Локальная разрешимость уравнений соболевского типа с памятью*

О.А. Стахеева
Челябинский государственный университет
e-mail: `Alda_87@mail.ru`

В работе рассмотрено уравнение в банаховом пространстве с вырожденными оператором при производной и с интегральным слагаемым, учитывающим состояние описываемой уравнением системы во все предыдущие моменты времени. Сформулированы условия на параметры рассматриваемого уравнения, достаточные для локального существования единственного решения задачи Коши для него. Общий результат использован при исследованиии начально-краевой задачи для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной с памятью.

Введение. Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, в естественных и технических науках часто описывающих различные процессы, удобно исследовать в рамках задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховых пространствах [1, 2]. Уравнение может быть разрешенным относительно производной [1] или иметь вырожденный оператор при производной и, соответственно, соболевский тип [2]. При этом нередко встречаются так называемые системы с памятью, поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей «истории» системы и поэтому описывается интегро-дифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временной переменной. Такие уравнения возникают, например, при описании термомеханического поведения полимеров [3, 4], вязкоупругих жидкостей при низких температурах [5, 6].

В работе для уравнения с памятью, не разрешенного относительно производной по времени, доказано локальное существование решения.

1. Сильно (L,p)-секториальные операторы. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, а оператор $M : \mathrm{dom}M \subset \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$.

Введем следующие обозначения: $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}$, $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M)$ и $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod\limits_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$ при $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0,1,\dots,p$.

Определение 1. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным*, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ такие, что

$$S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p}|\mu_q - a|};$$

*Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96007-р_урал_а.

(iii) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, такой, что

$$\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathfrak{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda - a|\prod\limits_{q=0}^{p}|\mu_q - a|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}};$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{|\lambda - a|\prod\limits_{q=0}^{p}|\mu_q - a|}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$.

При уловии сильной (L,p)-секториальности оператора M на пространстве $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) задан проектор

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad \left(Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}\right).$$

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$; $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 [2]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*
(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;
(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше p;*
(v) *аналитическая полугруппа операторов*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S^L_{a,\Theta}(M)+1} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t > 0, \quad U^0 = P,$$

является разрешающей для уравнения $L\dot u(t) = Mu(t)$;
(vi) *инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы*

$$\left\{U^t_1 = U^t\Big|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\right\}$$

является оператор $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$, при этом $\sigma(L_1^{-1}M_1) = \sigma^L(M)$.

2. Уравнение соболевского типа с памятью

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа с памятью

$$L\dot u(t) = Mu(t) + (Ju)(t), \; t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{2}$$

Оператор J имеет вид

$$(Ju)(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)u_-(-s)ds,$$

где $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ — семейство оператор-функций, $u_- : \mathbb{R}_- \to \mathfrak{U}$ — функция, описывающая «историю» системы.

Решением задачи (1), (2) на отрезке $[0, T]$ называется функция $u \in C^1((0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathfrak{U})$, удовлетворяющая условию (1) и уравнению (2) на $(0, T]$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, оператор M сильно (L, p)-секториален. Подействуем на обе части уравнения (2) проектором Q и получим в силу теоремы 1 уравнение

$$L_1\dot{v} = M_1 v + QJ(v + w),$$

где $Pu(t) = v(t), (I - P)u(t) = w(t), u(t) = v(t) + w(t)$. Отсюда

$$\dot{v} = L_1^{-1}M_1 v + L_1^{-1}QJv + L_1^{-1}QJw. \tag{3}$$

Если же на уравнение (2) подействовать оператором $M_0^{-1}(I - Q)$, то получим

$$H\dot{w} = w + M_0^{-1}Q_0 Jw + M_0^{-1}Q_0 Jv, \tag{4}$$

где $Q_0 = I - Q$. Таким образом, уравнение (2) сводится к системе уравнений (3) и (4).

Рассмотрим случаи, когда выражение $M_0^{-1}Q_0 Jw$ тождественно равно нулю. Например, случае $\operatorname{im} \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$ получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, для всех $t \in [0, T]$ $\operatorname{im} \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$, $\sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, отображение $Q\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathfrak{F}$ ограничено, $Pu_- \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathfrak{U}^1)$, $u_0 \in \mathfrak{U}^1$,*

$$\exists N > 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall t, s \geq 0 \;\; \|Q(\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s))\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \leq N|t - s|^\alpha.$$

Тогда при некотором $T > 0$ существует единственное решение $u \in C^1((0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathfrak{U})$ задачи $(1), (2)$, которое совпадает с единственным решением задачи

$$v(0) = Pu_0, \quad \dot{v} = L_1^{-1}M_1 v + L_1^{-1}QJv. \tag{5}$$

Доказательство. Если $\operatorname{im} \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$, то $Q_0 J = 0$. В этом случае уравнение (4) принимает вид $H\dot{w}(t) = w(t)$ и, следовательно, имеет единственное решение $w \equiv 0$ в силу нильпотентности оператора H. При этом задача Коши $w(0) = (I - P)u_0$ для него имеет решение только в случае, когда $u_0 \in \mathfrak{U}^1$.

Таким образом, задача $(1), (2)$ сведена к задаче Коши (5). Используя теорему 1 (v), нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы 3 [7] о разрешимости задачи (5).

Рассмотрим теперь случай $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно $(L, 0)$-секториален, для всех $t \in [0, T]$ $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$, $\sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, отображение $Q\mathcal{K} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathfrak{F}$ ограничено, $Pu_- \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathfrak{U}^1)$,*

$$\exists N > 0 \quad \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall t, s \geq 0 \;\; \|Q(\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s))\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \leq N|t - s|^\alpha,$$

$$(I - P)u_0 = -M_0^{-1}Q_0 JPu_0, \tag{6}$$

Тогда существует единственное решение $u \in C^1((0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathfrak{U})$ задачи $(1), (2)$, которое имеет вид $u(t) = v(t) - M_0^{-1}Q_0 Jv(t)$, где v – единственное решение задачи (5).

Доказательство В случае, когда $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$, имеем $Jw \equiv 0$ и система (3), (4) принимает вид

$$\dot{v} = L_1^{-1} M_1 v + L_1^{-1} Q J v,$$

$$H\dot{w} = w + M_0^{-1} Q_0 J v. \tag{7}$$

Однозначная разрешимость задачи (5) доказывается также со ссылкой на теоремы 3 [7] и 1 (v). Подставим найденную функцию v в уравнение (7). Оператор $H = 0$ по теореме 1 (iv), поэтому

$$w(t) = -M_0^{-1} Q_0 J v(t)$$

является решением уравнения (7). Условие (6) в таком случае является необходимым для разрешимости задачи Коши

$$w(0) = (I - P)u(0) = (I - P)u_0$$

для уравнения (7).

3. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с памятью. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{9}$$

для уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной с памятью

$$(\lambda - \triangle)u_t = \triangle u - \beta \triangle^2 u + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega k(x,y,s) u(y, t-s) dyds, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{10}$$

Здесь ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу. Возьмем пространства $\mathfrak{U} = H^2(\Omega)$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$, $L = \lambda - \triangle$, $M = \Delta - \beta\Delta$, с областью определения

$$D(M) = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\}.$$

Через $\{\lambda_k\}$ обозначим занумерованные по невозрастанию с учетом кратности собственные значения оператора Лапласа, действующего в $L_2(\Omega)$, определенного на $\{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\}$.

Теорема 4. *Пусть* $u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_- \in L_1(\mathbb{R}_-; H^2(\Omega))$,

$$\sup\left\{\frac{\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq \lambda\right\}, \quad \sup_{s \geq 0} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |k(x,y,s)|^2 dydx < \infty,$$

$$\exists N > 0 \quad \exists \alpha \in (0,1] \quad \forall t, s \geq 0$$

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |k(x,y,t) - k(x,y,s)|^2 dydx \leq N|t-s|^{2\alpha}.$$

Тогда при некотором $T > 0$ *существует единственное решение* $u \in C^1((0,T]; H^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^2(\Omega))$ *задачи* (8) — (10).

Список литературы

[1] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений М.: Мир, 1985.

[2] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[3] Coleman B.D., Gurtin M.E., Angew Z. Equipresence and costitutive equations for rigid heat conductors // Math. Phys. 1967. Vol. 18. P. 199—208.

[4] Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 31. P. 113—126.

[5] Fabrizio M., Morro A. Mathematical problems in linear viscoelasticity // SIAM Studies Appl. Math. Vol. 12. Philadelphia: SIAM, 1992.

[6] Renardy M., Hrusa W.J., Nohel J.A. Mathematical problems in linear viscoelasticity. N.Y.: Longman Scientific and Technical; Harlow John Wiley and Sons, Inc., 1987.

[7] Стахеева О.А. Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью // Вестник. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. 2009. № 20 (158). С. 70—76.