О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа *

П. Н. Давыдов
М.В. Плеханова
В. Е. Федоров
Челябинский государственный университет
e-mail: `davydov@csu.ru`

В работе показано существование и единственность на заданном отрезке классического решения задачи Коши и задачи Шоуолтера для некоторых полулинейных уравнений соболевского типа. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении начально-краевой задачи для системы уравнений фазового поля.

Введение. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M : \mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$, $N : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – нелинейный оператор. Рассмотрим задачу Коши

$$u(t_0) = u_0 \tag{1}$$

для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \quad t \in [t_0, T], \tag{2}$$

не разрешенного относительно производной. В рамках этой задачи исследуются целые классы начально-краевых задач для уравнений или систем уравнений в частных производных, возникающих при математическом моделировании в естественных и технических науках [1 – 3].

Существование локальных решений задачи (1) для различных классов уравнения (2), как правило, с оператором N, не зависящим от t, гладким в смысле Фреше по переменной u, посвящены многие работы Г. А. Свиридюка и его учеников (см., например, [1, 2, 4] и ссылки там же). В них в частности замечено, что в случае $\ker L \neq \{0\}$ задача (1), (2) разрешима лишь при начальных значениях u_0, взятых из некоторого многообразия в $\mathfrak{U}$, так называемого фазового пространства уравнения (2), и большое внимание уделено исследованию морфологии этого многообразия.

В данной работе говорить о фазовых пространствах сложно в силу нестационарности рассматриваемых уравнений. Нужно отметить, что в отличие от работ предшественников получены новые результаты о существовании и единственности нелокального классического решения уравнения (2), в котором ядро оператора L содержит векторы, имеющие цепочки M-присоединенных векторов. Ранее подобные результаты были получены одним из авторов в работах [5, 6], касающихся локальной разрешимости уравнения (2), и авторами в работе [7] о нелокальной разрешимости уравнения (2) в смысле сильных решений.

Методы исследования в данной работе представляют собой одновременное использование теории вырожденных полугрупп операторов [8 – 10] и результатов A. Pazy [11]

*Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96007-р_урал_а.

о разрешимости полулинейного уравнения

$$\dot{u}(t) = Su(t) + R(t, u(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

разрешенного относительно производной.

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для системы уравнений фазового поля.

1. Сильно (L,p)-радиальные операторы. Сформулируем некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего.

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{F}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$ обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1} f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$;

(iv) для любого $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Замечание 1. Эквивалентность этого, более простого определения сильной (L,p)-радиальности и того, которое было использовано в [8, 9], доказана в [12].

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) ядро $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$), а через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) – замыкание линеала $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\mathrm{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom}M_k = \mathfrak{U}^k \cap \mathrm{dom}M$ ($\mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 [8, 9]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *существует вырожденная сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{u} = Mu$;

(vi) *оператор* $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ *является инфинитезимальным генератором* C_0-*непрерывной полугруппы* $\{U_1^t = U^t\Big|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Замечание 2. Проектор вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{F}^0$ на $\mathfrak{F}^1$) имеет вид

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}). \tag{3}$$

Обозначим также $I - Q = Q_0$. При доказательстве утверждения (ii) используется тот важный для дальнейшего факт, что в условиях теоремы 1 выполняются равенства $QL = LP$, $QMu = MPu$ для $u \in \mathrm{dom}M$.

2. Существование и единственность нелокального решения.

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного уравнения с вырожденным оператором при производной

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \tag{4}$$

$$u(t_0) = u_0, \tag{5}$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – нелинейный оператор.

Определение 2. *Решением задачи* (4), (5) на отрезке $[t_0, T]$ назовем такую функцию $u \in C^1([t_0, T]; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую условию (5), что при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется $u(t) \in \mathrm{dom}M$ и справедливо равенство (4).

Теорема 3. *Пусть оператор* M *сильно* $(L, 0)$-*радиален, оператор* $QN : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}^1$ *непрерывно дифференцируем, для любых* $(t, u) \in [t_0, T] \times \mathfrak{U}$ *выполняется равенство* $N(t, u) = N(t, Pu)$, $u_0 \in \mathrm{dom}M$,

$$(I - P)u_0 = -M_0^{-1}(I - Q)N(t_0, Pu_0). \tag{6}$$

Тогда задача (4), (5) *имеет единственное решение* $u \in C^1([t_0, T]; \mathfrak{U})$.

Для уравнений вида (4) часто более естественной является не задача Коши, а задача с начальным условием

$$Pu(t_0) = u_0 \tag{7}$$

(см., например, [9, 13]), в которой в начальный момент времени задается значение не всего решения, а только его проекции на образ разрешающей полугруппы. Для разрешимости такой задачи условие согласования (6) не является необходимым.

Теорема 4. *Пусть оператор* M *сильно* $(L, 0)$-*радиален, оператор* $QN : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}^1$ *непрерывно дифференцируем, для любых* $(t, u) \in [t_0, T] \times \mathfrak{U}$ *выполняется равенство* $N(t, u) = N(t, Pu)$. *Тогда для любого* $u_0 \in \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^1$ *задача* (4), (7) *имеет единственное решение* $u \in C^1([t_0, T]; \mathfrak{U})$.

3. Пример. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda, \beta, \theta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\theta\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + (1 - \theta)u(x, t) = \theta\frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + (1 - \theta)v(x, t) = 0, \ (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \tag{9}$$

для системы уравнений

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t) + f(t, x, u), \quad (x, t) \in \Omega \times [t_0, T], \tag{10}$$

$$\Delta v(x,t) + \beta v(x,t) + u(x,t) + g(t,x,u) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0, T]. \tag{11}$$

Системы такого вида встречаются, например, при моделировании фазовых переходов первого рода в предположении, что время релаксации равно 0 [14, 15].

Положим при некотором $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$H_\theta^{m+2}(\Omega) = \left\{ w \in H^{m+2}(\Omega) : \left(\theta \frac{\partial}{\partial n} + (1-\theta)\right) w(x) = 0, \ x \in \partial\Omega \right\},$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{F} = (H^m(\Omega))^2, \quad \mathrm{dom} M = (H_\theta^{m+2}(\Omega))^2, \tag{12}$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ I & \beta I + \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}). \tag{13}$$

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\mathrm{dom} A = H_\theta^{m+2}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $H^m(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 6. *Пусть пространства и операторы заданы формулами* (12), (13), $-\beta \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* M *сильно* $(L,0)$*-радиален,*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -(\beta + A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \ Q = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} I & A(\beta + A)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{U}^0 = \{0\} \times H^m(\Omega)$, $\mathfrak{U}^1 = \{(u,v) \in (H^m(\Omega))^2 : v = -(\beta + A)^{-1} u\}$, $\mathfrak{F}^0 = \{(u,v) \in (H^m(\Omega))^2 : u = -A(\beta + A)^{-1} v\}$, $\mathfrak{F}^1 = H^m(\Omega) \times \{0\}$.

По размерности пространтва $s \in \mathbb{N}$ выберем минимальное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что $2m > s$. Тогда $H^m(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\overline{\Omega})$.

Теорема 8. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^5$, $f, g \in C^{1,3,4}([t_0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. *Тогда для любого* $u_0 \in H_\theta^5(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in C^1([t_0,T]; (H^3(\Omega))^2)$ *задачи* (8) — (11).

Список литературы

[1] Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором // ДАН. 1993. Т. 329, № 3. С. 274—277.

[2] Свиридюк Г. А., Казак В. О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 2. С. 292—297.

[3] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. М. : Физматлит, 2007.

[4] Свиридюк Г.А., Карамова А.Ф. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1476—1581.

[5] Fedorov V.E. Local solvability of a class of nonstationary semilinear Sobolev type equations // Nonlinear Evolution Equations and Mathematical Modeling. Kyoto, Japan: Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2008. P. 46—61.

[6] Федоров В.Е. Неквазистационарные траектории одного класса полулинейных уравнений соболевского типа // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Тр. Междунар. науч. конф. Уфа: Гилем, 2008. С. 111—115.

[7] Федоров В.Е., Давыдов П.Н. Глобальная разрешимость некоторых полулинейных уравнений соболевского типа // Вестник. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 12. 2010. № 23 (204). С. 80—87.

[8] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173—200.

[9] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston : VSP, 2003.

[10] Федоров В.Е. Обобщение теоремы Хилле – Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426—448.

[11] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1983.

[12] Федоров В.Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестник. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. 2009. № 20 (158). С. 12—19.

[13] *Свиридюк Г. А.* Об одной задаче Showalter // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 338—339.

[14] *Плотников П.И., Старовойтов В.Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461—471.