АЛГОРИТМ НА НЕОДНОРОДНЫХ СХЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ[1]

Е.А.Новиков[1], А.Е.Новиков[2]
[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН*
[2]*Сибирский федеральный университет*
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

An L-stable (2,1)-method and an explicit two-stage Runge-Kutta type scheme are constructed, both schemes of order two. A numerical formula of order one is developed that is based on the stages of the explicit method and its stability interval is extended to 8. An integration algorithm of variable order and step is constructed that is based on the stages of the three schemes. The most effective numerical scheme is chosen for each step by means of stability control inequality.

Введение

Во многих приложениях возникает проблема численного решения жестких задач высокой размерности. В некоторых случаях расчеты требуется проводить с так называемой инженерной точностью – порядка 1%. Это связано с тем, что измерение констант, входящих в правую часть системы дифференциальных уравнений, часто проводится достаточно грубо. Иногда такая точность расчетов является удовлетворительной с точки зрения поставленной цели. Порядок аппроксимации численной схемы следует сочетать с точностью расчетов [1].

Современные методы решения жестких задач используют обращение матрицы Якоби системы уравнений. При большой размерности эффективность численных методов фактически полностью определяется временем декомпозиции этой матрицы. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, то есть применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования. Некоторым аналогом замораживания является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и *L*-устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы [2]. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, явным методом. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [3]. Следует отметить, что применение таких комбинированных алгоритмов полностью не снимает проблему замораживания матрицы Якоби, потому что явным методом можно просчитать, вообще говоря, только погранслойное решение, соответствующее максимальному собственному числу матрицы Якоби.

Здесь на основе явных методов типа Рунге-Кутты первого и второго порядков, а также *L*-устойчивого (2,1)-метода второго порядка точности построен алгоритм переменной структуры, в котором допускается замораживание как численной, так и аналитической матрицы Якоби.

1. Методы типа Розенброка

Далее будет рассматриваться задача Коши для автономной системы вида

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \qquad (1)$$

где y и f – вещественные N-мерные векторные функции, t – независимая переменная. Неавтономную систему введением дополнительной переменной $y'_{N+1}=1$, $y_{N+1}(t_0)=y_0$ можно привести к автономному виду. Поэтому рассмотрение (1) не снижает общности.

При решении жестких задач широкое распространение получили методы типа Розенброка [4] благодаря простоте реализации и достаточно хорошим свойствам точности и устойчивости. Применительно к задаче (1) они имеют вид

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 11-01-00106)

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i,\ \ D_n k_i = hf(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j),\ \ D_n = E - ahf'_n, \tag{2}$$

где h – шаг интегрирования, E – единичная матрица, $f'_n = \partial f(y_n)/\partial y$ – матрица Якоби векторной функции $f(y)$, a, p_i и β_{ij} – числовые коэффициенты. В настоящее время методы типа Розенброка трактуются более широко [5]. Численные формулы (2) можно получить из класса полуявных методов типа Рунге-Кутта, если в них при вычислении каждой стадии ограничиться одной итерацией метода Ньютона. Однако в методах Розенброка при вычислении стадий необходимо решать только линейные системы алгебраических уравнений, в то время как в неявных или полуявных методах Рунге-Кутта требуется использовать итерационный процесс типа ньютоновского, что приводит к дополнительным проблемам при их реализации. Однако в схемах (2) возникают большие трудности с аппроксимацией матрицы Якоби.

2. Класс (m,k)-методов

В [6] предложен класс (m,k)-методов, в которых нахождение стадий не связывается с обязательным вычислением правой части системы дифференциальных уравнений. Реализация (m,k)-методов так же проста, как и методов Розенброка, однако (m,k)-схемы имеют лучшие свойства точности и устойчивости. В рамках (m,k)-методов проще решается проблемы замораживания матрицы Якоби и ее численной аппроксимации. Класс (m,k)-методов вводится следующим образом. Пусть заданы целые положительные числа m и k, $k \le m$. Обозначим через M_m множество целых чисел i, $1 \le i \le m$, а через M_k и J_i подмножества из M_m вида

$$\begin{gathered} M_k = \{m_i \in M_m \mid 1 = m_1 < \cdots < m_k \le m\}, \\ J_i = \{m_{j-1} \in M_m \mid j > 1,\ m_j \in M_k,\ m_j \le i\},\ 2 \le i \le m. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда (m,k)-методы можно представить в виде

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i,\ \ D_n = E - ahf'_n, \\ D_n k_i = hf(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j,\ i \in M_k, \\ D_n k_i = k_{i-1} + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j,\ i \in M_m \setminus M_k. \end{gathered} \tag{4}$$

Множество J_i, $2 \le i \le m$, служит для устранения "лишних" коэффициентов α_{ij}, за счет которых нельзя повлиять на свойства точности и устойчивости (4) и которые линейно выражаются через другие коэффициенты. В традиционных одношаговых методах для описания вычислительных затрат на шаг интегрирования достаточно одной константы m – числа стадий, потому что в данных методах каждая стадия сопровождается обязательным вычислением правой части задачи (1). В методах (4) есть два сорта стадий – для некоторых требуется вычисление правой части, а для других не требуется. В результате в (4) для описания вычислительных затрат на шаг требуются две постоянные m и k. Затраты на шаг следующие – один раз вычисляется матрица Якоби и осуществляется декомпозиция матрицы D_n, k раз вычисляется функция f и m раз выполняется обратный ход в методе Гаусса. В случае $k=m$ и $\alpha_{ij}=0$ численные схемы (4) совпадают с методами типа Розенброка (2). В остальных случаях это другие методы, обладающие лучшими свойствами по сравнению с (2).

3. Теоремы о максимальном порядке

Для (m,k)-методов справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. При $k=1$ и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше второго порядка точности.

Теорема 2. При $k=2$, любом выборе множеств (3) и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше четвертого порядка точности.

Теорема 3. При $k=3$, любом выборе множеств (3) и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше пятого порядка точности.

Пусть при реализации (4) применяется матрица вида $D_n=E\text{-}ahA_n$, где A_n – некоторая матрица, представимая в виде $A_n=f_n'+hB_n+O(h^2)$, $f'_n=\partial f(y_n)/\partial y$ – матрица Якоби системы (1), B_n – не зависящая от шага интегрирования произвольная матрица. Тогда (4) можно применять с замораживанием как аналитической, так и численной матрицы Якоби, и верны следующие теоремы.

Теорема 4. При k=1 и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше второго порядка точности.

Теорема 5. При k=2, любом выборе множеств (3) и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше третьего порядка точности.

Теорема 6. При k=3, любом выборе множеств (3) и любом значении m нельзя построить L-устойчивый метод (4) выше четвертого порядка точности.

4. L-устойчивый (2,1)-метод

Для решения задачи (1) рассмотрим (2,1)-схему вида

$$y_{n+1}=y_n+p_1k_1+p_2k_2,\ D_nk_1=hf(y_n),\ D_nk_2=k_1, \tag{5}$$

при реализации которой применяется матрица $D_n=E\text{-}ahA_n$. В случае использования матрицы Якоби f'_{n-k}, вычисленную k шагов назад, имеем $B_n=-kf_n''f_n$, $f_n''f_n=\partial^2 f(y_n)/\partial y^2$. Если матрица Якоби вычисляется численно с шагом $r_j=c_jh$, то элементы $b_{n,ij}$ матрицы B_n имеют вид $b_{n,ij}=0.5c_j\partial^2 f_i(y_n)/\partial y_j^2$, $1\le i,j\le N$. Тогда (2,1)-метод (5) можно применять с замораживанием как аналитической, так и численной матрицы Якоби. В расчетах шаг численного дифференцирования r_j выбирается по формуле $r_j=\max(r_{\min}, [r_{\min}]^{0.5}|y_j|)$. При расчетах с двойной точностью шаг численного дифференцирования $r_{\min}$ следует положить равным 10^{-14}.

Получим коэффициенты L-устойчивой численной схемы (5) второго порядка и неравенство для контроля точности вычислений. Разложение точного решения $y(t_{n+1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_n до членов с h^3 имеет вид

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+hf+\frac{1}{2}h^2f'f+\frac{h^3}{6}(f'^2f+f''f^2)+O(h^4), \tag{6}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Для нахождения коэффициентов a, p_1 и p_2 схемы (5) запишем разложения стадий k_1 и k_2 в ряды Тейлора в окрестности точки y_n до членов с h^3 включительно и подставим в (5). Получим

$$\begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+(p_1+p_2)hf_n+a(p_1+2p_2)h^2f_n'f_n+\\ &+a^2(p_1+3p_2)h^3f_n'^2f_n+a(p_1+2p_2)h^3B_nf_n+O(h^4), \end{aligned} \tag{7}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n. Полагая $y_n=y(t_n)$ и сравнивая (6) и (7) до членов с h^2 включительно, получим

$$p_1+p_2=1,\ ap_1+2ap_2=0.5\,. \tag{8}$$

Исследуем устойчивость численной формулы (5). Применяя ее для решения задачи $y'=\lambda y$, $y(t_0)=y_0$, получим $y_{n+1}=Q(x)y_n$, $x=h\lambda$, где функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x)=[1+(p_1+p_2-2a)x+a(a-p_1)x^2]/(1-ax)^2.$$

Тогда схема (2) будет L-устойчивой, если $p_1=a$. Подставляя это соотношение в (8), получим набор коэффициентов $p_1=a$ и $p_1=1-a$, где a определяется из условия L-устойчивости

$$a^2-2a+0.5=0. \tag{9}$$

Сравнивая (6) и (7) до членов с h^3 включительно получим, что локальная ошибка δ_n численной схемы (5) имеет вид $\delta_n=h^3[(a-1/3)f'^2f+(h^3/6)f''f^{\,2}+0.5B_nf+O(h^4)$. Уравнение (9) имеет два корня $a_1=1-0.5\surd2$ и $a_2=1+0.5\surd2$. Выберем $a=a_1$, так как в этом случае меньше коэффициент в главном члене $(a-1/3)\,h^3f'^{\,2}f$ локальной ошибки.

Рассмотрим одновременно численную формулу типа Розенброка с двумя вычислениями функции f на каждом шаге

$$y_{n+1}=y_n+p_1k_1+p_2k_2, D_nk_1=hf(y_n), D_nk_2=hf(y_n+\beta k_1). \tag{10}$$

При $\beta=a$ набор коэффициентов $p_1=a$ и $p_1=1-a$ обеспечивает второй порядок точности (10), а условие (9) – ее L-устойчивость. Численная формула (10) с данными коэффициентами является одной из наиболее удачных среди методов типа Розенброка с двумя вычислениями правой части задачи (1) на шаге интегрирования. Ее локальная ошибка δ_n^{roz} имеет вид

$$\delta_n^{ros} = h^3[(a-\frac{1}{3})f'^2 f + (\frac{1}{6}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}a)f''f^2 - aB_n f] + O(h^4).$$

Схемы (5) и (10) обладают вторым порядком точности и L-устойчивостью, а их локальные ошибки различаются незначительно. В тоже время (5) требует на каждом шаге на одно вычисление функции f меньше при прочих равных затратах, что делает ее предпочтительнее.

Контроль точности вычислений численной схемы (5) построим по аналогии [3]. Для этого введем обозначение

$$v(j_n) = D_n^{1-j_n}(k_2 - k_1).$$

где k_1 и k_2 вычисляются по формулам (5). Тогда согласно [3] для контроля точности вычислений на каждом шаге нужно проверять неравенство

$$\| v(j_n) \| \le \varepsilon,\ 1 \le j_n \le 2,$$

где ε – требуемая точность расчетов, $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N, а целочисленная переменная j_n выбирается наименьшей, при которой выполняется данное неравенство.

Оценку максимального собственного числа $w_{n,0}=h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную формулу, оценим через ее норму $w_{n,0}=h\|\partial f/\partial y\|$. Ниже данная оценка будет применяться для автоматического выбора численной схемы.

5. Метод типа Рунге-Кутта второго порядка

Теперь для решения задачи (1) рассмотрим явный метод типа Рунге-Кутта [7]

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2,\ k_1 = hf(y_n),\ k_2 = hf(y_n + \beta k_1). \tag{11}$$

Получим соотношения на коэффициенты метода (11) второго порядка точности. Для этого разложим стадии k_1 и k_2 в ряды Тейлора по степеням h до членов с h^3 включительно и подставим в первую формулу (11). В результате получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1+p_2)hf_n + \beta p_2 h^2 f'_n f_n + 0.5\beta^2 p_2 h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n. Сравнивая данное выражение с (6) до членов с h^2 включительно при условии $y_n=y(t_n)$, запишем условия второго порядка точности схемы (11), которые имеют вид $p_1+p_2=1$ и $\beta p_1=0.5$.

Построим неравенство для контроля точности вычислений. Для этого рассмотрим вспомогательную схему $y_{n+1,1}=y_n+k_1$ первого порядка точности. С помощью идеи вложенных методов оценку ошибки $\varepsilon_{n,2}$ метода второго порядка можно вычислить по формуле [3] $\varepsilon_{n,2}=y_{n+1}-y_{n+1,1}=p_2(k_2-k_1)$. Для повышения надежности данной оценки выберем $\beta=1$. Тогда стадия k_1 вычисляется в точке t_n, а k_2 – в точке t_{n+1}. Как показывают расчеты, использование информации в крайних точках шага приводит к более надежным вычислениям. При $\beta=1$ коэффициенты метода второго порядка определяются однозначно $p_1=p_2=0.5$, а локальная ошибка и неравенство для контроля точности имеют, соответственно, вид

$$\delta_n = (h^3/12)(2f'^2 f - f''f] + O(h^4),\ 0.5\|k_2 - k_1\| \le \varepsilon.$$

Теперь построим неравенство для контроля устойчивости (11) предложенным в [7] способом. Для этого рассмотрим вспомогательную стадию $k_3=hf(y_{n+1})$. Заметим, что k_3 совпадает со стадией k_1, которая применяется на следующем шаге интегрирования, и поэтому ее использование не приводит к дополнительным вычислениям правой части системы (1). Запишем стадии k_1, k_2 и k_3 применительно к задаче $y'=Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим $k_1=Xy_n$, $k_2=(X+X^2)y_n$ и $k_3=(X+X^2+0.5X^3)y_n$, где $X=hA$. Легко видеть, что $(k_2-k_1)=X^2 y_n$ и $2(k_3-k_2)=X^3 y_n$. Тогда согласно [3] оценку максимального собственного числа $w_{n,2}=h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$w_{n,2} = 2\max_{1\le i\le N} |k_3^i - k_2^i| / |k_2^i - k_1^i|.$$

Интервал устойчивости схемы (11) второго порядка точности приблизительно равен двум. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,2}\le 2$. В случае применения данного неравенства для выбора шага следует учитывать грубость оценки, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} будем вычислять следующим образом. Новый шаг h^{ac} по точности определим по формуле $h^{ac}=qh_n$, где h_n есть последний успешный шаг интегрирования, а q, учитывая соотношение $k_2–k_1=O(h_n^2)$, задается уравнением $q^2\|k_2–k_1\|=\varepsilon$. Шаг h^{st} по устойчивости зададим формулой $h^{st}=dh_n$, где d, учитывая соотношение $w_{n,2}=O(h_n)$, определяется из равенства $dw_{n,2}=2$. Тогда прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})]. \tag{12}$$

Заметим, что формула (12) применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n. В результате для выбора шага и предлагается формула (12). Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.

6. Метод типа Рунге-Кутты первого порядка точности

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему вида

$$y_{n+1} = y_n + r_1k_1 + r_2k_2,\ k_1 = hf(y_n),\ k_2 = hf(y_n + k_1). \tag{13}$$

Заметим, что при $r_1=r_2=0.5$ численная формула (13) имеет второй порядок точности и совпадает с (11) с коэффициентами $p_1=p_2=0.5$. Построим менее точную схему с максимальным интервалом устойчивости. Для этого применим (13) для решения скалярной тестовой задачи $y'=\lambda y$, $y(t_0)=y_0$. Получим $y_{n+1}=Q(x)y_n$, где функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид $Q(x)=1+(r_1+r_2)x+r_2x^2$, $x=h\lambda$. Требование первого порядка точности приводит к соотношению $r_1+r_2=1$, которое ниже будем считать выполненным. Теперь выберем r_2 таким образом, чтобы метод (13) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева $T_2(z)=2z^2–1$ на промежутке $[–1,1]$. Проведем замену переменных, полагая $z=1–2x/\gamma$. Получим $T_2(x)=1–8x/\gamma+8x^2/\gamma^2$, при этом отрезок $[\gamma,0]$ отображается на $[–1,1]$. Нетрудно показать, что среди всех многочленов вида $P_2(x)=1+x+c_2x^2$ для $T_2(x)$ неравенство $|T_2(x)|\le 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma,0]$, $\gamma=–8$. Потребуем совпадения коэффициентов $Q(x)$ и $T_2(x)$ при $\gamma=–8$. Это приводит к соотношениям $r_1+r_2=1$ и $r_2=1/8$. В результате имеем коэффициенты $r_1=7/8$ и $r_2=1/8$ метода первого порядка с максимальным интервалом устойчивости, локальная ошибка δ_n которого имеет вид $\delta_n=0.375h^2f'f+O(h^3)$. Для контроля точности численной формулы первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки. Учитывая, что $k_2–k_1=f_n'f_n+O(h^3)$ и вид локальной ошибки, неравенство для контроля точности записывается в виде $\|k_2–k_1\|\le 8\varepsilon/3$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N, ε – требуемая точность расчетов.

Построим неравенство для контроля устойчивости метода первого порядка. Для этого снова рассмотрим вспомогательную стадию $k_3=hf(y_{n+1})$. Запишем k_1, k_2 и k_3 применительно к задаче $y'=Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим $k_1=Xy_n$, $k_2=(X+X^2)y_n$, $k_3=(X+X^2+0.125X^3)y_n$, где $X=hA$. Легко видеть, что $k_2–k_1=X^2y_n$, $8(k_3–k_2)=X^3y_n$. Тогда согласно [3] оценку максимального собственного числа $w_{n,1}=h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле $w_{n,1}=8\max_{1\le i\le N}|k^i_3–k^i_2|/|k^i_2–k^i_1|$. Интервал устойчивости численной схемы (13) равен восьми. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,1}\le 8$.

7. Алгоритм интегрирования с автоматическим выбором численной схемы

На основе построенных явных методов первого и второго порядков точности легко сформулировать алгоритм переменного порядка и шага. Расчеты всегда начинаются методом второго порядка как более точным. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства $w_{n,2} \leq 2$. Обратный переход на метод второго порядка происходит в случае выполнения неравенства $w_{n,1} \leq 2$. При расчетах по методу первого порядка наряду с точностью контролируется устойчивость, а выбор прогнозируемого шага производится по аналогии с методом второго порядка по формуле типа (12).

При использовании схемы (5) формулировка алгоритма интегрирования также не вызывает трудностей. Нарушение неравенства $w_{n,1} \leq 8$ вызывает переход на схему (5). Передача управления явным методам происходит в случае выполнения неравенства $w_{n,0} \leq 8$. Численную формулу (5) без потери порядка точности можно применять с замораживанием матрицы D_n. Отметим, что при замораживании матрицы Якоби шаг интегрирования остается постоянным.

Попытка замораживания матрицы D_n осуществляется после каждого успешного шага. Размораживание матрицы происходит в следующих случаях: 1) нарушение точности расчетов, 2) если число шагов с замороженной матрицей достигло заданного максимального числа iqh, 3) если прогнозируемый шаг больше последнего успешного в qh раз. Числами iqh и qh можно влиять на перераспределение вычислительных затрат. При iqh=0 и qh=0 замораживания не происходит, при увеличении iqh и qh число вычислений правой части возрастает, а количество обращений матрицы Якоби убывает.

Норма в левой части неравенств для контроля точности вычисляется по формуле $\| k_2 - k_1 \| = \max_{1 \leq i \leq N} | k^i_2 - k^i_1 | / (|y^i_n| + r)|$, где i – номер компоненты, r – положительный параметр. Если по i-й компоненте решения выполняется неравенство $|y^i_n| < r$, то контролируется абсолютная ошибка $r\varepsilon$, в противном случае – относительная ошибка ε.

Список литературы

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
2. Новиков А.Е., Новиков Е.А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью. Математическое моделирование. Т.22. №1. 2010. С.46–56.
3. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. 1997.
4. Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations. Computer, Vol.5. 1963. P.329–330.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1988.
6. Новиков Е.А., Шитов Ю.А., Шокин Ю.И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем. ДАН СССР. Т.301. №6. 1988. С.1310–1314.
7. Кнауб Л.В., Лаевский Ю.М., Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага на основе явного двухстадийного метода Рунге-Кутты. СибЖВМ. Т.10. №2. 2007. С.177–185.