

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО И МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д.Ж. АХМЕД-ЗАКИ, Н.Т. ДАНАЕВ, С.Т. МУХАМБЕТЖАНОВ
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: darhan_a@mail.ru

The paper deals with the construction of a numerical algorithm for solving two problems of nonisothermal filtration, when the rate of phase obeys Darcy's law and given the kinetics of heat transfer. A general method for studying the thermal heterogeneous porous media.

Законы переноса тепла в пластах, как гетерогенных пористых структурах ограничены внутрипоровой диффузией массы или тепла, то есть протекают во внутридиффузионной области кинетики. Обычно полагая, что поскольку размеры пор реальных пластовых структур находятся в пределах нескольких долей микрона, то скорость таких обменов считают бесконечно быстрой для теплофизически однородных областей. При этом численные эксперименты показывают, что температурного фронта обычно отстает от фронта насыщенности и случай прогрева нефтяного пласта увеличивает лишь степень конечной нефтеотдачи. При расчетах это проявляется в виде возникновения дополнительного фронта вытеснения (области больших градиентов насыщенности), соответствующего тепловому фронту (области больших градиентов температуры), что соответствует результатам работ других авторов [1-3]. С другой стороны, известно, что в реальности встречаются случаи, когда структура и строение пор пласта однородно (пористость и проницаемость постоянны) или низкопроницаемая зона, но пласт состоит из различных пород с разными теплофизическими свойствами. Возникает вопрос о структуре движения жидкости в коллекторе и алгоритмах решения данных проблем. Ниже приведен один из подходов моделирования подобных процессов, когда задается кинетика теплообмена между подвижными фазами и скелетом пористой среды вместе со связанными с ним неподвижными жидкостями.

Основные законы сохранения механики сплошной среды можно записать в виде системы дивергентных уравнений [4]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F \cdot \vec{v} - G) = X \quad (1)$$

В частности, вид закона сохранения энергии для движения жидкости в пористой среде представлен, как $F = \rho U = \rho_{oil} \cdot s \cdot m \cdot U_{oil} + (1-s) \cdot \rho_{water} \cdot m \cdot U_{water} + (1-m) \cdot \rho_{pormedia} \cdot U_{pormedia}$, где ρ_i - плотности фаз и среды; $U = \{U_i\}$, $U_i = \alpha_i \theta + \beta_i$ - удельные внутренние энергии фаз и среды; $G = q$, где $q = -\lambda \nabla \theta$ - вектор потока; $X = P : D$ (двойная свертка тензора P с тензором D), где P - тензор напряжений, а D - тензор скоростей деформации. Оказывается, предельные значения указанных функций на поверхности Γ_γ (на поверхности сильного взрыва) не произвольные, а удовлетворяет системе уравнений на "сильном" разрыве

$$[F \cdot (v \cdot v - V_v) - G \cdot v] = 0, \quad (2)$$

где V_v - скорость перемещения сечения $\Gamma(t)$ – гиперповерхностью Γ_γ плоскостью ($t = const$) в направлении нормали ν к этому сечению.

Основными моментами являются приведение задач неравновесной фильтрации к задачам со свободными (неизвестными) границами типа Стефана [4] и Веригина [5, 6]. Последний факт оправдан тем, что, имея информации по скважинам восстановить границы рассматриваемой области. Известно, что граница или часть границы могут меняться либо из-за градиента температуры, либо из-за градиента давления. Рассмотрим задачу неравновесной фильтрации, т.е. задана конечная область Ω с кусочно - гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница Γ может разбиваться на несколько связных компонент Γ^i . Пусть $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $S_T^i = \Gamma^i \times [0, T]$, n – внешняя нормаль к границе Γ . Тогда соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -\frac{K_0 f_i}{\mu_i} \nabla p \quad (i = 1, 2), \quad mH \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(H \mathbf{u}_1) = 0, \\ -mH \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(H \mathbf{u}_2) &= 0, \quad s + s_1 = 1, \\ mH \frac{\partial}{\partial t} [c_1 s + (1-s)c_2] + H \frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(H c_1 \mathbf{u}_1) + \operatorname{div}(H c_2 \mathbf{u}_2) &= r, \\ H \frac{\partial((1-m)\rho_0 C_0 T_p)}{\partial t} + H \frac{\partial(m(\rho_1 C_1 s \tilde{c}_1 + \rho_2 C_2 s_1 \tilde{c}_2) T)}{\partial t} + \\ \operatorname{div}(H(\rho_1 C_1 v_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 C_2 v_2 \tilde{c}_2) \cdot T) + H(\rho_1 C_1 v_1 \varepsilon_1 + \rho_2 C_2 v_2 \varepsilon_2) \cdot \nabla(p) & \\ = \operatorname{div}(H(\bar{\lambda}(s, T, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \nabla T + \bar{\lambda}_0(T_p) \nabla T_p)) - 2\sqrt{\frac{\lambda_3 C_3}{\pi \cdot t}} \rho_3(T_p + t \frac{\partial T_p}{\partial t}) & \end{aligned} \quad (3)$$

с уравнениями кинетики тепло и массообмена в пористой среде:

$$\alpha_T \frac{\partial T_p}{\partial t} = \eta(T) - T_p, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (G(c) - a), \quad (4)$$

где функции $\eta(T) \equiv T$ и $G(c)$ определены в виде, полагая $c_1 = c$ и $c_2 = \varphi(c)$:

$$G(c) = \begin{cases} 1, & c > c^* \\ [0, 1], & c = c^* \\ 0, & c < c^* \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, требуется найти функций $\{s, p, V, c, a, T\}$ (водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрация активной примеси, функция адсорбции, температуры), определенные в Q_T , удовлетворяющие соотношениям (3)-(5), начальным и граничным условиям:

$$s|_{t=0} = s_0(x), \quad c|_{t=0} = c_0(x), \quad a|_{t=0} = a_0(x), \quad T|_{t=0} = T_0(x), \quad (6)$$

$$(P, S, \theta) = (P_0, S_0, \theta_0), \quad -D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \mathbf{v}_{1n} \cdot c = q_n \cdot c^*, \quad (x, t) \in \sum_1^1 = \Gamma^1 \times [0, \bar{t}], \quad (7)$$

где q_n – заданный расход на единицу площади, c^* - известное значение концентрации примеси. Нагнетание теплоносителей включает массо- и теплоперенос в двух различных областях, совмещенных переходом поверхностей раздела через движущийся фронт и сопровождаемых фазовыми изменениями. Последние две характерные черты описывают общий класс задач, известных как задачи типа Стефана и Веригина. В уравнении баланса тепла четвертое слагаемое включает эффект Джоуля-Томпсона, а последнее

слагаемое в левой части уравнения определяет теплообмен между нефтеносным коллектором и подошвой (кровлей) пласта. Полагая $\alpha_T \rightarrow 0$ получим:

$$H \frac{\partial \{(1-m)\rho_0 C_0 T + m(\rho_1 C_1 s \tilde{c}_1 + \rho_2 C_2 s_1 \tilde{c}_2)T\}}{\partial t} + \text{div}(H(\rho_1 C_1 v_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 C_2 v_2 \tilde{c}_2) \cdot T) + H(\rho_1 C_1 v_1 \varepsilon_1 + \rho_2 C_2 v_2 \varepsilon_2) \cdot \nabla(p) = \text{div}(H \bar{\lambda}(s, \theta, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \nabla T) - 2\sqrt{\frac{\lambda_3 C_3}{\pi \cdot t}} \rho_3 (T + t \frac{\partial T}{\partial t}) \quad (8)$$

Фактически, система (3) имеет более общий характер и позволяет описывать любые процессы повышения нефтеотдачи с двумя активными факторами. Предполагается, что полимер, находящийся в растворе, влияет на его вязкость, а сорбированный пористой средой изменяет проницаемость и от температуры зависит только вязкость нефти.

Для начала для моделирования процесса вытеснения нефти водой в анизотропном пласте построим разностные сетки, согласованные с проницаемостью пористой среды для управляющей метрики заданной в виде [7]:

$$g_s^{ij} = (1 - \alpha)(z_0(y)\delta_j^i + z_1(y)B^i B^j) + \alpha z_2(y)m(y), \quad (9)$$

$$K_0 = K_0(x, y) = B = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial \psi}{\partial y^1}\right), \quad (10)$$

где ψ определяется на стадии геофизических исследований пластов и получается интерполяцией данных из промысловых условий. Тогда уравнения для давления и насыщенности в криволинейных координатах выписываются как:

$$\frac{1}{H_1} \frac{1}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \overline{K_{x_1}} H \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \overline{K_{x_2}} H \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) \right] = 0, \quad (11)$$

$$m H \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{H_1} \frac{1}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} k_{oil\ x_1} H \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} k_{oil\ x_2} H \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) \right],$$

где H_1, H_2 отвечают за отображение физической криволинейной сетки на эталонную расчетную сетку с постоянными шагами. Для температуры и концентрации аналогично.

Используется применяемый обычно при решении задач двухфазной фильтрации алгоритм раздельного определения полей давления и насыщенности (концентрации и температуры). По известному распределению насыщенности, концентрации и температуры на n -ом временном слое определяется давление на этом же слое $p_{i,j}^n$, с использованием которого находятся $s_{i,j}^{n+1}, c_{i,j}^{n+1}, T_{i,j}^{n+1}$. Затем вычисления повторяются в той же последовательности. Для проверки точности результатов контролируется совпадение дебитов добывающей и нагнетательной скважин, совпадения изменения средней водонасыщенности с величиной отношения объема добытой нефти к объему элемента симметрии, сравниваются количество закаченного полимера и количество добытого и находящегося в пласте полимера.

Запишем разностный вид уравнения для давления из для шага сетки h_i

$$\frac{1}{H_{1\ i\ j}} \frac{1}{H_{2\ i\ j}} \times \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{H_{2\ i+1/2\ j}}{H_{1\ i+1/2\ j}} \overline{K_{0\ i+1/2\ j}} H_{i+1/2\ j} \frac{p_{i+1\ j}^{l+1} - p_{i\ j}^{l+1}}{h} - \frac{H_{2\ i-1/2\ j}}{H_{1\ i-1/2\ j}} \overline{K_{0\ i-1/2\ j}} H_{i-1/2\ j} \frac{p_{i\ j}^{l+1} - p_{i-1\ j}^{l+1}}{h} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h} \left[\frac{H_{1\ i\ j+1/2}}{H_{2\ i\ j+1/2}} \overline{K_{0\ i\ j+1/2}} H_{i\ j+1/2} \frac{p_{i\ j+1}^{l+1} - p_{i\ j}^{l+1}}{h} - \frac{H_{1\ i\ j-1/2}}{H_{2\ i\ j-1/2}} \overline{K_{0\ i\ j-1/2}} H_{i\ j-1/2} \frac{p_{i\ j}^{l+1} - p_{i\ j-1}^{l+1}}{h} \right] \right\} =$$

$$= \frac{q_{ск}}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{p_{i\ j}^{l+1} - p_{i\ j}^l}{\tau_{it}}, \quad q_{ск} = \frac{2\pi \overline{K_{0\ i\ j}} (p_{i\ j}^{l+1} - p_{ск})}{\ln(0.2 \Delta x_i / r_c)},$$

где коэффициенты при разностных аналогах производных рассчитываются на n временном слое, здесь l – индекс итерации, τ_{it} – параметр итерации [8]. Давление находится

методом переменных направлений до установления. Итерации заканчиваются при выполнении условия $|p_{ij}^{l+1} - p_{ij}^l| \leq \varepsilon$, $l = 0, 1, 2, \dots$, где значение давления просчитывается до $l = l^*$, для которого выполняется данное условие. При $q_{\text{ск}} = \frac{2\pi \overline{K_{0ij}}(p_{ij}^{l^*} - p_{\text{ск}})}{\ln(0.2\Delta x_i/r_c)}$ имеем:

$$m_0 H \frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\tau_t} = \frac{q_{\text{ск}} F_{ij}}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{1}{H_{1ij}} \frac{1}{H_{2ij}} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{H_{2i+1/2j}}{H_{1i+1/2j}} k_{oil\ i+1/2j} H \frac{p_{i+1j}^{l^*} - p_{ij}^{l^*}}{h} - \frac{H_{2i-1/2j}}{H_{1i-1/2j}} k_{oil\ i-1/2j} H \frac{p_{ij}^{l^*} - p_{i-1j}^{l^*}}{h} \right] + \frac{1}{h} \left[\frac{H_{1ij+1/2}}{H_{2ij+1/2}} k_{oil\ ij+1/2} H \frac{p_{ij+1}^{l^*} - p_{ij}^{l^*}}{h} - \frac{H_{1ij-1/2}}{H_{2ij-1/2}} k_{oil\ ij-1/2} H \frac{p_{ij}^{l^*} - p_{ij-1}^{l^*}}{h} \right] \right\}. \quad (12)$$

Для нахождения значений концентрации и температуры введем вспомогательные расчетные переменные $\gamma_{i,j}^{n+1}$ и $D_{i,j}^{n+1}$:

$$\gamma_{ij}^{n+1} = (c^{*n+1} + 2\beta\sqrt{t + \tau_t/H})T_{ij}^{n+1} + \frac{\beta\tau_t}{H\sqrt{t + \tau_t}}T_{ij}^{n+1},$$

$$D_{ij}^{n+1} = m(c_{ij}^{n+1}s_{ij}^{n+1} + \varphi(c_{ij}^{n+1})(1 - s_{ij}^{n+1})) + a_{ij}^{n+1}.$$

Для уравнения концентрации ПАВ:

$$\frac{a_{ij}^{n+1} - a_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{\tilde{\tau}} \cdot (G(c_{ij}^n) - a_{ij}^{n+1}),$$

$$m_0 H \frac{D_{ij}^{n+1} - D_{ij}^n}{\tau_t} + \frac{1}{H_{1ij}} \frac{(uH \cdot c)_{i+1/2j}^n - (uH \cdot c)_{i-1/2j}^n}{h} + \frac{1}{H_{2ij}} \frac{(vH \cdot c)_{ij+1/2}^n - (vH \cdot c)_{ij-1/2}^n}{h} + \frac{1}{H_{1ij}} \frac{(uH \cdot \varphi(c))_{i+1/2j}^n - (uH \cdot \varphi(c))_{i-1/2j}^n}{h} + \frac{1}{H_{2ij}} \frac{(vH \cdot \varphi(c))_{ij+1/2}^n - (vH \cdot \varphi(c))_{ij-1/2}^n}{h} = \frac{q_{\text{ск}}(F_c)_{ij}}{\Delta x_i \Delta y_j}. \quad (13)$$

Аналогично выпишется разностный аналог уравнения теплопереноса. Значение функций F , F_c и т.д. в (13) берутся вверх по потоку, из областей более высокого давления. После нахождения s_{ij}^{n+1} , D_{ij}^{n+1} , $\gamma_{i,j}^{n+1}$ определяются концентрация и температура на $(n+1)$ -ом временном слое, используя соотношения (4) или известные зависимости $a_{i,j}^{n+1} = a(c_{i,j}^{n+1})$ и $\eta_{i,j}^{n+1} = \eta(T_{i,j}^{n+1})$. Методом итераций (методом Ньютона) решаются уравнения

$$D_{ij}^{n+1} - m(c_{ij}^{n+1}s_{ij}^{n+1} + \varphi(c_{ij}^{n+1})(1 - s_{ij}^{n+1})) - a_{ij}^{n+1} = 0, \quad (14)$$

$$(c_{ij}^{n+1})^{q+1} = (c_{ij}^{n+1})^q + \frac{D_{ij}^{n+1} - m((c_{ij}^{n+1})^q s_{ij}^{n+1} + \varphi((c_{ij}^{n+1})^q)(1 - s_{ij}^{n+1})) - a((c_{ij}^{n+1})^q)}{m s_{ij}^{n+1} + \varphi'((c_{ij}^{n+1})^q)(1 - s_{ij}^{n+1}) - a'((c_{ij}^{n+1})^q)}.$$

Явные разностные схемы (12)-(14) условно устойчивы. Покажем условие устойчивости для D_{ij}^{n+1} , а остальные выписываются аналогично:

$$\Psi_c = \max_{i,j} \left\{ \frac{1}{H_{1ij} m_0 H} \cdot \frac{((uH \cdot c)_{i+1/2j}^n - (uH \cdot c)_{i-1/2j}^n)}{|D_{i,j} - D_{i,j\pm 1}|h}, \frac{1}{H_{2ij} m_0 H} \cdot \frac{((vH \cdot c)_{ij+1/2}^n - (vH \cdot c)_{ij-1/2}^n)}{|D_{i,j} - D_{i,j\pm 1}|h}, \frac{1}{H_{1ij} m_0 H} \cdot \frac{((uH \cdot \varphi(c))_{i+1/2j}^n - (uH \cdot \varphi(c))_{i-1/2j}^n)}{|D_{i,j} - D_{i,j\pm 1}|h}, \frac{1}{H_{2ij} m_0 H} \cdot \frac{((vH \cdot \varphi(c))_{ij+1/2}^n - (vH \cdot \varphi(c))_{ij-1/2}^n)}{|D_{i,j} - D_{i,j\pm 1}|h} \right\}$$

В этих обозначениях общее условие устойчивости имеет вид $Ku = \Psi \Delta t \leq 1$, где $\Psi \cong \{\Psi_s, \Psi_c, \Psi_T\}$. Таким образом, общий алгоритм нахождения параметров задачи воздействия на пласт для системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} p_{ij}^{k+1} &= p_{ij}^k + \tau_{it} L_h^p(s_{ij}^n, p_{ij}^{k+1}, v_{ij}^n, T_{ij}^n, c_{ij}^n), \\ T_{ij}^{n+1} &= T_{ij}^n + \tau_t L_h^T(T_{ij}^{n+1}, p_{ij}^{l^*}, v_{ij}^{n+1}, s_{ij}^n, c_{ij}^n), \\ c_{ij}^{n+1} &= c_{ij}^n + \tau_t L_h^c(T_{ij}^{n+1}, c_{ij}^{n+1}, p_{ij}^{l^*}, v_{ij}^{n+1}, s_{ij}^n), \\ s_{1ij}^{n+1} &= s_{1ij}^n + \tau_t L_h^s(s_{ij}^n, p_{ij}^{l^*}, v_{ij}^{n+1}, T_{ij}^{n+1}, c_{ij}^{n+1}), \quad s_{2ij}^{n+1} = 1 - s_{1ij}^{n+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

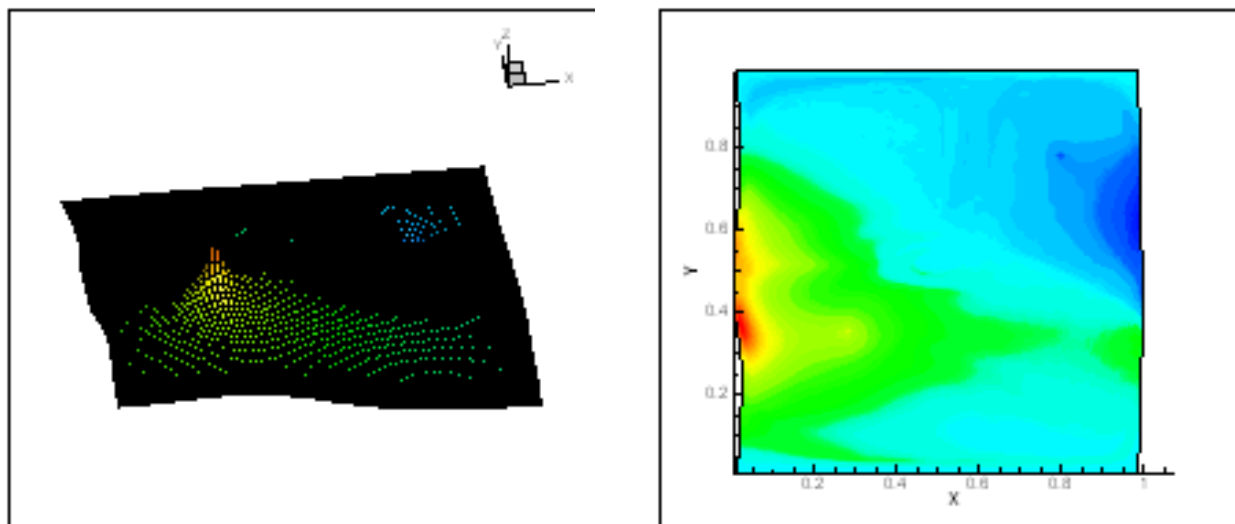


Рис. 1. График распределения давления и насыщенности

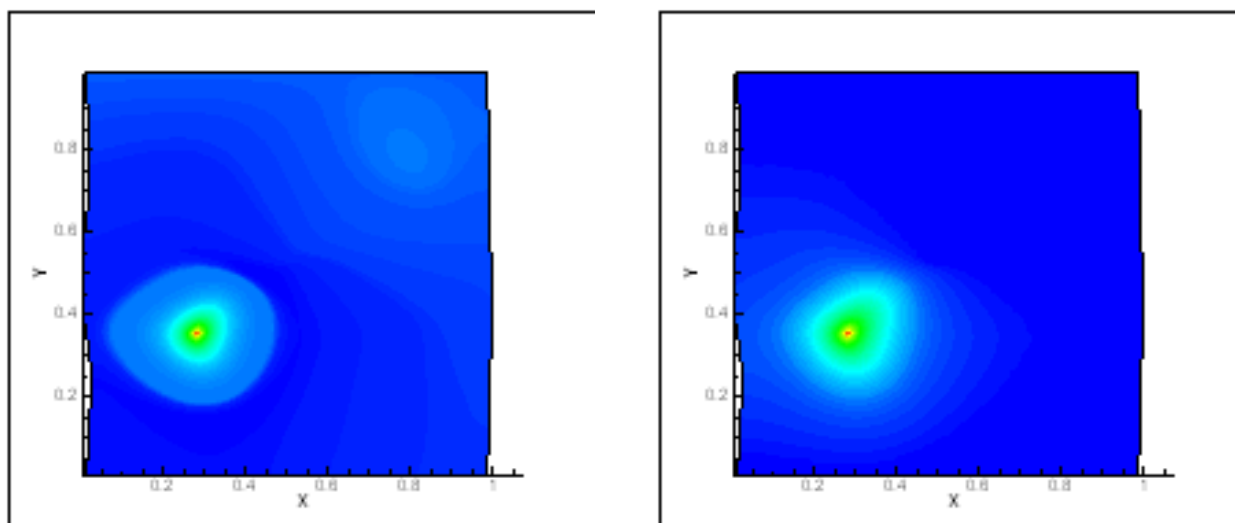


Рис. 2. График распределения концентрации и температуры

которая решается неявным итерационным методом. Устойчивость и соответственно сходимость разностной схемы проверялось путем сравнения с тестовыми данными решений при заданной суммарной скорости. Численный расчет производился в среде FORTRAN и общий анализ поведения решения при сгущении сетки показал выгоду использования неравномерной сетки для решения системы (15) с управляющей метрикой (9), которая обусловлена наиболее точным и адекватным соответствием полученных результатов с физикой рассматриваемых процессов. Результаты расчетов приведенные на рисунках 1 и 2. Результаты расчетов подтверждают известные факты, что слабо сорбирующаяся примесь затягивает безводный период эксплуатации и снижает обводненность продукции на начальной стадии разработки, а также повышает нефтеотдачу по сравнению с вытеснением чистой водой. Сильно сорбирующаяся примесь несколько замедляет рост обводненности продукции на промежуточной стадии и увеличивает полноту вытеснения нефти на заключительной стадии.

Выводы и рекомендации. Разработанные и исследованные в данном разделе но-

вые модели фильтрации в пористой анизотропной среде в двумерной постановке с учетом кинетик тепло и массообмена, показывает, что при исследовании процесса нагнетания в продуктивный пласт ПАВ необходимо учесть и тепловые эффекты, которые удобнее задавать через уравнения кинетики тепло и массообмена вида (4) характерных для двух различных областей, совмещенных переходом поверхностей раздела через движущийся фронт и сопровождаемых фазовыми изменениями, что определяет единый конструктивный подход решения общего класса задач типа Стефана и Веригина или Дарси-Стефана.

Список литературы

- [1] БОЧАРОВ О.Б., ТЕЛЕГИН И.Г. О некоторых особенностях неизотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей // Теплофизика и аэромеханика. – 2002. – Т. 9, № 3. – С. 459-466.
- [2] РУБИНШТЕЙН Л.И. О температурном поле пласта при нагнетании в пласт горячего теплоносителя // Труды Уфимского нефтяного института. – 1958. – № 2. – С. 149-173.
- [3] БАРЕНБЛАТТ Г.И., ЕНТОВ В.М., РЫЖИК В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкостей и газа. – Москва: Недра, 1972. – 288 с.
- [4] МЕЙРМАНОВ А.М. Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 239 с.
- [5] АНТОНЦЕВ С.Н., ДОМАНСКИЙ А.В., ПЕНЬКОВСКИЙ В.И. Фильтрация в прискважинной зоне пласта и проблемы интенсификации притока – Новосибирск: Наука, 1989. – 190 с.
- [6] ДАНАЕВ Н.Т., КОРСАКОВА Н.К., ПЕНЬКОВСКИЙ В.И. Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. – Алматы: Казах университеті, 2005. – 180 с.
- [7] LISEIKIN V.D. Grid generation methods. –Berlin: Springer, 1999.
- [8] МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. – Москва: Наука, 1977. – 456 с.