Оптимальная стабилизация распределенной нелинейной колебательной системы с фазовыми ограничениями

С.Я. Серовайский
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: serovajskys@mail.ru

Аннотация

Рассматривается управляемая колебательная система, описываемая нелинейным уравнением гиперболического типа. В качестве управления выбирается внешнее распределенное воздействие. Ограничения накладываются как на управление, так и на состояние системы. Задача оптимального управления состоит в стабилизации системы с учетом заданных ограничений на фиксированном интервале времени. Доказывается существование оптимального управления. Для решения задачи применяется метод штрафа. Доказывается его сходимость. Для аппроксимационной задачи оптимального управления получены необходимые условия оптимальности. В качестве приближенного решения задачи оптимальной стабилизации выбирается решение аппроксимационной задачи при достаточно малом значении параметра штрафа.

Задачи оптимального управления для систем, описываемых нелинейными уравнениями гиперболического типа в отсутствии фазовых ограничений, достаточно хорошо исследованы (см., например, [1] – [3]). Аналогичные задачи в условиях интегральных ограничений на состояния системы рассматриваются, например, в [4], а в случае поточечных фазовых ограничений – в [5]. Вопросы оптимальной стабилизации для нелинейных систем, описываемых уравнениями параболического типа, исследуются в [6], [7]. Однако задачи оптимальной стабилизации для нелинейных уравнений гиперболического типа при наличии поточечных фазовых ограничений остаются, по-видимому, не исследованными. В настоящей работе рассматривается одна задача указанного типа. Доказывается существование решения задачи оптимального управления. Для ее решения применяется метод штрафа. Доказывается его сходимость. Для аппроксимационной задачи оптимального управления получены необходимые условия оптимальности. В качестве приближенного решения задачи оптимальной стабилизации, понимаемого в слабом смысле [8], выбирается решение аппроксимационной задачи при достаточно малом значении параметра штрафа.

Дана трехмерная область Ω с гладкой границей S, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = S \times (0,T)$. Рассматривается нелинейное волновое уравнение

$$y'' - \Delta y + |y|^{\rho} y \ = \ v, \ (x,t) \in Q \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(x,0) = \varphi(x), \ y'(x,0) = \psi(x), \ x \in \Omega; \tag{2}$$

$$y = 0, \ (x,t) \in \Sigma, \tag{3}$$

где $0 < \rho \leq 2$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Известно (см. [9], с. 20-40), что для любого управления v из пространства $V = L_2(Q)$ задача (1) – (3) имеет единственное решение $y = y[v]$ из пространства

$$Y \ = \ \{y \,|\, y \in L_\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \ y' \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))\},$$

причем отображение $v \to y[v]$ непрерывно и слабо непрерывно.

Управление выбирается из выпуклого замкнутого подмножества V_{ad} пространства V. Состояние системы должно принадлежать выпуклому замкнутому подмножеству Y_{ad} пространства Y. Конечное состояние системы является нулевым, т.е. выполнены условия

$$y(x,T) = 0, \ y'(x,T) = 0, \ x \in \Omega; \tag{4}$$

Управление $v \in V_{ad}$ считается допустимым, если соответствующее ему состояние системы (1) – (3) является элементом множества Y_{ad} и удовлетворяет конечным условиям (4). Всюду в дальнейшем предполагается, что множество U допустимых управлений не пусто. Задача оптимальной стабилизации состоит в отыскании такого допустимого управления, которое минимизирует на множестве допустимых управлений функционал

$$I \ = \ \int\limits_Q (F(x,t,v,y[v])dQ,$$

где F – известная функция своих аргументов. Предполагается, что F есть функция Каратеодори, выпуклая и коэрцитивная по третьему аргументу, растущая не быстрее квадратичной функции по третьему и четвертому аргументу и непрерывно дифференцируемая по ним.

Пользуясь стандартными методами с учетом имеющихся свойств краевой задачи, установим следующий результат.

Теорема 1. *Задача оптимальной стабилизации разрешима.*

Для вывода необходимых условий оптимальности для систем с распределенными параметрами, в принципе, имеются два подхода. В первом случае уравнение состояния служит средством для задания зависимости функции состояния от управления, т.е. состояние системы является вторичным по отношению к управлению. Во втором случае управление и состояние "уравниваются в правах т.е. критерий оптимальности минимизируется на множестве допустимых пар управление-состояние, а уравнение состояния интерпретируется как ограничение в форме равенства, налагаемое на систему. Второй подход оказывается практически единственно возможным в том случае, когда отсутствуют теоремы существования и единственности решения краевой задачи для произвольного управления. Многочисленные примеры подобного решения оптимизационных задач для сингулярных распределенных систем приводятся в [10] с использованием бесконечномерного метода множителей Лагранжа, а в [11] – с использованием метода штрафа. Однако последний может применяться и в случае корректных краевых задач при наличии фазовых ограничений, поскольку при таком подходе ограничения на состояние системы фактически имеют тот же смысл, что и явные ограничения на управление. В частности, в [2] метод штрафа используется для решения оптимизационных задач для различных нелинейных эволюционных систем с фазовыми ограничениями со свободными конечными состояниями, а в [6] – для сингулярной параболической системы с закрепленным конечным состоянием в отсутствии фазовых ограничений.

В настоящей работе мы воспользуемся модифицированным вариантом метода штрафа. Определим функционал

$$I_k(v,y) \;=\; \int\limits_Q (F(x,t,v,y[v])dQ \;+\; \frac{1}{2\varepsilon_k}\int\limits_Q (y'' - \Delta y(s) + |y|^\rho y - v)^2 dQ,$$

где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Аппроксимационная задача состоит в минимизации функционала I_k на множестве $V_{ad} \times Y_{ad}$ при выполнении начальных условий (2). Она представляет собой стандартную бесконечномерную задачу на условный экстремум функционала. Несложно установить ее разрешимость.

Теорема 2. *Аппроксимационная задача разрешима.*

Сама по себе аппроксимационная задача может быть исследована известными методами. Однако сходимость метода аппроксимации связана с серьезными трудностями, вследствие чего в данном случае не удается воспроизвести известные результаты по сходимости метода штрафа в задачах оптимального управления, полученные в [2], [6], [11]. Мы установим более слабую форму сходимости, ассоциированную с более слабой формой приближенного решения оптимизационных задач.

Определение. *Точка u называется* ***слабым приближенным решением*** *задачи минимизации функционала J на подмножестве U топологического пространства, если для достаточно малой окрестности O этого множества и достаточно малого положительного числа δ справедливы включение $u \in O$ и неравенство $J(u) \le \inf J(U) + \delta$.*

Согласно данному определению слабое приближенное решение, вообще говоря, лежит за пределами множества U, характеризующего ограничения на систему, но достаточно близко к какому-либо из его элементов. Тем самым заданные ограничения считаются выполненными не абсолютно точно, а лишь с некоторой (но достаточно высокой вследствие малости окрестности) степенью точности. В то же время значение функционала в рассматриваемой точке оказывается достаточно близко к его нижней грани на заданном множестве. Введенное понятие является обобщением приближенного решения оптимизационных задач, определенного в [8]. За счет ослабления требований, предъявляемых к приближенному решению задачи можно расширить область применимости методов аппроксимации в задачах оптимального управления и, в частности, обосновать алгоритм решения поставленной задачи оптимальной стабилизации.

Пусть пара (v_k, y_k) является решением аппроксимационной задачи. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *При $k \to \infty$ имеет место сходимость $v_k \to v$ слабо в V, $y_k \to y[v]$ слабо в Y, $y_k|_{t=T} \to 0$ слабо $H_0^1(\Omega)$, $y_k'|_{t=T} \to 0$ в слабо в $L_2(\Omega)$, причем справедливы включения $v \in V_{ad}$, $y[v] \in Y_{ad}$.*

Согласно этому результату значение v_k для достаточно большого номера k может быть выбрано в качестве слабого приближенного решения задачи оптимальной стабилизации, если упоминаемую в приведенном выше определении окрестность понимать в смысле слабой топологии пространства $V \times Y$.

Как известно, необходимым условием минимума в точке u функционала J на множестве U является вариационное неравенство

$$J'(u)(w-u) \geq 0 \; \forall w \in U. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой устанавливается следующее утверждение:

Теорема 4. *Функционал I_k в точке $u = (v_k, y_k)$ имеет производную Гато*

$$I_k'(u) = (I_{kv}'(v_k, y_k), I_{ky}'(v_k, y_k))$$

, характеризуемую равенствами

$$I_{kv}'(v_k, y_k) \; = \; F_v(v_k, y_k) + p_k,$$

$$I_{ky}'(v_k, y_k) \; = \; F_y(v_k, y_k) + r_k,$$

где $F_v(v_k, y_k)$ и $F_y(v_k, y_k)$ есть частные производные от функции F по третьему аргументу в точке (v_k, y_k), а p_k и r_k удовлетворяют соотношениям

$$y_k'' - \Delta y_k + |y_k|^\rho y_k \; = \; v_k + \varepsilon_k p_k, \; (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$p_k'' - \Delta p_k + (\rho+1)|y_k|^\rho p_k \; = \; r_k, \; (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$p_k(x,T) = -(\varepsilon_k^{-1} y_k'(x,T), \; p_k'(x,T) = (\varepsilon_k)^{-1} y_k(x,T), \tag{8}$$

$$y_k = 0, \; (x,t) \in \Sigma. \tag{9}$$

Пользуясь теоремой 4 и соотношением (5), получим необходимые условия оптимальности для аппроксимационной задачи.

Теорема 5. *Решение аппроксимационной задачи характеризуется системой, включающей в себя вариационные неравенства*

$$\int\limits_Q [F_v(v_k, y_k) + p_k](w - v_k) dQ \; \geq 0 \; \forall w \in V_{ad}, \tag{10}$$

$$\int_Q [F_y(v_k, y_k) + r_k](z - v_k)dQ \ \geq 0 \ \forall z \in Y_{ad}, \tag{11}$$

уравнение (6) с краевыми условиями

$$y_k(x, 0) = \varphi(x), \ y'_k(x, 0) = \psi(x), \ x \in \Omega; \tag{12}$$

$$y_k = 0, \ (x, t) \in \Sigma, \tag{13}$$

и уравнение (7) с краевыми условиями (8), (9).

Система (6) – (13) с соответствующими граничными условиями может быть решена итерационно стандартными методами (см., например, [12]). Тогда согласно теореме 3 ее решение v_k для достаточно большого номера k может быть выбрано в качестве слабого приближенного решения задачи оптимальной стабилизации.

Список литературы

[1] Kowalewsky A. Optimal control of distributed hyperbolic systems with boundary condition involving a time lag // Arch. Autom. Telemech. 1988. Vol. 33. N 4. P. 537-545.

[2] Tiba D. Optimal control of nonsmooth distributed parameter systems // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1459, Berlin, WJ Springer-Verlag, 1990. 159 p.

[3] Серовайский С.Я. Оптимизация для нелинейных гиперболических уравнений в отсутствии теоремы единственности решения краевой задачи // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 76-83.

[4] Кулиев Г.Ф., Гасанов К.К. Необходимые условия оптимальности для некоторых систем с распределенными параметрами с управлением в коэффициентах при старших производных // Диф. уравн. 1982. Т. 18, № 6. С. 1028-1036.

[5] Mordukhovich B. S., Raymond J.-P. Neumann boundary control of hyperbolic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Contr. Optim. 2005. Vol. 43, N 4. P. 1354-1372.

[6] Серовайский С.Я. Оптимальное управление для сингулярного эволюционного уравнения с негладким оператором и закрепленным конечным состоянием // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 2. С. 251-258.

[7] Barbu V., Wang G. Internal stabilization of semilinear parabolic systems // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285, N. 2. P. 387-407.

[8] Серовайский С.Я. Приближенное решение сингулярных оптимизационных задач // Матем. заметки. 2003. Т. 74, вып.5. С. 728-738.

[9] Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 576 с.

[10] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга. 1999. 352 с.

[11] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.

[12] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. В. Вычислительные и приближенные методы оптимизации // В кн. Матем. анализ. Итоги науки и техники. 1977. Вып. 14. С. 101-166.