Аналитическое построение закрученных вертикальных течений газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

Е.Д. Белова
ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина
e-mail: Ek.D.Belova@gmail.com

Рассмотрим стационарные вертикальные течения идеального политропного газа при учете сил тяжести и Кориолиса, которые являются решени системы уравнений газовой динамики (СУГД). В случае общих пространственных стационарных течений - искомое течение может быть состыковано с двумя зонами покоящегося воздуха: первая зона располагается в окрестностях вертикальной оси симметрии восходящего закрученного потока, во второй зоне находится внешний по отношению к искомому потоку покоящийся воздух. Искомое решение строится в аналитическом виде, как некоторое приближенное решение СУГД. Указанное приближенное решение строится в виде начального отрезка ряда по степеням малых параметров g и Ω (постоянное ускорение свободного падения и угловая скорость вращения Земли). Для коэффициентов этого представления выписаны линейные системы уравнений с частными производными. Для слагаемых, стоящих перед первыми степенями g и Ω, получены линейные системы уравнений с частными производными. Интегрирование этих систем сведено к решению линейной краевой задачи для радиальной скорости.

Система уравнений газовой динамики (СУГД) для изэнтропических нестационарных общих пространственных течениях политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид[1, 2]:

$$\begin{cases} \Theta_t + u\Theta_r + \dfrac{v}{r}\Theta_\varphi + w\Theta_z + (\gamma-1)\,\Theta\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0\,, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \dfrac{1}{\gamma-1}\Theta_r = av - (b\cos\varphi)w\,, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{u}{r}u_\varphi + wv_z + \dfrac{1}{(\gamma-1)r}\Theta_\varphi = (-a)u + (a\cos\psi)w\,, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{1}{\gamma-1}\Theta_z = (b\cos\varphi)u - (b\sin\varphi)v - g\,, \end{cases} \tag{1}$$

В системе (1): t - время; x, y, z - декартовые независимые переменные и в плоскости переменных x, y введена полярная система координат $(r,\,\varphi)$; $\Theta = c^2$, где $c = \rho^{(\gamma-2)/2}$ - скорость звука газа; $\gamma = \mathrm{const} > 1$ - показатель политропы газа в уравнении состояния $p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$, где p и ρ - давление и плотность газа; u, v, w - соответственно радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа; $a = 2\Omega\sin\psi$; $b = 2\Omega\cos\psi$; $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$- модуль вектора угловой скорости вращения Земли; ψ - широта точки O на поверхности Земли в которой находится начало координатной плоскости xOy, касающейся поверхности Земли в точке O; g - константа ускорения свободного падения; малые параметры g и Ω $(g \approx 0,1, \Omega \approx 10^{-4}$) - в рассматриваемую систему входят регулярно;

Представим решение системы (1) в виде бесконечного ряда по степеням g и Ω:

$$\mathbf{U}(t,r,\varphi,z,g,\Omega)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\mathbf{U}_{k,l}\left(t,r,\varphi,z\right)\frac{g^k}{k!}\cdot\frac{\Omega^l}{l!}\,,\qquad \mathbf{U}_{k,l}=\left.\frac{\partial^{k+l}\mathbf{U}}{\partial g^k\partial\Omega^l}\right|_{g=\Omega=0}.$$

Ряд будет строиться до первых степеней g и Ω:

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}_0+\mathbf{U}_1 g+\mathbf{U}^1\Omega+\dots$$

где для краткости введены переобозначения: $\mathbf{U}_0=\mathbf{U}_{0,0}$, $\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_{1,0}$ и $\mathbf{U}^1=\mathbf{U}_{0,1}$.

Получим систему для $\mathbf{U}|_{g=\Omega=0}=\mathbf{U}_0$. Для этого в системе (1) положим g $=\Omega=0$ и учтем введеные обозначения.

$$\begin{cases}\Theta_{0t}+u_0\Theta_{0r}+\frac{v_0}{r}\Theta_{0\varphi}+w_0\Theta_{0z}+\\ \qquad+(\gamma-1)\Theta_0(u_{0r}+\frac{u_0}{r}+\frac{v_{0\varphi}}{r}+w_{0z})=0\,,\\ u_{0t}+u_0u_{0r}-\frac{v_0^2}{r}+w_0u_{0z}+\dfrac{\Theta_{0r}}{\gamma-1}=0\,,\\ v_{0t}+u_0v_{0r}+\frac{u_0v_0}{r}+w_0v_{0z}=0\,,\\ w_{0t}+u_0w_{0r}+w_0w_{0z}+\dfrac{\Theta_{0z}}{\gamma-1}=0\,,\end{cases}\tag{2}$$

Получили систему из четырех уравнений для четырех искомых функций, решение которой задает течение $\mathbf{U}_0$, называемое далее фоновым. Цель данной работы - смоделировать течение газа в вертикальной части восходящего закрученного потока (ВЗП), фактически описывающее это течение не по всей длине вертикальной части, а только на небольшом по высоте среднем участке вертикальной части ВЗП. Это позволяет предположить фоновое течение газа стационарным, то есть не зависящим от t. Кроме того, для простоты изучения примем, что фоновое течение так же не зависит от координат φ и z, а только от полярного радиуса r. Радиальную и угловую составляющую вектора скорости, также положим нулю. Таким образом будем искать частные решения системы (2) исходя из следующих условий:

$$\frac{\partial}{\partial t}=0\,,\quad\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\,,\quad\frac{\partial}{\partial z}=0\,,\quad u_0=0\,,\quad w_0=0\,.\tag{3}$$

В результате получим, что первое, третье и четвертое уравнения обратились в тождества. Таким образом в системе (2) осталось удовлетворить только одному уравнению:

$$\frac{\Theta_{0r}}{\gamma-1}=\frac{v_0^2}{r}\tag{4}$$

в которое входят две искомые функции $\Theta_0(r)$ и $v_0(r)$. $v_0(r)$ выбирается в явном виде, исходя из некоторых газодинамических соображений. Тогда уравнение (4) есть обыкновенное диффиренциальное уравнение для $\Theta_0(r)$, из которого $\Theta_0(r)$ определяется с точностью до произвольного слагаемого:

$$\Theta_0(r)=(\gamma-1)\int\frac{v_0^2(r)}{r}\,\mathrm{d}r+C\tag{5}$$

В работе рассмотрены четыре случая задания $v_0(r)$:

1. $v_0(r) = \omega r$, то есть поток газа закручен в положительную сторону с постоянной угловой скоростью ω большей нуля. Тогда:

$$\Theta_0(r) = \frac{\gamma - 1}{2}\,\omega^2 r^2 + C, \tag{6}$$

2. $v_0(r) = v_{00}$, где v_{00} - постоянная окружная скорость большая нуля. Как и в предыдущем случае подставляем полученное значение в уравнение (5) и интегрируем:

$$\Theta_0(r) = (\gamma - 1)\; v_{00}^2 \ln r + C\,, \tag{7}$$

3. $v_0(r) = \frac{v_{00}}{r}$. то есть при приближении к оси скорость v становится не ограниченной в этом случае получается:

$$\Theta_0(r) = C - 2(\gamma - 1)\frac{v_{00}^2}{r^2}\,, \tag{8}$$

4. $v_0(r) = v_{00}\left(\frac{1}{r} - r\right)$, $v_0 = \text{const} > 0$. Такой вид имеет радиальная скорость газа в придонном течении [2], которое и поступает в вертикальную часть ВЗП. Таким образом получим:

$$\Theta_0(r) = C + (\gamma - 1)\, v_{00}^2 \left[-\frac{1}{2r^2} - 2\ln r + \frac{r^2}{2}\right] \tag{9}$$

На этом построение всех четырех случаев фонового течения заканчивается.

Получим систему для следующего искомого коэффициента $\mathbf{U}^1 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Omega}|_{g=\Omega=0}$. Для этого систему (1) продифференцируем по g, положим $g = \Omega = 0$ и учтем вид $\Theta_0 = \Theta_0(r)$, $u_0 = 0$, $w_0 = w_{00}$ как и в случае фонового течения положим $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. В результате получим такую систему:

$$\begin{cases} \Theta_0'(r) u_1 + w_{00}\Theta_{1z} + (\gamma - 1)\Theta_0(r)\left[u_{1r} + \frac{u_1}{r} + w_{1z}\right] = 0\,, \\ -\frac{2v_0(r)}{r} v_1 + w_{00} u_{1z} + \frac{1}{\gamma - 1}\Theta_{1r} = 0\,, \\ \left[v_0'(r) + \frac{v_0(r)}{r}\right] u_1 + w_{00} v_{1z} = 0\,, \\ w_{00} w_{1z} + \frac{1}{\gamma-1}\Theta_{1z} = -1\,. \end{cases} \tag{10}$$

Построение частных решений системы (10) в случае первого фонового течения $v_0 = \omega r$ приведено в книге [2]. В случае остальных трех фоновых течений построение частных решений системы (10) проводится аналогичным образом. Далее выпишем систему для $\mathbf{U}^1 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Omega}|_{g=\Omega=0}$. Для этого систему (1) продифференцируем по Ω, положим $g = \Omega = 0$ и учтем $\Theta_0 = \Theta_0(r)$, $u_0 = 0$, $w_0 = w_{00}$ а также положим $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$. В результате получим:

$$\begin{cases} \Theta_0'(r) u^1 + \frac{v_0(r)}{r}\Theta^1_\varphi + (\gamma - 1)\Theta_0\,(r)\left(u^1_r + \frac{u^1}{r} + \frac{v^1_\varphi}{r}\right) = 0\,, \\ \frac{v_0(r)}{r} u^1_\varphi - \frac{2v_0(r)}{r} v^1 + \frac{1}{\gamma-1}\Theta^1_r = 2\sin\psi\, v_0\,(r) - 2\cos\psi\, w_{00}\,\cos\varphi\,, \\ \left[v_0'(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}\right] u^1 + \dfrac{v_0(r)}{r} v^1_\varphi + \dfrac{\Theta^1_\varphi}{(\gamma-1)\,r} = 2\cos\psi\, w_{00}\,\sin\varphi\,, \\ w^1_\varphi = -2r\cdot\cos\psi\sin\varphi\,. \end{cases} \tag{11}$$

Из четвертого уравнения системы (11) выразим w^1.

$$w^1(r,\varphi) = 2\cos\psi r\cos\varphi + 2\cos\psi r = 2\cos\psi r(1+\cos\varphi)$$

Для определения остальных искомых функций используем следующее представление:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ u^1 \\ v^1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{1,0}(r) + \mathbf{X}^{1,1}(r)\cos\varphi + \mathbf{X}^{1,2}(r)\sin\varphi$$

Осуществим подстановку $\mathbf{X}^1$ с новыми искомыми функциями, зависящими только от r. Выпишем первое, второе и третье уравнения системы (11):

$$\Theta_0'(r)\left[u^{10}(r) + u^{11}(r)\cos\varphi + u^{12}(r)\sin\varphi\right] + \frac{v_0(r)}{r}\left[-\Theta^{11}(r)\sin\varphi + \Theta^{12}(r)\cos\varphi\right] +$$
$$+(\gamma-1)\Theta_0(r)\left[u^{10\prime}(r) + u^{11\prime}(r)\sin\varphi + \frac{1}{r}\left(u^{10}(r) + u^{11}(r)\cos\varphi + u^{12}(r)\sin\varphi - \right.\right.$$
$$\left.\left.-v^{11}\sin\varphi + v^{12}\cos\varphi\right)\right] = 0;$$
$$\frac{v_0(r)}{r}\left[-u^{11}(r)\sin\varphi + u^{12}(r)\cos\varphi\right] - \frac{2v_0(r)}{r}\left[v^{10}(r) + v^{11}(r)\cos\varphi + v^{12}(r)\sin\varphi\right] +$$
$$+\frac{1}{\gamma-1}\left[\Theta^{10\prime}(r) + \Theta^{11\prime}(r)\cos\varphi + \Theta^{12\prime}(r)\sin\varphi\right] = 2\sin\psi v_0(r) - 2\cos\psi w_{00}\cos\varphi;$$
$$\left[v_0'(r) + \frac{v_0(r)}{r}\right]\left(u^{10}(r) + u^{11}(r)\cos\varphi + u^{12}(r)\sin\varphi\right) + \frac{v_0(r)}{r}\left(-v^{11}(r)\sin\varphi + \right.$$
$$\left.+v^{12}(r)\cos\varphi\right) + +\frac{1}{r(\gamma-1)}\left[-\Theta^{11}(r)\sin\varphi + \Theta^{12}(r)\cos\varphi\right] = 2\cos\psi w_{00}\sin\varphi;$$

Составим на основе этих уравнений новую систему. Для этого соберем слагаемые из первого уравнения, которые зависят только от r и остальные что содержат сомножителями $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$, приравняв по отдельности эти выражения нулю, получим три уравнения, аналогично из второго и третьего уравнений получим еще шесть уравнений.

В итоге получим девять уравнений из которых составим общую систему:

$$
\begin{cases}
\Theta_0'(r)u^{10}(r) + (\gamma-1)\Theta_0(r)\left[u^{10\prime}(r) + \frac{u^{10}(r)}{r}\right] = 0\,, \\
\Theta_0'(r)u^{11}(r) + \frac{v_0(r)}{r}\Theta^{12}(r) + (\gamma-1)\,\Theta_0(r)\left[u^{11\prime}(r) + \dfrac{1}{r}u^{11}(r) + \dfrac{1}{r}v^{12}(r)\right] = 0\,, \\
\Theta_0'(r)u^{12}(r) - \dfrac{v_0(r)}{r}\Theta^{11}(r) + (\gamma-1)\,\Theta_0(r)\left[u^{12\prime}(r) + \dfrac{1}{r}u^{12}(r) - \dfrac{1}{r}v^{11}(r)\right] = 0\,, \\
-\frac{2v_0(r)}{r}v^{10}(r) + \frac{1}{\gamma-1}\Theta^{10\prime}(r) = 2\sin\psi v_0(r)\,, \\
\frac{v_0(r)}{r}u^{12}(r) - \frac{2v_0(r)}{r}v^{11}(r) + \frac{1}{\gamma-1}\Theta^{11\prime}(r) = -2\cos\psi w_{00}\,, \\
-\frac{v_0(r)}{r}u^{11}(r) - \frac{2v_0(r)}{r}v^{12}(r) + \frac{1}{\gamma-1}\Theta^{12\prime}(r) = 0\,, \\
\left[v_0'(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}\right]u^{10}(r) = 0\,, \\
\left[v_0'(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}\right]u^{11}(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}v^{12}(r) + \dfrac{1}{r(\gamma-1)}\Theta^{12}(r) = 0\,, \\
\left[v_0'(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}\right]u^{12}(r) - \dfrac{v_0(r)}{r}v^{11}(r) - \dfrac{1}{r(\gamma-1)}\Theta^{11}(r) = 2\cos\psi w_{00}\,.
\end{cases}
\tag{12}
$$

В системе (12) имеется девять неизвестных функций, шесть из них выберем такими:

$$
u^{10}(r) = 0; \quad u^{10}(r) = 0; \quad \Theta^{10}(r) = 0; \quad \Theta^{12}(r) = 0; \quad v^{12}(r) = 0; \quad v^{10}(r) = -\sin\psi r; \tag{13}
$$

После подстановки (13) в систему (12) получим, что первое, второе, четвертое, шестое, седьмое и восьмое уравнения выполнятся тождественно. Таким образом останется система из трех уравнений для оставшихся трех неизвестных u^{12}, Θ^{11} и v^{11}:

$$
\begin{cases}
\Theta_0'(r)u^{12}(r) - \dfrac{v_0(r)}{r}\Theta^{11}(r) + (\gamma-1)\,\Theta_0(r)\left[u^{12\prime}(r) + \dfrac{1}{r}u^{12}(r) - \dfrac{1}{r}v^{11}(r)\right] = 0\,, \\
\frac{v_0(r)}{r}u^{12}(r) - \frac{2v_0(r)}{r}v^{11}(r) + \frac{1}{\gamma-1}\Theta^{11\prime}(r) = -2\cos\psi w_{00}\,, \\
\left[v_0'(r) + \dfrac{v_0(r)}{r}\right]u^{12}(r) - \dfrac{v_0(r)}{r}v^{11}(r) - \dfrac{1}{r(\gamma-1)}\Theta^{11}(r) = 2\cos\psi w_{00}\,.
\end{cases}
\tag{14}
$$

Выразим из третьего уравнения системы (14) неизвестную $v^{11}(r)$:

$$
v^{11}(r) = \frac{r\,v_0'(r)}{v_0(r)}u^{12}(r) + u^{12}(r) - \frac{1}{v_0(r)(\gamma-1)}\Theta^{11}(r) - \frac{2r\cos\psi w_{00}}{v_0(r)} \tag{15}
$$

Подставим полученное выражение для v^{11} в уравнения 1 и 2 системы (14) и получим новую систему из двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_0'(r)u^{12}(r) - \frac{v_0(r)}{r}\Theta^{11}(r) + (\gamma-1)\,\Theta_0(r)\left[u^{12\prime}(r) - \frac{v_0'(r)}{v_0(r)}u^{12}(r) + \right. \\ \left. + \dfrac{\Theta^{11}(r)}{r\,(\gamma-1)\,v_0(r)} + \dfrac{2\cos\psi w_{00}}{v_0(r)}\right] = 0\,, \\ -2v_0'(r)u^{12}(r) - \dfrac{v_0(r)}{r}u^{12}(r) + \frac{2}{(\gamma-1)r}\Theta^{11}(r) + \frac{1}{(\gamma-1)}\Theta^{11\prime}(r) = -6\cos\psi w_{00} \end{array} \right. \tag{16}$$

для u^{12}, Θ^{11}. Из первого уравнения полученной системы выразим $\Theta^{11}(r)$:

$$\Theta^{11}(r) = -\frac{r\,v_0(r)\Theta_0'(r)}{\Theta_0(r) - v_0^2(r)}u^{12}(r) - \frac{r\,v_0(r)\,(\gamma-1)\,\Theta_0(r)}{\Theta_0(r) - v_0^2(r)}\left[u^{12\prime}(r) - \frac{v_0'(r)}{v_0(r)}u^{12}(r) + \frac{2\cos\psi w_{00}}{v_0(r)}\right].$$

Далее подставим во второе уравнение системы (16) полученную формулу для $\Theta^{11}(r)$ и получим одно уравнение второго порядка для u^{12}:

$$a_0(r)u^{12}(r) + a_1(r)u^{12\prime}(r) + a_2(r)u^{12\prime\prime}(r) = b(r) \tag{17}$$

где конкретный вид функций a_0, a_1,a_2,$b(r)$ не приводится в виду громоздкости.

Список литературы

[1] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.

[2] Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.