

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ ПРЯЖИ С УЧЕТОМ УПРУГО И УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКОН

Б.Мардонов, Ж.К.Гафуров

Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности, Ташкент

e-mail: batsam@list.ru

В докладе рассмотрен случай, когда зависимость напряжения от деформации в одной части волокнистой массы подчиняется закону Гука, а второй части она определяется согласно нелинейной зависимости между напряжением и деформации, в частности по схеме Прандтля. При этом получено выражение, представляющее закон Гука, осложненный влиянием нелинейно деформирующихся волокон при наличии начальных напряжений. Установлено, что если законы деформирования отдельных элементов будут представлены диаграммой Гука либо нелинейной диаграммой (в частности, схемой Прандтля), то зависимость для модели среднестатистического напряжения в целом изобразится уже некоторой кривой, зависящей от вида функции распределения. Эта функция должна обладать следующими свойствами: она должна иметь максимум при некотором значении своего аргумента, соответствующем переходу большинства волокон в нелинейное состояние; при нулевом значении аргумента она не должна обращаться в нуль, поскольку физически внутреннее трение будет существовать даже при малых значениях напряжения; при больших значениях аргумента она должна быть близка к нулю, поскольку в продукте нет волокна с бесконечным пределом текучести. В качестве такой функции выбран нормальный закон распределения и рассмотрен случай, когда напряжения в волокнах не достигают предела текучести. Расчетами установлено, что при малых значениях дисперсии зависимость между средним напряжением деформации имеет нелинейный характер и с ростом дисперсии эта зависимость становится линейной. Таким образом, нелинейные свойства пряжи проявляются при малых разбросах нелинейных свойств волокон.

Как показывают экспериментальные данные, механические свойства пряжи существенно зависят от деформации отдельных волокон и характера реализации контактных сил взаимодействия между волокнами при кручении продукта. Если рассматривать пряжу, состоящую из одинаковых растянутых волокон и расположенных по винтовым линиям с постоянным шагом, то в зависимости от величины угла закручивания и величины коэффициента трения между волокнами, в сечении продукта возникает радиальное напряжение, определяемое по формулам [1]:

$$\sigma = \sigma_f \cos^2 \beta \frac{(1 - \frac{\rho^2}{R^2}) \sin^2 \beta}{2 \left[\left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \right]} \quad (1)$$

где β - угол закручивания, σ_f - напряжение при растяжении волокон, ρ – расстояние до исследуемого волокна в сечении от оси продукта, R – радиус продукта. В формуле (1) напряжение σ_f принимается одинаковым для всех волокон, при этом механическое свойство каждого волокна определяется модулем упругости E_f . Теперь допустим, что продукт состоит из множества волокон с одинаковой относительной деформацией, но разными усилиями вследствие перехода их в пластическое состояние по схеме Прандтля. Таким образом, будем различать волокна, для которых выполняется закон Гука:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

где E_f – модуль упругости волокна, ε_f – относительное удлинение волокна) и такие волокна, для которых зависимость между напряжением и деформации подчиняется закону:

$$\sigma_f = (E_f - E_{1f})\varepsilon_s + E_{1f}\varepsilon_f$$

где ε_s - предельная деформация при достижении зоны пластического деформирования, E_{1f} - модуль упрочнения. Для аналитического описания процесса деформирования системы с неограниченно большим количеством волокон, применим статистический метод. Благодаря различию закона деформирования для разных волокон, напряжения по сечению продукта, если рассматривать их на очень малых площадках, будут распределены крайне неравномерно. Эта неравномерность не может быть учтена методами теории упругости и не может быть обнаружены экспериментальными методами. Среднее статистическое значение напряжения вычисляется с помощью интеграла

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \sigma_f p(\alpha) d\alpha \quad (2)$$

где $p(\alpha)$ - функция распределения, $\bar{\sigma}$ - напряжение в волокнах, определяемое экспериментально или методами теории упругости. Из формулы (2) видно, что среднее статистическое значение напряжения зависит от распределения напряжения по волокнам. Рассмотрим случай, когда зависимость напряжения от деформации в одной части волокнистой массы подчиняется закону Гука, а второй части она определяется согласно схеме Прандтля [2]

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f \quad \text{при } 0 < \varepsilon_f < \alpha \quad \sigma_f = (E_f - E_{1f})\alpha + E_{1f}\varepsilon_f \quad \text{при } \varepsilon_f \geq \alpha \quad (3)$$

При этом параметр α определяется через начальные напряжения σ_n и предела пропорциональности $\sigma_s = E_f \varepsilon_s$ по формуле $\alpha = (\sigma_s - \sigma_n) / E_f$. Таким образом, здесь напряжение σ_s носит случайный характер, вследствие чего параметр α имеет статистическую значимость.

Тогда выражение (2) записывается в виде

$$\bar{\sigma} = \int_{\varepsilon_f}^{\infty} E_f \varepsilon_f p(\alpha) d\alpha + \int_0^{\varepsilon_f} [(E_f - E_{1f})\alpha + E_{1f}\varepsilon_f] p(\alpha) d\alpha$$

Учитывая равенства $\int_0^{\infty} p(\alpha) d\alpha = 1$, приведем последнее выражение к виду

$$\bar{\sigma} = E_f \varepsilon_f - (E_f - E_{1f}) \int_0^{\varepsilon_f} (\varepsilon_f - \alpha) p(\alpha) d\alpha \quad (4)$$

Выражение (4) представляет закон Гука, осложненный влиянием пластически деформирующихся волокон при наличии начальных напряжений. Если зависимости $\sigma(\varepsilon_f)$ отдельных элементов представляются диаграммой Гука либо диаграммой Прандтля, то зависимость для модели среднестатистического напряжения $\bar{\sigma}(\varepsilon_f)$ в целом изобразится уже некоторой кривой. Конкретный вид правой части выражения (4) зависит от вида функции $p(\alpha)$. Рассмотрим два вида функции распределения.

1. Равномерный закон распределения:

$$p = 0 \quad \text{при } \alpha < 0, \quad p = 1/\alpha_0 \quad \text{при } 0 < \alpha < \alpha_0 \quad \text{и } p = 0 \quad \text{при } \alpha > \alpha_0 \quad (5)$$

Выражение (4) с учетом (5) приводится к виду

$$\bar{\sigma} = E_f \varepsilon_f - (E_f - E_{1f}) \frac{\varepsilon_f^2}{2\alpha_0} \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon_f \leq \alpha_0,$$

$$\bar{\sigma} = E_{1f}(\varepsilon_f - \alpha_0) + \frac{E_{1f} + E_f}{2} \alpha_0 \quad \text{при } \varepsilon_f \geq \alpha_0.$$

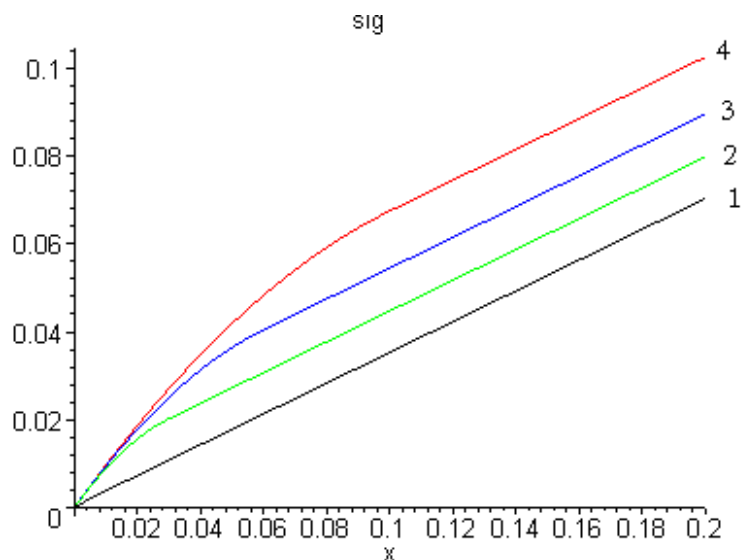


Рис.1. Зависимости отношения $sig = \bar{\sigma} / E_f$ от деформации $x = \varepsilon_f$ при $E_{1f} / E_f = 0.35$ и различных значениях параметра α_0 : 1 - $\alpha_0 = 0.001$, 2 - $\alpha_0 = 0.03$, 3 - $\alpha_0 = 0.06$, 4 - $\alpha_0 = 0.1$.

Графические зависимости среднего напряжения от деформации для отношения $E_{1f} / E_f = 0.35$ и различных значений параметра α_0 показаны на рис.1. Видно, что нелинейность в законах деформирования пряжи начинает проявляться при больших значениях параметра α_0 .

2. Нормальный закон распределения, согласно которому полагаем

$$p(\alpha, a, D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{(\alpha - a)^2}{2D^2}\right) \text{ при,}$$

где a и D - математическое ожидание и дисперсия. Формула (4) с учетом принятого закона распределения принимает вид

$$\bar{\sigma} = E_f \varepsilon_f - (E_f - E_{1f}) \left\{ \varepsilon_f [\Psi(\varepsilon_f, a, D) + \Psi(\varepsilon_f, -a, D)] - \Phi(\varepsilon_f, a, D) - \Phi(\varepsilon_f, -a, D) \right\}$$

где

$$\Psi(x, a, D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_0^x \exp[-(\alpha + a)/2D^2] d\alpha, \quad \Phi(x, a, D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_0^x \alpha \exp[-(\alpha + a)/2D^2] d\alpha$$

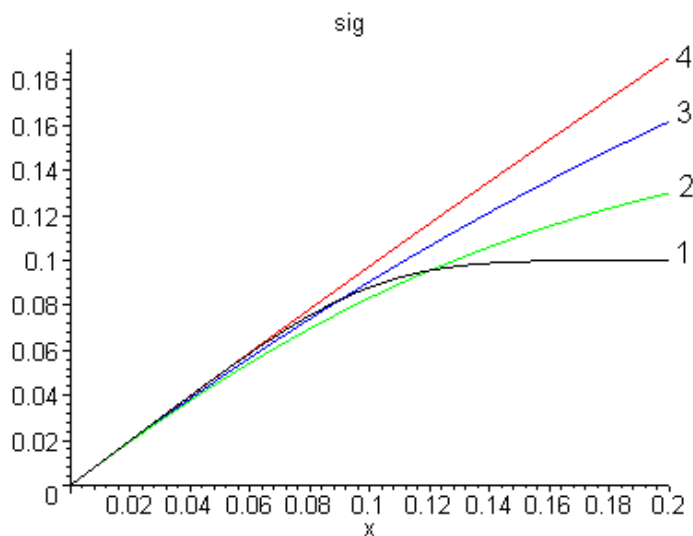


Рис.2. Зависимости отношения $sig = \bar{\sigma} / E_f$ от деформации $x = \varepsilon_f$ при $a = 0.1$ и различных значениях дисперсии D : 1 - $D = 0.03$, 2 - $D = 0.1$, 3 - $D = 0.2$, 4 - $D = 0.8$

На рис.2 показаны зависимости $sig = \frac{\bar{\sigma}}{E_f}$ от деформации $x = \varepsilon_f$ при $a = 0.1$ и различных значениях дисперсии D . Видно, что при малых значениях дисперсии зависимость $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_f)$ имеет нелинейный характер и с ростом дисперсии эта зависимость становится линейной. Таким образом, нелинейные свойства пряжи проявляются при малых разбросах пластических свойств волокон.

На рис.3 показаны аналогичные зависимости при $D = 0.1$ и различных значениях математического ожидания a . Видно, что проявление нелинейности пряжи здесь также связано с низкими значениями математического ожидания.

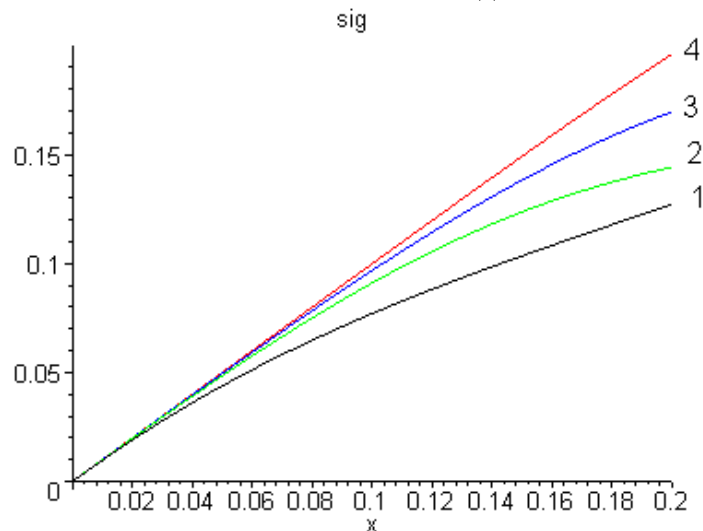


Рис.3. Зависимости отношения $sig = \bar{\sigma} / E_f$ от деформации $x = \varepsilon_f$ при $D = 0.1$ и различных значениях математического ожидания a : 1 – $a = 0.03$, 2 – $a = 0.1$, 3 – $a = 0.2$, 4 – $a = 0.8$

Сравнивая результатов, полученных для двух видов функции распределения, заметим, что их числовые характеристики по разному влияют на закон деформирования пряжи.

Литература

- [1] Чистобородов Г.И., Аврелькин В.А., Роньжин В.И. Определение максимального угла кручения продукта // Известия ВУЗов, Технология текстильной промышленности – Москва, 2002, №2 С. 40-42.
- [2] Ишлинский А.Ю. Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел. Прикладные задачи механики, Москва: Наука, 1986. 167-176 с.