ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ СИЛЫ ПЛАВУЧЕСТИ *

И.В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: stepiv@icm.krasn.ru

Построены подмодели уравнений термодиффузионной конвекции, инвариантные относительно преобразований переменных, порожденных дифференциальными операторами, допускаемыми той или иной подмоделью в зависимости от функции, определяющей силу плавучести. Для некоторых подмоделей построены точные решения, описывающие стационарные или автомодельные режимы течения бинарной смеси под действием силы плавучести с учетом эффекта Соре.

Конвективные течения играют важную роль в задачах теплоэнергетики, металлургии, в метеорологических явлениях и в настоящее время стали важным объектом исследования теоретической, вычислительной и прикладной гидродинамики. Несмотря на интерес к этим течениям не только с точки зрения возможных технологических приложений, но и как к фундаментальной физической проблеме, до сих пор нет общих методов исследования нелинейных уравнений конвекции [1].

Термодиффузией или эффектом Соре называется разделение смеси на компоненты под действием градиента температуры. Процессы конвекции и термодиффузии тесно связаны между собой и, как правило, исследуются совместно. Уравнения термодиффузионной конвекции достаточно сложны, поскольку необходимо учитывать градиенты плотности, которые могут вызываться нагревом смеси, разностью концентраций или изменением давления. Тем самым, нужно принимать во внимание уравнение состояния жидкости. Таким образом, конвекция бинарной смеси жидкостей с учетом эффекта термодиффузии описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + F(p,T,C)\,\mathbf{g}\\
&T_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \chi\nabla^2 T,\\
&C_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = D\nabla^2 C + D_T\nabla^2 T,\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — вектор координат, $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости, p — давление, T — малое отклонение температуры от среднего значения, C — малое отклонение концентрации легкой компоненты от среднего значения, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор массовых сил, ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, D — коэффициент диффузии, D_T — коэффициент термодиффузии, $F(p,T,C)$ — положительная

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00283, интеграционного проекта СО РАН №65.

функция, определяющая силу плавучести. Заметим, что при $D_T < 0$ термодиффузию называют нормальной, в этом случае тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие компоненты в более нагретые, при $D_T > 0$ наблюдается аномальная термодиффузия, при которой направление движения компонентов меняется на противоположное.

При анализе систем нелинейных уравнений в частных производных, таких, как система (1), необходимо применять достаточно мощные математические методы. Одним из них является теоретико-групповой анализ, позволяющий изучить инвариантные свойства дифференциальных уравнений в зависимости от произвольных параметров, входящих в систему[2]. Дифференциальные уравнения часто содержат произвольные функции или параметры, которые не строго фиксированы и часто определяются из эксперимента. В групповом анализе для определения произвольных параметров решается задача групповой классификации, которая помимо аналитических представлений произвольных функций помогает также найти группы преобразований переменных, входящих в систему. Знание групп преобразований позволяет строить инвариантные подмодели, интегрировать которые иногда бывает проще, чем исходную систему. В работах [3,4] была решена задача групповой классификации для системы (1) относительно функции F. Используя результат групповой классификации, можно строить решения исходной системы, инвариантные относительно найденных преобразований. Из всего множества решений можно выделить классы автомодельных (инвариантных относительно растяжений переменных) и стационарных (инвариантных относительно переносов по времени) решений. В работе построено и проанализировано несколько подмоделей, описывающих автомодельные и стационарные режимы течения. Некоторым из решений дана физическая интерпретация.

Список литературы

[1] Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. Свободноконвективне течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[3] Родионов А.А., Степанова И.В. Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести // Вычислительные технологии, 2008. Т.13, №5. С. 61-69.

[4] Андреев В.К., Степанова И.В. Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации // Вычислительные технологии, 2010. Т.15, №4. С. 47-55.