Некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными Коши

И.В.Фроленков
Институт Математики, Сибирский Федеральный университет
e-mail: `kspk_job@mail.ru`

Е.Н.Кригер, Г.В.Романенко

В работе рассмотрены две коэффициентные обратные задачи для уравнения теплопроводности с данными Коши.

Первая задача заключается в исследовании корректности обратной задачи для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка, и условиями переопределения специального вида. Для приведения обратной задачи к прямой используется подход, предложенный Ю.Е. Аниконовым [1]. Исходная обратная задача разбивается на две задачи, одна из которых является обычной задачей Коши для параболического уравнения, а другая является нелинейной и содержит выражение для неизвестного коэффициента.

Вторая задача заключается в идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении. Рассматриваемый неизвестный коэффициент при функции источника ищется в виде суммы [2] или произведения двух неизвестных функций, каждая из которых зависит от двух переменных (временной и пространственной). Условия переопределения заданы на двух пересекающихся плоскостях. Указанная обратная задача приводится к неклассической прямой задаче, содержащей следы неизвестной функции и ее производных.

Решений исследованных задач получено в классах гладких ограниченных функций. Исследование прямых задач проводится с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне (метод слабой аппроксимации), который был впервые предложен в работах Н.Н.Яненко и А.А.Самарского и получил развитие в работах их учеников и последователей [3,4]. Разрешимость задач идентификации нескольких неизвестных коэффициентов для параболического уравнений исследованы в [5]. Вопрос поведения решения задачи идентификации функции источника на бесконечности по временной переменной исследован в [6].

В работах [7,8] приведены методы решения различных обратных задач с краевыми условиями, а также обширный справочный материал по теории обратных задач.

Задача 1.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \Big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\Big\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{1}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$, с начальным условием условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2}$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0, T]$, причем $a(t) \geq a_0 > 0,\ b(t) \geq b_0 > 0,\ c_i(t) > 0,\ i = 1, 2$. Функция $u_0(x, z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функция $\lambda(t, z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t, x, z)$ задачи (1), (2).

Выполнено условие переопределения

$$u(t, 0, z) = \psi(t, z), \tag{3}$$

и условие согласования

$$u_0(0, z) = \psi(0, z). \tag{4}$$

Считаем выполненым условие

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t, z) + c_2(t)\psi_z(t, z) + c_3(t)\psi(t, z)| \geq \mu > 0, \quad \mu\text{— const.} \tag{5}$$

Частным случаем теоремы, сформулированной Ю.Е. Аникoновым в работе [1], является следующая теорема.

Теорема 1: *Если существуют решения $\varphi(t, x)$ и $f(t, z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x \varphi, \quad \varphi(0, x) = w_0(x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t, z) - a(t)\psi_{zz}(t, z) - f(t, z)\varphi_t(t, 0)}{B_z(\psi)}, \quad f(0, z) = v_0(z), \tag{7}$$

то функции $u(t, x, z)$ и $\lambda(t, z)$, определенные формулами

$$u(t, x, z) = \varphi(t, x) f(t, z), \quad \lambda(t, z) = \frac{\psi_t(t, z) - a(t)\psi_{zz}(t, z) - f(t, z)\varphi_t(t, 0)}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (1) — (3) *в предположении, что* $u_0(x, z) = w_0(x) v_0(z)$.

Действительно, нетрудно убедиться, что при подстановке выражений для неизвестных функций в уравнения (1), (2), получаем верные тождества. Условие переопределения (3) так же выполнено.

Для задачи Коши (6) известно, что если $w_0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и ограничена, то решение задачи Коши в классе функций, ограниченных для любого $t \in [0, T]$, существует и единственно.

Для доказательства существования решения задачи (7) рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f) S_\delta\left(\frac{\beta(t, z) - f(t, z)\varphi_t(t, 0)}{B_z(\psi)}\right), \quad f(0, z) = v_0(z), \tag{8}$$

здесь $\beta(t, z) = \psi_t(t, z) - a(t)\psi_{zz}(t, z)$ — это известная функция, а $S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:

$S_\delta(\vartheta) \geq \frac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \text{при } \vartheta \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \leq \frac{\delta}{3}. \end{cases}$

Определению подлежит функция $f(t, z)$. Функция $v_0(z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}$. Функция $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \leq 2, k = 1, \ldots, 4$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации [4]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau N = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f^\tau_t = 3\, a(t) f^\tau_{zz}(t,z), \;\; n\tau < t \le \Big(n + \frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{9}$$

$$f^\tau_t = 3\,(c_1(t) f^\tau_{zz}(t,z) + c_2(t) f^\tau_z(t,z)) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \;\; \Big(n+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(n+\frac{2}{3}\Big)\tau, \tag{10}$$

$$f^\tau_t = 3\, c_3(t) f^\tau(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \;\; \Big(n+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(n+1\Big)\tau, \tag{11}$$

$$f^\tau(0,z) = v_0(z), \quad n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\; N\tau = T, \tag{12}$$

где $\lambda^\tau(t,z) = \dfrac{\beta(t,z) - f^\tau(t-\frac{\tau}{3}, z)\,\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $v_0(z), \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k} v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \le C, \quad k = 0,\ldots,4,\; i = 0,\ldots,6. \tag{13}$$

В работе доказаны априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $f^\tau(t,z)$ задачи (9)—(12) в классе гладких непрерывных функций. В $G_{[0,t^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^\tau(t,z)\right| \le C, \quad k = 0,\ldots,4. \tag{14}$$

Здесь $0 < t^* \le T$ — некоторая константа, зависящая от μ из (5), постоянных из (29), ограничивающих входные данные, а также постоянных, ограничивающих функции $a(t), b(t), c_i(t)$ $(i = 1,2)$.

Используя оценки (14), из уравнений (9)—(12) справедлива равномерная по τ оценка

$$|f^\tau_t(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения задачи (9)—(12) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$|f^\tau_{tz}(t,z)| + |f^\tau_{tzz}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t^*]},$$

что вместе с (14), (15) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t,z)$ последовательности $f^\tau(t,z)$ решений задачи (9)—(12) сходится к функции $f(t,z) \in C^{0,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$ вместе с производными по z до второго порядка включительно.

На основании теоремы сходимости МСА [4], $f(t,z)$ — решение задачи (8), причем $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2. \right\}$$

При этом
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z)\right| \le C, \quad k = 0,1,2. \tag{16}$$

В предположении, что выполняется условие при $(t,z) \in G_{[0,t^*]}$
$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \ge \delta, \tag{17}$$

доказано, что
$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \ge \frac{\delta}{2}. \tag{18}$$

Из определения срезающей функции $S_\delta(\vartheta)$ и оценки (18) следует, что $f(t,z)$ — решение задачи(7). Таким образом, доказано существование решения функции $f(t,z)$ задачи (7) в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$. Следовательно справедлива

Теорема 2: *Пусть выполняются соотношения* (5), (29), (17). *Тогда существует решение* $f(t,z)$ *задачи* (7) *в классе* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z)\right| \le C. \tag{19}$$

Доказана единственность решения задачи (6), путем доказательства тождественного равенства нулю в $G_{[0,t^*]}$ разности двух предполагаемых решений. Справедлива

Теорема 3: *Пусть выполняются соотношения* (5), (29), (17). *Тогда решение* $f(t,z)$ *задачи* (7) *в классе* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (19), *единственно.*

Задача 2.

В области $G_{[0,T]} = \left\{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ рассмотрим задачу идентификации функции источника для параболического уравнения
$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{20}$$

с начальным условием
$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{21}$$

Неизвестными в задаче являются функции $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$. Неизвестный коэффициент зависит от временной и всех пространственных переменных, однако известно, что он имеет специальный вид
$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z), \tag{22}$$

или
$$\lambda(t,x,z) = \lambda_3(t,x)\cdot\lambda_4(t,z). \tag{23}$$

Условия переопределения заданы на двух пересекающихся гиперплоскостях
$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \quad u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \tag{24}$$

где α, β—некоторые постоянные.

Считаем выполнеными условия согласования:
$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \quad u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \quad \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \tag{25}$$

и условия на входные данные:

$$\begin{aligned}&\varphi_t(t,\beta)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)\neq 0,\\&\big|f(t,\beta,z)\big|\geq\delta_1>0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big|\geq\delta_2>0,\quad\forall\, t\in[0,T],\,\forall\,(x,z)\in\mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{26}$$

где δ_1,δ_2 — некоторые постоянные.

Также относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (8), и удовлетворяют ему.

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right|+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|+&\\+\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right|\leq C,\qquad k_1,k_2=0,1,\ldots,6.&\end{aligned}\tag{27}$$

В первом случае при помощи условий переопределения неизвестный коэффициент находится в следующем виде

$$\begin{aligned}\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)=\frac{\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)}{f(t,x,\alpha)}-&\\-\frac{\psi_t(t,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}.&\end{aligned}\tag{28}$$

Доказано существование единственного решения $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$ обратной задачи (20)–(22),(24)–(27) в классе

$$Z(T)=\Big\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \Big|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big),\lambda(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)\Big\},$$

где

$$\begin{aligned}C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)=\Big\{u(t,x,z)\ \Big|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u,\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u\in C\left(G_{[0,T]}\right),&\\k=0,1,\ldots,l,k_1=0,1,\ldots,l_1,k_2=0,1,\ldots,l_2\Big\},&\end{aligned}$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\leq C.\tag{29}$$

Также получены оценки устойчивости решения обратной задачи (20)–(22),(24)–(27) по входным данным вида

$$||u^1-u^2||_1+||\lambda^1-\lambda^2||_1\leq C\cdot\Big(||u_0^1-u_0^2||_2+||f^1-f^2||_1+||\psi^1-\psi^2||_3+||\varphi^1-\varphi^2||_4\Big),$$

где (u^i,λ^i) – это решение, соответствующее набору входных данных $(u_0^i,f^i,\psi^i,\varphi^i)$.

Во втором случае неизвестный коэффициент выражается следующим образом,

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_3(t,x)\cdot\lambda_4(t,z) = \frac{f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)\cdot\left[\varphi_t(t,\beta)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)\right]}\cdot$$
$$\cdot\Big([\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)]\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)] - u_{zz}(t,x,\alpha)\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)]-$$
$$- u_{xx}(t,\beta,z)\cdot[\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)] + u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)\Big). \quad (30)$$

Доказана локальная теорема существования решения (в малом временном интервале) $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$ обратной задачи (20),(21),(23)–(27) в классе

$$Z(t_*) = \Big\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\ \Big|\ u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big),\lambda(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t_*]}\big)\Big\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right| \le C.$$

$0 < t_* \le T$ – некоторая постоянная, зависящая от констант, ограничевающих входные данные, и констант δ_1,δ_2.

Список литературы

[1] Аниконов Ю.Е. О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений / Доклады академии наук, том 331, №3, 1993, С.409-410.

[2] Фроленков И.В., Кригер Е.Н. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(4), p.556-564.

[3] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967, С.195.

[4] Белов Ю.Я., С.А.Кантор. Метод слабой аппроксимации. КрасГУ, 1999.

[5] Белов Ю.Я., И.В.Фроленков. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Доклады Академии Наук, 2005 – Т.404, №5, С.583 – 585.

[6] Афиногенова О.А., Белов Ю.Я., Фроленков И.В. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / Доклады Академии Наук, 2009, том 424, №4, с.439-441.

[7] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekkar,Inc.,1999.

[8] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.