

Решения указанных уравнений совместного движения системы разыскиваются в виде рядов по степеням малых возмущений, где в качестве порождающего движения рассматривается вращение жидкости как твёрдого тела, а решения первого приближения разыскиваются методом теории пограничного слоя. При определении гидродинамических сил учитываются нормальные и касательные напряжения на стенках ротора. Найдены выражения для составляющих скорости частицы жидкостей и давления

$$U_2=\left\{C_1^{(2)}-\frac{C_2^{(2)}}{r^2}-\frac{i}{r}C_3^{(2)}\left[1+\frac{\delta\varepsilon}{2q}+\frac{3\varepsilon_2^2}{8q^2}\left(\delta^2-\frac{\delta}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]e^{\left(-\sqrt{\lambda}\delta\right)}\right\}e^{i(\sigma t-\varphi)}, \tag{6}$$

$$U_1=\left\{C_1^{(1)}-\frac{C_2^{(1)}}{r^2}-\frac{i}{r}C_4^{(2)}\left[1-\frac{\xi\varepsilon_2}{2q_1}+\frac{3\varepsilon_2^2}{8q_1^2}\left(\xi^2-\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]e^{\left(-\sqrt{\lambda}\xi\right)}\right\}e^{i(\sigma t-\varphi)}, \tag{7}$$

$$V_2=-\frac{i}{r}\left(C_1^{(1)}r+\frac{C_2^{(1)}}{r}\right), \tag{8}$$

$$V_1=-\frac{i}{r}\left(C_1^{(2)}r+\frac{C_2^{(2)}}{r}\right), \tag{9}$$

$$P_{2/r=q}=\gamma_r q\exp(-i\varphi)+q\varepsilon(\omega^2+d_{10}d_{11}g_{23}g_{24})\ \exp i(\sigma t-\varphi), \tag{10}$$

После определения гидродинамической силы и подставления которой в уравнения движения ротора и фундамента (1), приравнивания выражений при функции времени $\exp(\Omega_0 t)$, получена система двух неоднородных алгебраических уравнений относительно γ_r и γ_1, после решения которой, определяются модуль и аргументы амплитуды и фазы вынужденных колебаний ротора и фундамента.

Модуль амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента имеют вид

$$|\gamma_r|=\frac{\sqrt{\left(a_1a_0+b_0b_1\right)^2+\left(a_0b_1-a_1b_0\right)^2}}{a_0^2+b_0^2}, \tag{11}$$

$$|\gamma_1|=\frac{e\Omega_0^2}{a_0^2+b_0^2}\sqrt{(k_0^2a_0+k_{12}\Omega_0b_0)^2+(k_{12}\Omega_0a_0-k_0^2b_0)^2}. \tag{12}$$

Аргумент амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента

$$\arg(\gamma_r) = tg\psi = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 a_0 + b_1 b_0}, \quad \arg(\gamma_1) = tg\psi_1 = \frac{k_{12}\Omega_0 a_0 - k_0^2 b_0}{k_0^2 a_0 + k_{12}\Omega_0 b_0}. \qquad (13)$$

Здесь

$$a_0 = k^2 k_1^2 + (1+\mu_2)\,\Omega_0^4 - \Omega_0^2\left[(1+\mu_2)\,k_{13}^2 + k^2 + (n+k_{10})(n_1+k_{12})\right],$$

$$b_0 = \Omega_0\left\{(n+k_{10})k_{13}^2 + (n_1+k_{12})k^2 - \Omega_0^2\left[(n+k_{10}) + (1+\mu_2)\,(n_1+k_{12})\right]\right\},$$

$$a_1 = e\Omega_0^2\left(k_{13}^2 - \Omega_0^2\right), \quad b_1 = e\Omega_0^3(n_1+k_{12}), \quad k_{13}^2 = k_1^2 + k_0^2 = \frac{c+c_1}{M},$$

$$k_1^2 = \frac{c_1}{M} = k^2\mu\chi, \;\; k_0^2 = \frac{c}{M} = \mu k^2, \;\; k_{13}^2 = k_1^2 + k_0^2 = \mu\,(1+\chi)\,k^2,$$

$\mu_2 = \frac{m_{L2}}{m}$ есть отношение массы самой тяжёлой жидкости (второй жидкости), необходимой для полного заполнения полости ротора, к массе ротора.

Из формул (11) и (12) очевидно, что ротор и фундамент совершают круговую прецессию (стационарные колебания) с радиусами γ_r, γ_1 с угловой скоростью Ω_0.

Критические скорости ротора определяются при $a_0 = 0$, что даёт

$$\left(\Omega_0^2\right)_{kp1,kp2} = \frac{(1+\mu_2)\,k_{13}^2 + k^2}{2\,(1+\mu_2)} \pm \sqrt{\frac{\left[k^2 + (1+\mu_2)\,k_{13}^2\right]^2}{4\,(1+\mu_2)^2} - \frac{k^2 k_1^2}{1+\mu_2}}. \qquad (14)$$

Из формул (14) можно получить по два значения критической скорости ротора, положительные значения которых определяют критические скорости прямой прецессии, а отрицательные – критические скорости обратной прецессии ротора. Поскольку, обратная прецессия ротора на практике встречается редко, то в дальнейшем будем рассматривать только случай прямой прецессии ротора.

Для построения амплитудно-частотной характеристики ротора и фундамента и анализа полученных результатов удобно перейти к безразмерным величинам. В безразмерной форме амплитуда колебаний ротора и фундамента имеют вид:

$$\varsigma_p = |\frac{\gamma_r}{e}| = \frac{\sqrt{\left[(a_1^* a_0^* + b_0^* b_1^*)^2 + (a_0^* b_1^* - a_1^* b_0^*)^2\right]}}{a_0^{*2} + b_0^{*2}}, \qquad (15)$$

$$\varsigma_\varphi = |\frac{\gamma_1}{e}| = \frac{s^2}{a_0^{*2} + b_0^{*2}}\sqrt{(k_0^{*2} a_0^* + k_{12}^* s b_0^*)^2 + (k_{12}^* s a_0^* - k_0^{*2} b_0^*)^2}, \qquad (16)$$

где

$$a_0^* = \alpha_1 s^4 - s^2\left[\alpha_1\mu\,(1+\chi) + 1 + n^* n_1^*\right] + \mu(\chi+1), \quad a_1^* = s^2\left[\mu\,(1+\chi) - s^2\right],$$
$$b_0^* = s\left[-\left(n^* + \alpha_1 n_1^*\right)s^2 + \mu\,(1+\chi)\,n^* + n_1^*\right], \quad b_1^* = s^3 n_1^*, \quad \alpha_1 = 1 + \mu_2;$$

$\sqrt{\mu\chi} = \frac{k_1}{k}$ – отношение собственных частот; $n^* = \frac{n+k_{10}}{k}$, $n_1^* = \frac{n_1+k_{12}}{k}$ – безразмерные коэффициенты внешних трений; $\chi = \frac{c_1}{c} = \frac{k_1^2}{k^2}$ – отношение жёсткости опоры фундамента к приведенной жёсткости ротора (отношение квадратов собственных частот системы), $\mu = \frac{m}{M}$ – отношение массы ротора к массе фундамента; ς_p– безразмерная амплитуда колебаний ротора; ς_φ– безразмерная амплитуда колебаний фундамента. В этих обозначениях выражения для критических скоростей системы примут вид:

$$(s_1^2)_{kp} = \delta - \left(\delta^2 - \mu(\chi+1)\alpha_1^{-1}\right)^{1/2}, \quad (s_2^2)_{kp} = \delta + \left(\delta^2 - \mu(\chi+1)\alpha_1^{-1}\right)^{1/2}, \qquad (17)$$

где $\delta = \frac{1}{2}\left[\mu\left(1+\chi\right)+\alpha_1^{-1}\right]$.

Анализ формул (17) показывает, что критические скорости ротора с жидкостью меньше, чем критические скорости пустого ротора. Величина критической скорости зависит от плотности самой тяжёлой жидкости, при этом физические характеристики других слоев жидкостей роли не играют. С ростом плотности жидкости, находящейся у стенки ротора (это жидкость наибольшей плотности), значения обеих критических скоростей уменьшаются и наоборот. С увеличением $\chi = \frac{c_1}{c}$ (жёсткость опоры фундамента больше приведённой жесткости ротора, т.е. $A_1 > c$), первая критическая скорость растёт, тогда как вторая критическая скорость уменьшается. Когда $c_1 < c$ $(\chi < 1)$ имеет место обратный эффект. С ростом μ первая критическая скорость увеличивается, а вторая критическая скорость уменьшается. При уменьшении μ, как и в предыдущем случае, наблюдается обратный эффект.

Приведём результаты анализа, проведённого на основании формул (15) по упрощённым значениям амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента. Так как безразмерные коэффициенты внешних трений n^* и демпфера n_1^* много меньше единицы (силы сопротивления окружающей среды и демпфирования намного меньше силы упругости подшипника качения или вала), то, в первом приближении можно принять $n^* = n_1^* = 0$.

В этом случае имеем:

$$\varsigma_p = \frac{a_1^*}{a_0^*} = s^2[\mu(1+\chi)-s^2]\left[\alpha_1 s^4 - s^2[\alpha_1\mu(1+\chi)+1]+\mu(\chi+1)\right]^{-1}, \tag{18}$$

$$\varsigma_\varphi = s^2\mu(c_2+c_0)\left[\{\alpha_1 s^4 - s^2[\alpha_1\mu(1+\chi)+1]+\mu(\chi+1)\}c_2\right]^{-1}. \tag{19}$$

В выражении (18) при $s \to \sqrt{\mu(1+\chi)}$, числитель и знаменатель стремятся к нулю, но при этом знаменатель стремится к нулю приблизительно на порядок быстрее. В этом случае безразмерное значение амплитуды вынужденных колебаний фундамента стремится к бесконечности. При этом в реальной системе колебания фундамента по фазе смещены на 180° по отношению к колебаниям ротора. Когда $n^* \neq 0$, $n_1^* \neq 0$ формулы (18) и (19) принимают вид при $s = \sqrt{\mu(1+\chi)}$:

$$\varsigma_p = \mu(1+\chi)(1-\alpha_1\mu(1+\chi))^{-1}, \tag{20}$$

$$\varsigma_\varphi = \sqrt{k_{12}^*\mu(1+\chi)+\mu^2}\left(n_1^*[1-\alpha_1\mu(1+\chi)]\right)^{-1}. \tag{21}$$

Если принять во внимание, что рабочая угловая скорость ротора лежит далеко за пределами критических скоростей системы, т.е. $s > 1$, то $\mu(1+\chi)$ должно быть больше единицы, т.е. $\chi > \frac{1-\mu}{\mu}$. Таким образом, чтобы реальная величина амплитуды вынужденных колебаний с учётом внешних сил сопротивлений была минимальной, величина μ должна стремиться к нулю.

Если масса ротора приблизительно равна массе фундамента, то $\mu \to 1$ и $\chi = \frac{c_1}{c} \to 0$, т.е. жёсткость опоры фундамента становится слишком мягкой.

Теперь можно определить относительные значения амплитуд вынужденных колебаний ротора и фундамента с учётом внешних трений и демпфера, когда угловые скорости ротора равны критическим скоростям, т.е. $s = s_{1kp}$ и $s = s_{2kp}$.

В этом случае $a_0^* = -s^2 n^* n_1^*$, остальные же все коэффициенты имеют прежний вид и безразмерные величины амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента принимают значения:

$$\varsigma_p = s\sqrt{\gamma_0^2 s^2 n^{*4} + [s^2 n^* n_1^{*2} + \gamma_1(n_1^*\gamma_0 + n^*\gamma_1)]^2}\left(s^2 n^{*2} n_1^{*2} + (\gamma_0 n_1^* + n^*\gamma_1)^2\right)^{-1}, \qquad (22)$$

$$\varsigma_\varphi = s\frac{\sqrt{[-n^* n_1^*\mu + k_{12}^*(\gamma_0 n_1^* + n^*\gamma_1)]^2 + [k_{12}^* n^* n_1^* s^2 + \mu(\gamma_0 n_1^* + n^*\gamma_1)]^2}}{s^2 n^{*2} n_1^{*2} + (\gamma_0 n_1^* + n^*\gamma_1)^2}, \qquad (23)$$

где $\gamma_0 = 1 - \alpha_1 s^2$, $\gamma_1 = \mu\,(1+\chi) - s^2$.

В этих формулах вместо s необходимо последовательно подставить s_{1kp} и s_{2kp}, определяемые формулами (17).

Когда $s = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}$, коэффициенты имеют значения $a_0^* = -(\mu + \frac{n^* n_1^*}{\alpha_1})$,

$$a_1^* = \frac{1}{\alpha_1[\mu(1+\chi) - 1/\alpha_1]}, \quad b_0^* = s[\mu(1+\chi) - 1/\alpha_1]n^*, b_1^* = (1/\alpha_1)^{3/2} n_1^*,$$

формулы (18) и (19) принимают вид:

$$\varsigma_p = \alpha_1^{-1}\sqrt{\mu^2\delta_0^2 + (1/\alpha_1)(n^*\delta_0^2 + \delta_1 n_1^*)^2}\left(\delta_1^2 + (1/\alpha_1)n^{*2}\delta_0^2\right)^{-1}, \varsigma_\varphi = \alpha_1^{-1}\mu(\delta_1^2 + (1/\alpha_1)n^{*2}\delta_0^2)^{-1/2},$$

где $\delta_0 = \mu(1+\chi) - \frac{1}{\alpha_1}$, $\delta_1 = \mu + \frac{n^* n_1^*}{\alpha_1}$.

Таким образом, используя указанные формулы, можно найти безразмерные амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента с учётом внешних трений и демпфера в характерных точках.

В случае пустого ротора при $\alpha_1 = 1$ и $\mu_2 = 0$, как видно из формул (15), (16), (18) и (19), безразмерные значения амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента, а также критические скорости системы уменьшаются, но общая картина амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристики системы не изменится.

Исследование уравнений движения ротора и фундамента и полученного из него характеристического уравнения позволяет определить зоны неустойчивости движения роторной системы и влияние на их конфигурацию различных параметров, таких как, число оборотов ротора, соотношение объёмов жидкостей и др. Выбор соответствующих параметров ротора, фундамента и жидкости позволяет управлять колебаниями системы, т. е. исследование колебаний и устойчивости системы с учётом движения корпуса, позволяет определять те значения параметров, при которых амплитуда вынужденных колебаний и ширина зон неустойчивости ротора существенно уменьшается. При этом упругий фундамент играет роль динамического виброгасителя.

Список литературы

[1] Рахматуллаев А.Ш., Кыдырбекулы А.Б. Динамика прецессии гибкого ротора с жидкостью на подшипниках скольжения // Вестник КазГУ, 1999. № 1(5). – С. 111-116.

[2] Кыдырбекулы А.Б., Рахматуллаев А.Ш. Колебания и устойчивость неуравновешенного ротора с полостью, частично заполненной двумя вязкими несмешивающимися жидкостями // Конференция по ТММ Северо-Кавказской и Закавказской зон. – Телави, 1987. – С. 72.

TO ROTOR'S DYNAMICS FULFILLED WITH TWO LIQUIDS AND SET ON FUNDAMENT

A.B. Kydyrbekuly, L.A. Khajieva
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty

The work is dedicated to the research of dynamics of statistically unbalanced rotor with rug partly fulfilled with two unmixed liquids and set on resilient fundament. The resilient shaft with massive rotor disposed symmetrically relatively support, is set on resilient fundament and fastened by swing bearing which provides condition of flat parallel rotor moving