Об оптимальном управлении деформации конструкции из двутавровых балок

Наталья Александровна Манакова
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: manakova@hotbox.ru

Андрей Геннадьевич Дыльков
Магнитогорский государственный университет
e-mail: dylkov@yandex.ru

Найдены необходимые и достаточные условия существования оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с (L,p)-ограниченным оператором. Данные результаты проиллюстрированы на модели Хоффа на графе.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, – конечный связный ориентированный граф, причем каждое его ребро E_i имеет длину $l_i \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейные уравнения в частных производных

$$\lambda x_{jt} + x_{jtss} = \alpha x_j + u_j,\ \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

которые моделируют динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок [1].

Нас интересуют решения уравнения (1) удовлетворяющие следующим условиям:

$$x_j(0,t) = x_k(0,t) = x_m(l_m,t) = x_n(l_n,t), \tag{2}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i)$, $E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i)$ ($E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине V_i), а также

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j x_{js}(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k x_{ks}(l_k,t) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{\mu_k\in\sigma^L_{ex}(M)} \langle (x_j(0)-x_{j0}),\varphi_k\rangle\,\varphi_k = 0,\ \sum_{\mu_k\in\sigma^L_{in}(M)} \langle (x_j(\tau)-x_{j\tau}),\varphi_k\rangle\,\varphi_k = 0, \tag{4}$$

где семейство функций $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{X}$, которое будет определено далее.

Наш подход заключается в редукции задачи (1) – (4) к начально-конечной задаче

$$P_{ex}(x(0)-x_0) = 0, \quad P_{in}(x(\tau)-x_\tau) = 0, \tag{5}$$

для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Bu. \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, а функция $u : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}\,(\tau < \infty)$. Пусть оператор M (L,p)-ограничен (см. [2]) и L-спектр $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, $\sigma^L_{in}(M) \cap \sigma^L_{ex}(M) = \emptyset$. Операторы $P_{in} = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu$, $P_{ex} = P - P_{in}$, $P = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu$ – проекторы (см. [3]); контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L_{in}(M)$; контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$; $R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M.

Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.*

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании такой пары $(x, u_0) \in \mathfrak{X} \times H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$, где x является решением задачи (5), (6), а для u_0 выполняется соотношение

$$J(u_0) = \min_{u \in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})} J(u), \tag{7}$$

где $J(u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества.

Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши впервые изучалось в [2, гл. 7]. В работе [4] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа. Оптимальное управление для полулинейных уравнений соболевского типа рассматривалось в работе [5].

Определение 1. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения* $L\dot{x} = Mx + Bu$ если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения $L\dot{x} = Mx + Bu$ назовем *сильным решением начально-конечной задачи,* если оно удовлетворяет (5).

Теорема 1. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ существует единственное сильное решение задачи (5) для уравнения $L\dot{x} = Mx + Bu$.

Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cx(t)$.

Определение 2. Вектор-функцию $u_0 \in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (5), (6), если выполнено (7).

Построим функционал

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|z^{(q)} - z_0^{(q)}\|^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{8}$$

где $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ – желаемое наблюдение.

Построим пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Пусть $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 y(t) = -\sum_{q=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1} \tfrac{d^q}{dt^q} y^0(t), \quad k_1(t) = X^t_{ex}x_0, \quad A_2 y(t) = \int_0^t Z^{t-s}_{ex} y^{ex}(s)ds,$$
$$k_2(t) = X^{t-\tau}_{in}x_\tau, \quad A_3 y(t) = \int_t^\tau Z^{t-s}_{in} y^{in}(s)ds,$$

где

$$X^t_{ex} = (2\pi i)^{-1}\left(\int_\Gamma - \int_\gamma\right) R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad Z^t_{ex} = (2\pi i)^{-1}\left(\int_\Gamma - \int_\gamma\right)(\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu,$$
$$X^t_{in} = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad Z^t_{in} = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu.$$

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда*

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$*;*

(ii) при любом $x_0 \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_1 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$*;*

(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$*;*

(iv) при любом $x_\tau \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_2 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$*;*

(v) $A_3 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}); H^1(\mathfrak{X}))$.

Теорема 2. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (5), (6).

Доказательство.

По теореме 1 при любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $u \in H^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (5), (6), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + k_1(t) + k_2(t), \tag{9}$$

где операторы A_1, A_2 и вектор-функции k_1, k_2 заданы в лемме 1.

Зафиксируем $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и рассмотрим (9) как отображение $D: u \to x(u)$. Тогда отображение $D: H^{p+1}(\mathfrak{U}) \to H^1(\mathfrak{X})$, определенно непрерывно.

Перепишем функционал стоимости (8) в виде

$$J(u) = \|Cx(t,u) - z_0\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + [v,u],$$

где $v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t),\ q = 0, \ldots, p+1$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \|z_0 - Cx(t,0)\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})},$$

где

$$\pi(u,u) = \|C(x(t,u)) - x(t,0)\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + [v,u] \quad -$$

билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$, а

$$\lambda(u) = \langle z_0 - Cx(t,0), C(x(t,u) - x(t,0))\rangle_{H^1(\mathfrak{Z})} \quad -$$

линейная непрерывная на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ форма. Значит, условия теоремы [6, гл. 1] выполнены и теорема доказана.

Вернемся теперь к изначально поставленной задаче (1)–(4). Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

и банахово пространство $\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_j, ...) : x_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено (2)$\}$ с нормой

$$\|x\|^2_{\mathfrak{X}} = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (x^2_{js} + x^2_j) ds.$$

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ сопряженное к $\mathfrak{X}$ относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство и формулой

$$\langle Ax, v\rangle = -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} x_{js}v_{js}ds, \quad x, v \in \mathfrak{X}$$

зададим оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Его спектр $\sigma(A)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. Занумеруем собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора A по невозрастанию с учетом кратности. Тогда ортонормированное (в смысле $\mathfrak{Y}$) семейство соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$ оператора A образует базис пространства $\mathfrak{X}$ в силу плотного и непрерывного вложения $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{X}$.

Формулой $N : x \to (x_{1ss}, x_{2ss}, \ldots, x_{jss}, \ldots)$, зададим оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$.

Выберем $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $L = \lambda + N$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а его спектр $\sigma(L) = \{\lambda + \lambda_k\}$. Оператор M зададим формулой $M = \alpha\mathbb{I}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, задача (1)–(4) сведена к задаче (5), (6).

Теорема 3. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $x \in C([0,T];\mathfrak{X}) \cap C^1((0,T);\mathfrak{X})$ задачи (2) – (4) для уравнения (1).

Введем в рассмотрение пространство

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u = (u_1, u_2, ...u_j, ...) : u_j^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;(W_2^1(0,l_j))^*), p \in \{0\}\cup\mathbb{N}\}.$$

Построим операторы

$$\left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle = \sum_{E_j\in E^\alpha(V_i)} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{jkq}(u_{jk}^{(q)})^2(t),$$

где $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k$, φ_k – ортонормированные в смысле $L_2(\mathbf{G})$ функции, ν_{jkq} – положительные числа.

Справедлива

Теорема 4. При любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное решение задачи (1)–(4), (7).

Список литературы

[1] Свиридюк Г.А., Баязитова А.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе // Вестник Самарского гос. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2009. № 1(18), С. 6–17).

[2] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[3] Загребина С.А., Соловьева Н.П. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе // Обозрение приклад. и пром. математики. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 329–330.

[4] Келлер А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа // Обозрение приклад. и пром. математики. 2009. Т. 16, вып. 2. С. 345–346.

[5] Манакова Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 9. С. 1185–1192.

[6] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.