

Численный анализ задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции*

Г.В. АЛЕКСЕЕВ, Д.А. ТЕРЕШКО
Институт прикладной математики ДВО РАН
e-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Работа посвящена численному решению задач граничного управления для математической модели переноса тепла в вязкой жидкости в рамках приближения Обербека-Буссинеска. Указанные задачи формулируются как задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и управлений. Роль последних играют неизвестные значения вектора скорости и потока тепла на определенных участках границы области течения.

1. Введение

Одна из важных задач прикладной гидродинамики связана с проблемой создания течений требуемой конфигурации за счет выбора значений вектора скорости, температуры либо потока тепла на некоторых участках границы области. Интерес к задачам управления для различных моделей гидродинамики вызван наличием актуальных приложений в авиа- и судостроении, промышленном производстве, охране окружающей среды и других областях. За последние годы вышло достаточно большое число публикаций, посвященных теоретическому исследованию задач управления для стационарных моделей гидродинамики и тепловой конвекции (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6]). В этих работах исследована разрешимость экстремальных задач, выведены и исследованы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. При этом следует отметить, что опубликовано очень мало работ, посвященных численному решению задач управления для стационарных моделей гидродинамики вязкой жидкости (см. [7, 8, 9]). Это связано с тем, что нелинейность используемых математических моделей и особенности рассматриваемых задач приводят к значительным трудностям при численном решении соответствующих задач управления. В отличие от указанных выше ссылок в данной работе используется нестационарная модель тепловой конвекции.

В области Ω с границей Γ рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= -\beta T \mathbf{G} \text{ в } Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } Q, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma_1, \quad \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma_2, \\ T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T &= f \text{ в } Q, \quad T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega, \\ T &= \psi \text{ на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N, \end{aligned}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-A-03-07).

описывающая процесс распространения тепла в вязкой жидкости. Здесь \mathbf{u} , p и T – вектор скорости, давление и температура жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, β – объемный коэффициент теплового расширения, \mathbf{G} – вектор ускорения свободного падения, $\lambda = \text{const} > 0$ – коэффициент температуропроводности, f – объемная плотность источников тепла, \mathbf{g} , ψ и χ – некоторые функции, $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $Q = \Omega \times (0, t_{max})$, $\Sigma = \Gamma \times (0, t_{max})$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, t_{max})$, $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, t_{max})$, $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{max})$, $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{max})$.

При теоретическом и численном анализе задач управления мы используем слабую формулировку данной начально-краевой задачи

$$\int_0^{t_{max}} [(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) + (\beta T \mathbf{G}, \mathbf{v})] dt = 0,$$

$$\int_0^{t_{max}} [(T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T, S) + \lambda(\nabla T, \nabla S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N}] dt = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } Q, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma_1, \quad T = \psi \text{ на } \Sigma_D,$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega,$$

которую для краткости записываем в виде операторного уравнения

$$F(\mathbf{u}, p, T, \mathbf{g}, \chi) = 0.$$

2. Задачи условной минимизации

Задачи граничного управления для данной модели математически формулируются как задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и от граничных функций \mathbf{g} и χ , играющих роль управлений. Указанные задачи можно записать в следующем общем виде:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{g}, \chi) = J_i(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2} \int_0^{t_{max}} \int_{\Gamma_1} |\mathbf{g}|^2 d\Gamma dt + \frac{\mu_2}{2} \int_0^{t_{max}} \int_{\Gamma_N} \chi^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf,$$

$$F(\mathbf{u}, p, T, \mathbf{g}, \chi) = 0, \quad (\mathbf{g}, \chi) \in K = K_1 \times K_2,$$

где μ_1 и μ_2 – некоторые положительные константы, имеющие смысл параметров регуляризации. Первое слагаемое $J_i(\mathbf{u})$ несет на себе основную смысловую нагрузку, определяя свойства вектора скорости \mathbf{u} в области течения Ω , которые необходимо получить за счет выбора граничных управлений. Так, например, мы используем функционалы

$$J_1(\mathbf{u}) = \int_0^{t_{max}} \int_{\Omega} |\text{rot } \mathbf{u}|^2 d\Omega dt, \quad J_2(\mathbf{u}) = \int_0^{t_{max}} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 d\Omega dt$$

для того, чтобы получить безвихревое течение либо вектор скорости, близкий к заданному полю \mathbf{u}_d . Остальные слагаемые в функционале $J(\mathbf{u}, \mathbf{g}, \chi)$ играют роль регуляризирующих добавок.

На основе методов исследования экстремальных задач из работ [6, 9] выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума первого порядка.

Для наглядности запишем ниже дифференциальный аналог системы оптимальности для функционала J_1 , полученный при выполнении определенных требований на множество управлений K .

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\beta T \mathbf{G} \text{ в } Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } Q,$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ в } \Sigma_1, \quad \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma_2,$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = f \text{ в } Q,$$

$$T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega, \quad T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N.$$

$$-\mathbf{q}_t - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{q} + (\nabla \mathbf{u})^t \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla \sigma = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \theta \nabla T \text{ в } Q,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \text{ в } Q, \quad \mathbf{q}|_{t=t_{max}} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma_1, \quad \nu \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial n} - \sigma \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma_2,$$

$$-\theta_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \lambda \Delta \theta = -\beta \mathbf{G} \cdot \mathbf{q} \text{ в } Q,$$

$$\theta|_{t=t_{max}} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \theta = 0 \text{ на } \Sigma_D, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_N.$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\mu_1} \left(\sigma \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial n} \right) \text{ на } \Sigma_1, \quad \chi = \frac{\theta}{\mu_2} \text{ на } \Sigma_N.$$

Система оптимальности состоит из трех частей: прямой начально-краевой задачи для скорости \mathbf{u} , давления p и температуры T , сопряженной задачи для сопряженной скорости \mathbf{q} , сопряженного давления σ и сопряженной температуры θ , и соотношений, связывающих между собой управления (\mathbf{g}, χ) и сопряженное состояние $(\mathbf{q}, \sigma, \theta)$. Дополнительные трудности при численном решении системы оптимальности связаны с тем, что сопряженная задача является обратной по времени.

Разработан численный алгоритм решения задачи граничного управления, основанный на итерационном процессе решения прямых и обратных по времени начальных краевых задач, входящих в нелинейную систему оптимальности.

Алгоритм

Шаг 0. Выбор начальных приближений \mathbf{g}_0 на Σ_1 и χ_0 на Σ_N . Полагаем $n = 0$.

Шаг 1. Решение прямой задачи для (\mathbf{u}_n, p_n, T_n) в Q .

Шаг 2. Решение сопряженной задачи для $(\mathbf{q}_n, \sigma_n, \theta_n)$ в Q .

Шаг 3. Вычисление новых значений управлений

$$\mathbf{g}_{n+1} = (\sigma_n \mathbf{n} - \nu \partial \mathbf{q}_n / \partial n) / \mu_1 \text{ на } \Sigma_1 \text{ и } \chi_{n+1} = \theta_n / \mu_2 \text{ на } \Sigma_N.$$

Шаг 4. Если условие выхода из цикла не выполняется, то полагаем $n := n+1$ и переходим на Шаг 1.

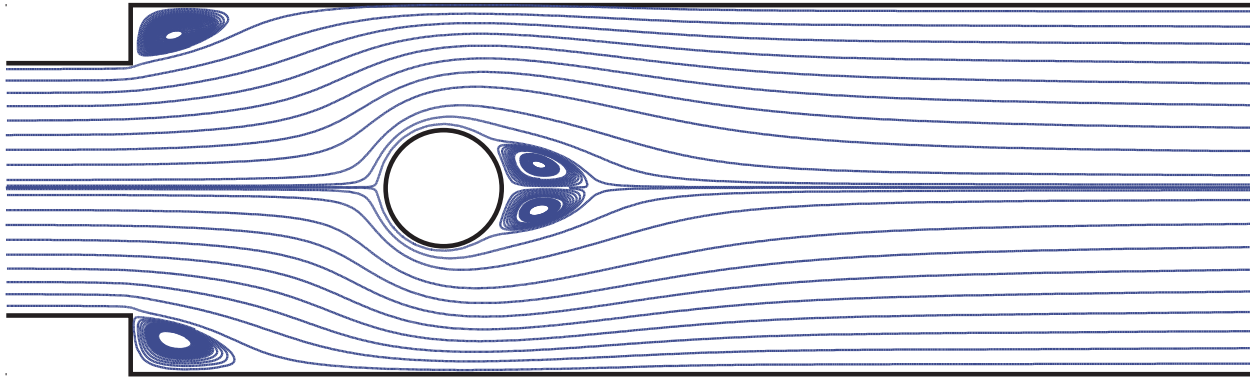


Рис. 1. Неуправляемое течение

3. Результаты вычислительных экспериментов

Обсудим здесь результаты вычислительных экспериментов по численному решению задачи обтекания кругового цилиндра плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением. На рис. 1 представлены линии тока течения, полученного путем решения двумерной краевой задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса при числе Рейнольдса $Re=50$.

Граничные условия для данного случая отвечают заданию параболического профиля для скорости на участке втекания слева, условий прилипания на жестких границах (поверхности цилиндра и боковых стенках канала) и «естественного» краевого условия на участке вытекания справа. Нелинейные уравнения Навье-Стокса решались с помощью метода Ньютона. Для численного решения линеаризованной краевой задачи методом конечных элементов на адаптивной треугольной сетке (см. рис. 2) использовался свободно распространяемый пакет freeFEM++ (www.freefem.org). В качестве начального приближения было выбрано решение соответствующей задачи Стокса, причем для сходимости метода Ньютона обычно требовалось не более пяти итерации.

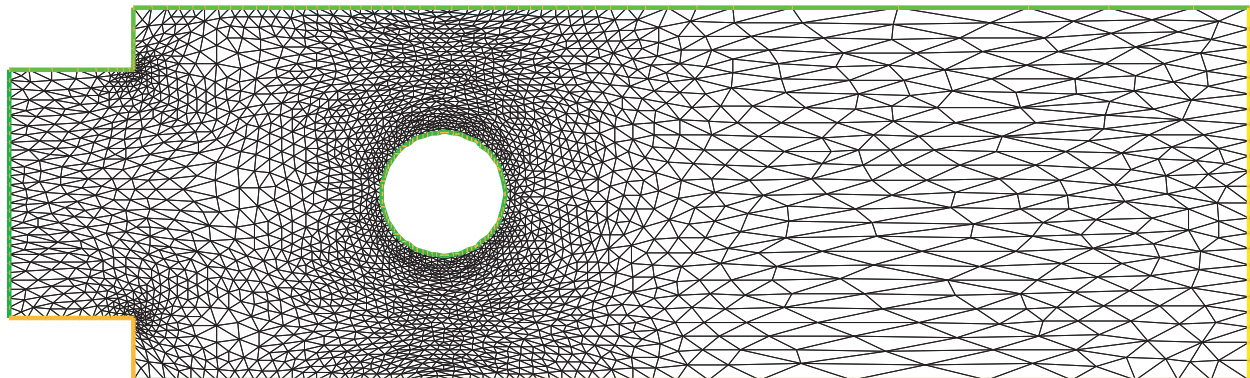


Рис. 2. Адаптивная сетка (freeFEM++)

Из рис. 1 видно, что за обтекаемым телом образуется разделение потока, в углах появились вихри. Чтобы уменьшить отрывную зону за телом и размер вихревых зон в углах была решена задача минимизации квадрата нормы завихренности для безразмерных уравнений Обербека-Буссинеска, рассматриваемых при тех же граничных условиях для скорости и смешанных краевых условий для температуры. При этом исполь-

зовался представленный выше алгоритм, основанный поочередном решении прямой и сопряженной задачи.

На рис. 3 показаны линии тока течения, полученного в результате ее решения при числе Рейнольдса $Re=50$ и числе Рэлея $Ra=10^5$ в случае, когда управление достигается за счет выбора теплового потока на границе тела и близлежащих участках стенок канала, отмеченных штрихпунктирными линиями.

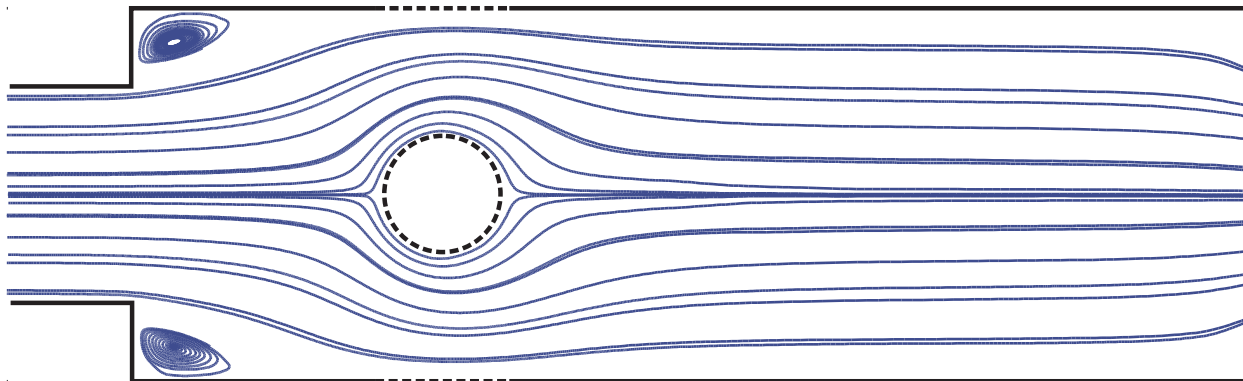


Рис. 3. Линии тока при управлении потоком тепла на границе тела и участках стенок канала

Для того, чтобы устранить угловые застойные зоны, мы вводим дополнительное температурное управление в углах. Линии тока течения, полученного при использовании этой схемы управления, представлены на рис. 4. Видно, что застойные зоны в углах остались, хотя и уменьшились.

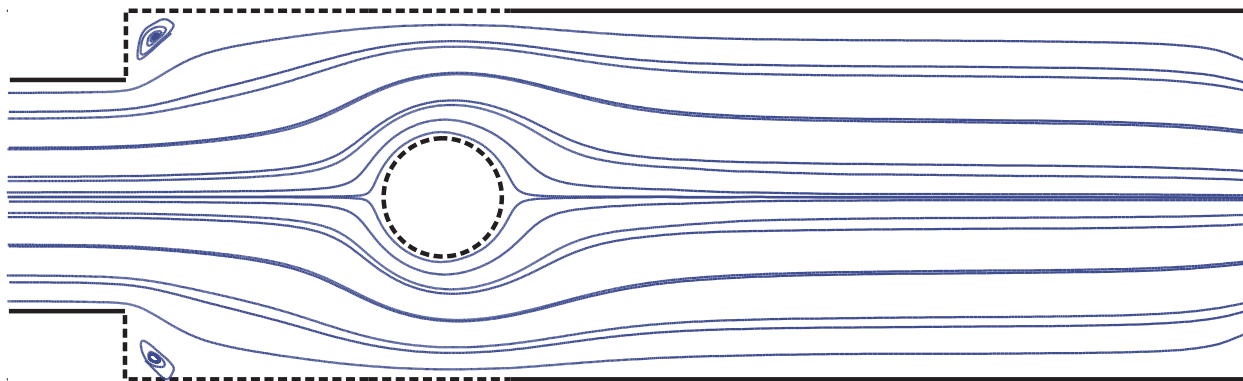


Рис. 4. Линии тока при управлении потоком тепла на границе тела, участках стенок канала и в углах

Рассмотрим теперь схему управления, отвечающую ситуации, когда в углах вместо температурного управления используется гидродинамическое управление. Другими словами в этой схеме мы по-прежнему используем температурное управление на границе тела и на близлежащих участках стенок канала для создания безотрывного режима обтекания, тогда как в углах используется гидродинамическое управление. Полученные линии тока течения представлены на рис. 5. Хорошо видно, что застойные зоны в углах исчезли благодаря режиму вытекания (или отсоса жидкости) вблизи углов, полученному в результате решения двухпараметрической задачи управления.

Отметим, что при проведении численных расчетов важную роль играют параметры регуляризации. Если эти параметры недостаточно малы, то в процессе решения

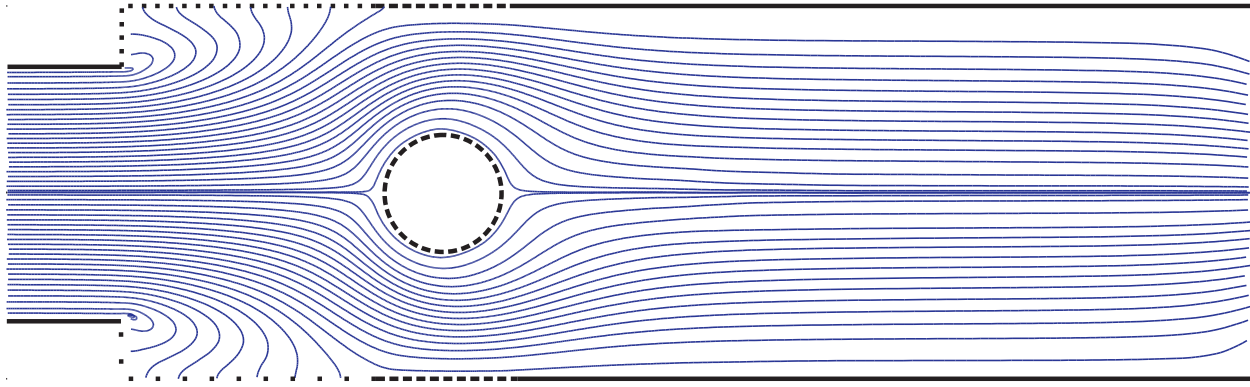


Рис. 5. Линии тока при управлении потоком тепла на границе тела, участках стенок канала и вектором скорости в углах

задачи минимизации не удастся получить течение с заданными свойствами. В случае однопараметрической задачи, когда значение параметра регуляризации чрезмерно мало, в результате численного решения возникают большие температурные градиенты в окрестности участков управления. Одновременное использование двух управлений разной физической природы позволяет избежать этих проблем. Если основное изменение поля скорости достигается за счет гидродинамического управления, то температурное управление будет играть только вспомогательную роль и температурные градиенты будут малы.

Список литературы

- [1] АЛЕКСЕЕВ Г.В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
- [2] ИТО К., RAVINDRAN S.S. Optimal control of thermally convected fluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1998. Vol. 19, N 6. P. 1847–1869.
- [3] ЛЕЕ Н.-С., IMANUVILOV O.YU. Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 242. P. 191–211.
- [4] АЛЕКСЕЕВ Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
- [5] АЛЕКСЕЕВ Г.В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 2007. Т. 47, № 6. С. 1055–1076.
- [6] АЛЕКСЕЕВ Г.В., ТЕРЕШКО Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
- [7] SLAWIG T. PDE-constrained control using FEMLAB—Control of the Navier–Stokes equations // Numer. Algorithms. 2006. Vol. 42, N 2. P. 107–126.
- [8] DEDE L. Optimal flow control for Navier–Stokes equations: Drag minimization // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2007. Vol. 55, N 4. P. 347–366.
- [9] АЛЕКСЕЕВ Г.В., ТЕРЕШКО Д.А. Экстремальные задачи граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 2. С. 173–178.