Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра*

Ю. М. Волчков
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
e-mail: volk@hydro.nsc.ru

Построены уравнения теории оболочек в ортогональной криволинейной системе координат с использованием аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра. Порядок полученной системы дифференциальных уравнений не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях оболочки напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Это позволяет с использованием условий сопряжения перемещений и напряжений на контактных поверхностях построить систему дифференциальных уравнений слоистых оболочек.

Введение. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера, либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение; а именно, сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций в пространстве $L_2[-1,1]$ именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек.

В данной работе на основе подходов, изложенных в работах [1, 2] построены дифференциальные уравнения упругих оболочек в первом приближении.

*Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 74

1. **Уравнения трехмерной задачи теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат.** Пусть $\omega = \{\alpha_1, \alpha_2, x_3 : \alpha_i \in [l_i^-, l_i^+],\ x_3 \in [-h/2, h/2],\ i = 1,2\}$ — область, занимаемая оболочкой; α_1, α_2 — ортогональная криволинейная система координат, отнесенная к линиям главных кривизн некоторой поверхности; x_3 — координата в направлении ортогональном к поверхности. Система уравнений трехмерной задачи теории упругости состоит из

уравнений равновесия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\hat\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{13}}{\partial x_3}+\hat\sigma_{21}A_{12}+\hat\sigma_{31}A_1^{'}-\hat\sigma_{22}A_{21}+q_1H_1H_2=0, (1\rightleftarrows 2)\\&\frac{\partial\hat\sigma_{31}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\hat\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\hat\sigma_{33}}{\partial x_3}-\hat\sigma_{11}A_1^{'}-\hat\sigma_{22}A_2^{'}+q_3H_1H_2=0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где

$$\hat\sigma_{11}=H_2\sigma_{11},\quad \hat\sigma_{12}=H_1\sigma_{12},\quad \hat\sigma_{13}=H_1H_2\sigma_{13},\quad \hat\sigma_{31}=H_2\sigma_{31},$$

$$H_1=A_1(1+\frac{x_3}{R_1}),\quad A_1^{'}=\frac{A_1}{R_1},\quad A_{12}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\quad (1\leftrightarrows 2),\quad \hat\sigma_{33}=H_1H_2\sigma_{33},$$

σ_{ij} — напряжения; q_i — объемные силы; A_1, A_2, R_1, R_2 — коэффициенты Ламе и радиусы главных кривизн поверхности $x_3 = 0$. Здесь и ниже запись $(1 \rightleftarrows 2)$ подразумевает наличие уравнений и соотношений, которые получаются из предыдущих заменой индекса 1 на 2, а индекса 2 на 1;

соотношений между деформациями и производными от компонент вектора перемещений

$$\begin{aligned}e_{11}&=\frac{1}{H_1}(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+u_2A_{12}+u_3A_1^{'}),\\2e_{12}&=\frac{1}{H_1}(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-u_1A_{12})+\frac{1}{H_2}(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-u_2A_{21}),\\2e_{31}=2e_{13}&=\frac{1}{H_1}(\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}-u_1A_1^{'})+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\quad(1\leftrightarrows 2),\quad e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3};\end{aligned}\tag{1.2}$$

соотношений закона Гука

$$\sigma_{ij}=a_{ijmn}e_{mn},\quad i,j=1,2,3.\tag{1.3}$$

В соотношениях (1.3) коэффициенты a_{ijmn} удовлетворяют условиям

$$a_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}-c\ \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\ge 0,\ a_{ijmn}=a_{jimn}=a_{ijnm},$$

где c — неотрицательная постоянная; по немым индексам проводится суммирование от 1 до 3. На границе области заданы краевые условия для напряжений и перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned}&[a_{im}^{\pm}u_i+(1-a_{im}^{\pm})\hat\sigma_{im}]_{\alpha_m=x_m^{\pm}}=\varphi_{im}^{\pm}\quad m=1,2,\\&[a_{i3}^{\pm}u_i+(1-a_{i3}^{\pm})\hat\sigma_{i3}]_{x_3=x_3^{\pm}}=\varphi_{i3}^{\pm},\qquad i=1,2,3,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где $a_{i3}^{\pm}$ — заданные кусочно-постоянные функции переменных α_1, α_2, равные нулю или единице; $\varphi_{i3}^{\pm}$ — заданные кусочно-непрерывные функции переменных $\alpha_1, \alpha_2,$; $a_{im}^{\pm}$ — постоянные, равные нулю или единице.

Задача трехмерной теории упругости состоит в нахождении функций σ_{ij} и u_i, удовлетворяющим уравнениям (1.1)-(1.4). В работе [2] изложена процедура построения двумерных уравнений (уравнений теории оболочек) на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра. Здесь для краткости мы ограничимся изложением этого подхода к построению двумерных уравнений в первом приближении.

2. **Сведение трехмерной задачи к двумерной. Первое приближение.** При построении уравнений теории оболочек в первом приближении мы будем требовать выполнения следующих условий.

1. Уравнения равновесия бесконечно малого элемента (1.1)заменяются уравнениями равновесия элемента, размеры которого бесконечно малы в направлениях 1 и 2 и имеет конечный размер, равный h, в направлении 3. Это означает, что напряжения должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\int\limits_{-1}^{1}(\tfrac{\partial\hat{\sigma}_{1i}}{\partial\alpha_i}+\tfrac{\partial\hat{\sigma}_{13}}{\partial x_3}+\hat{\sigma}_{21}A_{12}+\hat{\sigma}_{31}A_1^{'}-\hat{\sigma}_{22}A_{21}+q_1H_1H_2)P_k d\zeta=0(1\leftrightarrows 2), k=0,1 \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}(\tfrac{\partial\hat{\sigma}_{3i}}{\partial\alpha_i}+\tfrac{\partial\hat{\sigma}_{33}}{\partial x_3}-\hat{\sigma}_{11}A_1^{'}-\hat{\sigma}_{22}A_2^{'}+q_3H_1H_2)d\zeta=0, \tag{2.2}$$

где $P_k(\zeta)$ — полиномы Лежандра; $\zeta=(2/h)(x_3-(x_3^{+}+x_3^{-})/2)$.

2. В силу принципа Сен-Венана краевые условия на торцевых поверхностях оболочки можно разделить на две группы: краевые условия, которые влияют на решение во всей области изменения переменных α_i (основные краевые условия) и условия, которые влияют на решение только вблизи торцов оболочки. При построении уравнений упругого криволинейного слоя в первом приближении мы требуем, чтобы краевая задача теории оболочек была разрешима при любых основных краевых условиях и чтобы порядок системы дифференциальных уравнений не зависел от вида условий на лицевых поверхностях оболочки, что позволяет корректно решать контактные задачи.

3. Также мы требуем, чтобы решение двумерной задачи удовлетворяло энергетическому тождеству — аналогу энергетического тождества в трехмерной задаче. Выполнение этого требование обеспечивает единственность решения некоторого класса контактных задач.

Можно показать, что перечисленные выше условия будут выполнены, если принять следующие аппроксимации для напряжений и перемещений.

В уравнениях (2.1) напряжения аппроксимируются следующими полиномами

$$\hat{\sigma}_{11}^{'} = \sum_{k=0}^{k=1} \hat{\sigma}_{11}^{k} P_k,\ \hat{\sigma}_{12}^{'} = \sum_{k=0}^{k=1} \hat{\sigma}_{12}^{k} P_k,\ \hat{\sigma}_{13}^{'} = \sum_{k=0}^{k=2} \hat{\sigma}_{13}^{k} P_k,\ \hat{\sigma}_{31}^{'} = \sum_{k=0}^{k=1} \hat{\sigma}_{31}^{k} P_k, \tag{2.3}$$

а уравнениях (2.2) — полиномами

$$\hat{\sigma}_{33}^{''} = \sum_{k=0}^{k=1} \hat{\sigma}_{33}^{k} P_k, \quad \hat{\sigma}_{31}^{''} = \sum_{k=0}^{k=0} \hat{\sigma}_{31}^{k} P_k, \quad \hat{\sigma}_{11}^{''} = \sum_{k=0}^{k=0} \hat{\sigma}_{11}^{k} P_k \quad (1 \leftrightarrows 2), \tag{2.4}$$

$\hat{\sigma}_{ij}^{k}(\alpha_1, \alpha_2)$ — коэффициенты в разложениях по полиномам Лежандра функций $\sigma_{ij}^{k}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$.

Соотношения (1.2) аппроксимируются следующим образом:

$$e_{11} = (\frac{\partial u'_1}{\partial \alpha_1} + u_2^{'} A_{12} + u_3^{'} A_1^{'})/H_1, \tag{2.5}$$

$$2e_{12} = (\frac{\partial u_2^{'}}{\partial \alpha_1} - u_1^{'} A_{12})/H_1 + (\frac{\partial u_1^{'}}{\partial \alpha_2} - u_2^{'} A_{21})/H_2, \tag{2.6}$$

$$2e_{31} = 2e_{13} = (\frac{\partial u_3^{'}}{\partial \alpha_1} - u_1^{'} A_1^{'})/H_1 + \frac{\partial u_1^{''}}{\partial x_3}\ (1 \leftrightarrows 2), \quad e_{33} = \frac{\partial u_3^{''}}{\partial x_3}, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= \sum_{k=0}^{k=1} u_1^{k} P_k, \quad u_1^{''} = \sum_{k=0}^{k=3} u_1^{k} P_k, \quad (1 \leftrightarrows 2), \\ u_3^{'} &= \sum_{k=0}^{k=0} u_3^{k} P_k, \quad u_3^{''} = \sum_{k=0}^{k=1} u_3^{k} P_k, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$u_i^{k}(\alpha_1, \alpha_2)$ — коэффициенты в разложениях по полиномам Лежандра функций $u_i^{k}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$.

Краевые условия (1.4) в соответствии с требованием 2 заменяются условиями

$$\begin{gathered} \Big[a_{\gamma m}^{\pm} u_{\gamma}^{'} + (1 - a_{\gamma m}^{\pm}) \hat{\sigma}_{\gamma m}^{'}\Big]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}_{\gamma m}^{\pm},\ \Big[a_{3m}^{\pm} u_3^{'} + (1 - a_{3m}^{\pm}) \hat{\sigma}_{3m}^{''}\Big]_{x_m = x_m^{\pm}} = \hat{\varphi}_{3m}^{\pm}, \\ \Big[a_{i3}^{\pm} u_i^{''} + (1 - a_{i3}^{\pm}) \hat{\sigma}_{i3}^{'}\Big]_{x_3 = x_3^{\pm}} = \varphi_{i3}^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{2.9}$$

Полагаем, что и двумерной задаче напряжения и деформации связаны соотношениями (1.3).

Уравнения (2.1) - (2.9) и (1.3) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка относительно коэффициентов полиномов $\hat{\sigma}_{11}^{'}, \hat{\sigma}_{12}^{'}, \hat{\sigma}_{13}^{'}, \hat{\sigma}_{31}^{'}, u_1^{'}, u_2^{'}$. Порядок этой системы, в отличие от классических уравнений, не зависит от вида условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки.

Решение построенной системы уравнений удовлетворяет энергетическому тождеству

$$\int\limits_{\omega} \sigma_{ij} e_{ij} H_1 H_2 d\omega = \int\limits_{\omega} \left(\hat{\sigma}_{11}(\frac{\partial u_1^{'}}{\partial x_1} + A_{12} u_2^{'} + A_1^{'} u'_3) + \hat{\sigma}_{22}(\frac{\partial u_2^{'}}{\partial x_2} + A_{21} u_1^{'} + A_2^{'} u'_3) + \right.$$

$$+\hat{\sigma}_{12}(\frac{\partial u_1^{'}}{\partial x_2} - A_{21} u_2^{'}) + \hat{\sigma}_{21}(\frac{\partial u_2^{'}}{\partial x_1} - A_{12} u_1^{'}) + \hat{\sigma}_{13} \frac{\partial u_1^{''}}{\partial x_3} + \hat{\sigma}_{31}(\frac{\partial u_3^{'}}{\partial x_1} - A_1^{'} u_1^{'}) +$$

$$\left. +\hat{\sigma}_{23} \frac{\partial u_2^{''}}{\partial x_3} + \hat{\sigma}_{32}(\frac{\partial u_3^{'}}{\partial x_2} - A_2^{'} u_2^{'}) + \hat{\sigma}_{33} \frac{\partial u_3^{''}}{\partial x_3} \right) d\omega.$$

Аналогично можно построить уравнения оболочек в более высоком приближении [2].

3. **Приложения.** С использованием приведенных выше разложений напряжений и перемещений можно построить моментный конечный элемент, для которого условия сопряжения формулируются в виде условий непрерывности усилий и моментов на его гранях. В задачах с сингулярными особенностями в напряженных состояниях такие элементы оказываются эффективнее традиционных конечных элементов [3]. Эти элементы не имеют сингулярных точек, поскольку содержат только величины, осредненные по граням, и являются естественными регуляризаторами в задачах с особенностями в напряжениях.

В случае одномерной задачи указанная выше система — система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Для однородного упругого тела можно выписать аналитические решения этой системы для различных видов условий на лицевых поверхностях слоя и построить решения ряда контактных задач [4].

Алгоритм построения уравнений теории оболочек не изменится, если коэффициенты a_{ijkl} в соотношениях (1.3) будут являться функциями переменных α_1, α_2, x_3. Поэтому предложенный подход может быть использован для построения уравнений неоднородных анизотропных оболочек [5], а также в случае нелинейных определяющих соотношений.

Если оболочка состоит из нескольких слоев с различными свойствами материала, то для каждого слоя можно записать уравнения, приведенные в п. 2. К полученной системе уравнений необходимо добавить условия сопряжения для напряжений и смещений на поверхностях, разделяющих эти слои, которые формулируются в терминах коэффициентов отрезков полиномов Лежандра для напряжений и смещений. Возможность постановки условий сопряжения обеспечивается независимостью порядка системы дифференциальных уравнений от вида краевых условий на лицевых поверхностях оболочки.

Список литературы

[1] Иванов Г.В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980.

[2] Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра // ПМТФ. 2007. Т.48, № 3. С. 179-190.

[3] Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.В. Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т.35, № 6. С. 129-135.

[4] Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т.49, № 5. С. 169-176.

[5] Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Уравнения упругого анизотропного слоя // ПМТФ. 2004. Т.45, № 2. С. 188-198.