

# О численном моделировании вертикального турбулентного обмена в устойчиво стратифицированном водоеме \*

О. Ф. ВАСИЛЬЕВ

*Институт водных и экологических проблем СО РАН,*  
e-mail:vasiliev@ad-sbras.nsc.ru

Т. Э. ОВЧИННИКОВА

*Институт водных и экологических проблем СО РАН,*  
e-mail:teonew@iwep.nsc.ru

О. Ф. ВОРОПАЕВА

*Институт вычислительных технологий СО РАН,*  
e-mail:voropaeva@ict.nsc.ru

Г. Г. ЧЕРНЫХ

*Институт вычислительных технологий СО РАН,*  
e-mail:chernykh@ict.nsc.ru

Построена иерархия численных моделей второго порядка вертикального турбулентного обмена в стратифицированном водоеме. Выполнено численное моделирование заглужения перемешанного слоя в линейно стратифицированной жидкости под действием ветровой нагрузки. Осуществлено сопоставление с известными экспериментальными данными. Показано, что использование усовершенствованных представлений дисперсии флуктуаций вертикальной компоненты скорости позволяет дать более детальное описание процесса заглужения перемешанного слоя. При этом использование дифференциального уравнения переноса этой величины лучше отражает анизотропию турбулентного обмена.

## 1. Математические модели

При исследовании гидрофизических процессов в устойчиво стратифицированном водоеме используются упрощения, в результате которых осредненное движение описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \langle u' w' \rangle, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \langle S' w' \rangle. \quad (2)$$

Здесь  $U$  – горизонтальная компонента осредненной скорости движения;  $S$  – осредненная соленость; штрихами обозначены пульсационные составляющие;  $\nu$  и  $\chi$  – коэффициенты молекулярной вязкости и диффузии;  $z$  – вертикальная координата;  $t$  – время. Система уравнений (1)–(2) незамкнута. Зависимость плотности жидкости  $\rho$  от солености задается соотношением  $\rho(S) = \rho_0 + \alpha S$ .

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-05-01149, а также междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 23.

Для замыкания системы рассмотрены следующие варианты моделей.

**Базовая модель:** используются уравнения переноса кинетической энергии турбулентности  $e$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  [1]–[4]:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_e \frac{\partial e}{\partial z} \right) + P + G - \varepsilon, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{e} [c_1 (P + G) - c_2 \varepsilon]. \quad (4)$$

Здесь  $P = -\langle u'w' \rangle \partial U / \partial z$ ,  $G = -\frac{g}{\rho_0} \langle w'\rho' \rangle$ ,  $c_1 = 1.44$ ,  $c_2 = 2[1 - 0.3 \exp(-Re_t^2)]$ ,  $Re_t = e^2 / \nu \varepsilon$ ,  $K_e = \nu + \alpha_e \nu_t$ ,  $K_\varepsilon = \nu + \alpha_\varepsilon \nu_t$ ,  $\nu_t = c_\mu e^2 / \varepsilon$ . Значения эмпирических констант  $\alpha_e$ ,  $\alpha_\varepsilon$ ,  $c_\mu$  приведены в конце данного раздела.

Для корреляционных моментов  $\langle u'w' \rangle$  и  $\langle w'\rho' \rangle$  используются упрощенные градиентные выражения:  $-\langle u'w' \rangle = \nu_t \partial U / \partial z$ ,  $-\langle \rho'w' \rangle = c_\rho \nu_t \partial \langle \rho \rangle / \partial z$ ,  $\langle \rho'w' \rangle = \alpha \langle s'w' \rangle$ ,  $c_\rho \approx 0.8$ .

**Модель 2:** к уравнениям (1)–(4) добавляются алгебраические уравнения для корреляционных моментов  $\langle w'^2 \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$  и  $\langle w'\rho' \rangle$ , являющиеся следствием усечения соответствующих дифференциальных уравнений переноса [3]:

$$\langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3}e + \frac{e}{C_{1\varepsilon}} \left[ (1 - C_3) \left( G_{33} - \frac{2}{3}G \right) - (1 - C_2) \frac{2}{3}P \right], \quad (5)$$

$$-\langle w'\rho' \rangle = \frac{e \langle w'^2 \rangle}{C_{1T\varepsilon} \left( 1 - 2 \frac{1 - C_{2T}}{C_{1T}C_T} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \equiv K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}, \quad (6)$$

$$-\langle u'w' \rangle = (1 - C_2) \frac{e \langle w'^2 \rangle - \frac{1 - C_{2T}}{C_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \langle w'\rho' \rangle}{C_{1\varepsilon} \left( 1 - \frac{1 - C_2}{C_1 C_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial U}{\partial z} \equiv K_{uz} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (7)$$

где  $G_{33} - 2/3 \cdot G = -4/3(g/\rho_0)\langle \rho'w' \rangle$ ,  $\nu_t = C_S e \langle w'^2 \rangle / \varepsilon$ .

**Модель 3:** алгебраическая модель  $\langle w'^2 \rangle$  заменяется дифференциальной [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu + C_S \frac{e \langle w'^2 \rangle}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} - \frac{2g}{\rho_0} \langle w'\rho' \rangle - C_{1\varepsilon} \varepsilon \left( \frac{\langle w'^2 \rangle}{e} - \frac{2}{3} \right) + \\ &+ \frac{4}{3} C_3 \frac{g}{\rho_0} \langle w'\rho' \rangle - \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

В этих моделях также используется ряд эмпирических констант, значения которых являются в достаточной степени общепринятыми и приведены в конце данного раздела.

### Граничные условия

Поскольку в дальнейшем будут обсуждаться только базовая модель и модели 2, 3, граничные условия приводятся именно для них. Краевое условие для  $\langle w'^2 \rangle$  используется только в модели 3.

**На дне ( $z=0$ ):**  $K_U \partial U / \partial z = k_b U |U|$ ;  $S = S_0$ ;  $\partial e / \partial z = 0$ ;  $\varepsilon = c_\varepsilon e^{3/2} / l_b$ ;  $\partial \langle w'^2 \rangle / \partial z = 0$ ;  $l_b$  – масштаб шероховатости дна.

**На поверхности ( $z=H$ ):**  $K_U \partial U / \partial z = \tau_W / \rho_s$ ;  $K_S \partial S / \partial z = 0$ ;  $\varepsilon = c_\varepsilon e^{3/2} / l_s$ ;  
 $\tau_W$  – касательное напряжение, обусловленное ветровой нагрузкой;  $l_s$  – масштаб шероховатости свободной поверхности;  
 два варианта условий для энергии турбулентности  $e$ :

$$K_e \frac{\partial e}{\partial z} = k_\tau \left( \frac{|\tau_W|}{\rho_s} \right)^{3/2}; \quad (9)$$

$$e = \frac{|\tau_W|}{\rho_s \sqrt{c_\mu}}; \quad (10)$$

три варианта условий для  $\langle w'^2 \rangle$ :

$$\frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{2}{3} k_\tau \left( \frac{|\tau_W|}{\rho_s} \right)^{3/2}; \quad (11)$$

формула (5);

формула Роди [1]:

$$\langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3} e \left\{ 1 - \frac{2C'_1 f \varepsilon + [1 - C_2 (1 - 2C'_2 f)] (P - 2G)}{(C_1 + 2C'_1 f) \varepsilon + P + G - \varepsilon} \right\}, \quad (12)$$

$f = C_f \frac{e^{3/2}}{\varepsilon} \left( H - z + 0.04 \frac{e_s^{3/2}}{\varepsilon_s} \right)$  – функция от  $z$ , принимающая на поверхности значение 1.7 ( $C_f = 1/15$ ), индекс  $s$  указывает, что значение вычисляется при  $z = H$ .

Эмпирические константы имеют следующие значения:

$\alpha_e = 1.0$ ;  $\alpha_\varepsilon = 0.77$ ;  $c_\varepsilon = 0.314$ ;  $k_b = 0.014$ ;  $l_b = 0.002$ ;  $l_s = 0.005$ ;  $k_\tau = 2.5$ ;  $C_1 = 2.2$ ;  $C_2 = 0.55$ ;  $C_3 = C_2$ ;  $C_S = 0.22$ ;  $C_T = 1.25$ ;  $C_{1T} = 3.2$ ;  $C_{2T} = 0.5$ ;  $C'_1 = 0.5$ ;  $C'_2 = 0.3$ .

Для решения краевой задачи (1)–(2), (8) со всеми вариантами граничных условий использовались неявные разностные схемы, построенные с использованием метода конечного объема.

## 2. Моделирование сдвигового течения в открытом канале под действием постоянного касательного напряжения

С использованием построенных численных моделей выполнено моделирование сдвигового течения в круговом канале глубиной  $H = 0.3$  м в соответствии с данными лабораторного эксперимента [5].

Начальные условия для основных параметров задавались следующим образом:

Для скорости – состояние покоя  $U = 0$ ; коэффициент  $\nu_t = \nu_0$  – постоянный;  $e = \sqrt{c_\varepsilon \frac{\nu_t}{c_\mu L}}$ ;

$\varepsilon = c_{\varepsilon\mu} \frac{\nu_t e}{\sqrt{L}}$ ;  $\langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3} e$ ;  $c_{\varepsilon\mu} = \frac{c_\varepsilon^2}{c_\mu}$ ;  $L$  – масштаб турбулентности с параболическим профилем  $L(z) = \kappa [l_s (1 - \xi) + l_b \xi + l_m \xi (1 - \xi)]$ ,  $\xi = \frac{z}{H}$ ,  $\kappa = 0.4$ ,  $l_m = 0.25$ .

Корреляции  $\langle w' \rho' \rangle$  и  $\langle w' u' \rangle$  вычислялись по формулам (6), (7) соответственно.

Для вертикального распределения плотности и значения касательного напряжения на свободной поверхности рассмотрены два варианта:

эксперимент I:  $\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = 192 \text{ кг/м}^4$ ;  $\tau_W = 0.0995 \text{ кг/(м с)}^2$ ;

эксперимент II:  $\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = 384 \text{ кг/м}^4$ ;  $\tau_W = 0.212 \text{ кг/(м с)}^2$ .

### 3. Результаты численных расчетов

В дальнейшем для простоты изложения будем использовать следующие обозначения для численных моделей с учетом выбора краевых условий на свободной поверхности:

БМ<sub>1</sub> – базовая модель с краевым условием (9);

БМ<sub>2</sub> – базовая модель с краевым условием (10);

М<sub>21</sub> – модель 2 с краевым условием (9);

М<sub>22</sub> – модель 2 с краевым условием (10);

М<sub>31</sub> – модель 3 с краевыми условиями (9) и (11);

М<sub>32</sub> – модель 3 с краевыми условиями (10) и (5);

М<sub>33</sub> – модель 3 с краевыми условиями (10) и (12).

В модели 3 сочетание условий (9) и (11) выбрано из соображений согласованности (оба варианта имеют градиентный вид).

Расчеты были выполнены на равномерной сетке, шаг по времени  $t = 1$  с.

Сравнение результатов расчетов, выполненных в условиях экспериментов I и II с использованием моделей 1 – 3 показало, что все эти модели в основном адекватно отражают процессы вертикального перемешивания. Главное внимание при анализе уделялось оценкам скорости заглубления перемешанного слоя и степени анизотропии характеристик турбулентного обмена (отношение  $\langle w'^2 \rangle / e$ ), а также характеру вертикальных распределений основных переменных задачи: скорости  $U$ , энергии турбулентности  $e$ , скорости диссипации  $\varepsilon$ , коэффициента вертикального турбулентного обмена  $\nu_t$ , корреляционного момента  $\langle w'^2 \rangle$ .

Расчеты показали, что базовая модель дает вертикальные распределения, заметно отличающиеся от полученных с помощью моделей 2 – 3, в то время как эти последние дают достаточно близкие результаты. Использование двух видов граничного условия для энергии турбулентности никаких существенных различий не выявило, поэтому здесь мы приводим только результаты с использованием формулы (12).

На рис. 1 приведены графики вертикальных распределений, полученные с помощью моделей БМ<sub>2</sub> и М<sub>32</sub>.

К моменту времени  $t = 1000$  с во всех случаях наступало полное перемешивание. Из сравнения рисунков 1а, 1б видно, что базовая модель дает более "размазанные" профили, в частности – для плотности, т. е. перемешивание происходит более интенсивно. На рис. 2 сопоставлены графики заглубления перемешанного слоя с лабораторными данными в обоих экспериментах. Следует отметить, что вариации краевых условий на скорости заглубления никак не отражались, поскольку их влияние было заметно лишь в очень узкой приповерхностной зоне и практически не сказывалось на распределении турбулентной вязкости  $\nu_t$ .

По характеру поведения энергии турбулентности  $e$  и корреляционного момента  $\langle w'^2 \rangle$  наиболее приемлемой представляется модель М<sub>32</sub>. Что касается степени анизотропии, то, как видно из рис. 3, она немного слабее выражена в случае модели М<sub>21</sub>, почти совпадает в случаях моделей М<sub>31</sub> и М<sub>32</sub>, а в случае модели М<sub>33</sub> имеет некоторое отличие вблизи поверхности.

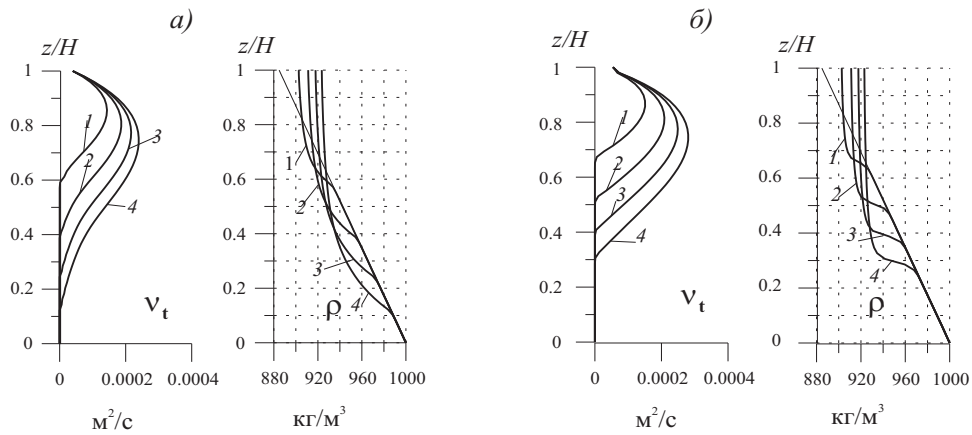


Рис. 1. Вертикальные распределения турбулентной вязкости и плотности, полученные для эксперимента II с использованием модели  $BM_2$  (а) и  $M_{32}$  (б); (1 – 60 с, 2 – 120 с, 3 – 180 с, 4 – 240 с)

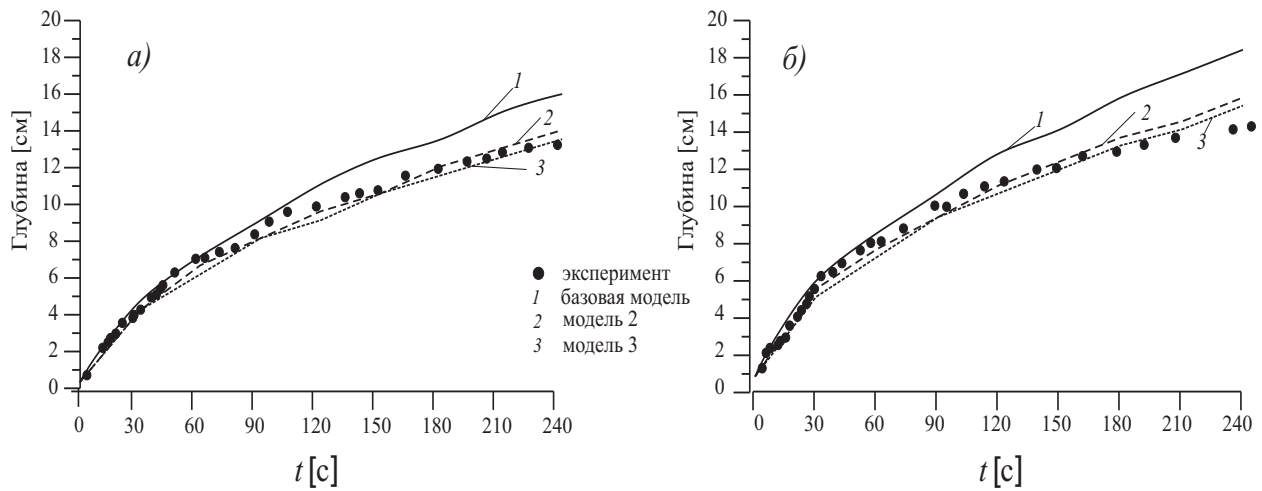


Рис. 2. Динамика заглубления перемешанного слоя, полученная с использованием трех моделей: а) — эксперимент I; б) — эксперимент II

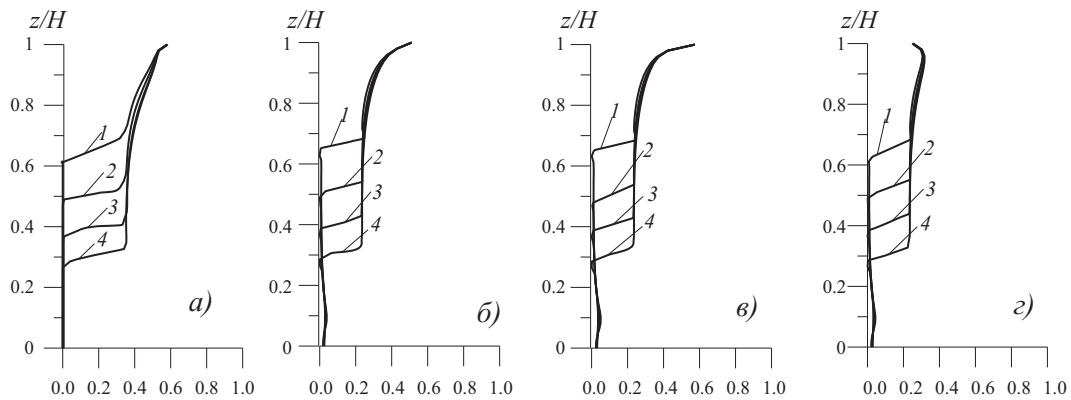


Рис. 3. Профили  $\langle w'^2 \rangle / \epsilon$ , полученные для эксперимента II. а) модель  $M_{22}$ ; б) модель  $M_{31}$ ; в) модель  $M_{32}$ ; г) модель  $M_{33}$ ; (1 – 60 с, 2 – 120 с, 3 – 180 с, 4 – 240 с)

**Список литературы**

- [1] CELIK I., RODI W. Simulation of free-surface effects in turbulent channel flows// Phys.-Chem. Hydrodynamics, 1984. Vol. 5, No. 3-4. P. 217-227.
- [2] ИГНАТОВА Г. Ш., КВОН В. И. О модели турбулентного течения со скольжением на дне водотока// Метеорол. гидрол. 1977. № 8. С. 49-56.
- [3] RODI W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids// J. of Geophys. Res. 1987. Vol. 92, No C5. P. 5305-5328.
- [4] VASILIEV O. F., DUMNOV C. V. Numerical modelling of flow in a river estuary// Proceedings of Technical Session B XXII Congress IAHR. Lausanne, 1987. P. 83-87.
- [5] KATO H. AND PHILLIPS O. M. On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid// J. Fluid Mech. 1969. Vol. 37, part 4. P. 643-655.