Безотражательное распространение волн в сильно неоднородной сжимаемой атмосфере

Е.К. Бацына
Всшая школа экономики - Нижегородский филиал
e-mail: batcyna@gmail.com

Е.Н. Пелиновский
Институт прикладной физики РАН
e-mail: pelinovsky@gmail.com

Н.С. Петрухин
Всшая школа экономики - Нижегородский филиал
e-mail: npetruhin@hse.ru

В данной работе предлагается новый подход к решению волнового уравнения в атмосфере с большими температурными градиентами, позволяющий выделить условия, при которых волны с различными параметрами способны распространяться без отражения, перенося энергию на большие расстояния.

Интерес к изучению волн в сильно неоднородной сжимаемой атмосфере продолжает оставаться высоким как среди геофизиков, так и астрофизиков. В астрофизике он связан, прежде всего, с все еще остающимся открытым вопросом о нагреве хромосфер и корон Солнца и других звезд, а также с исследованиями тонких эффектов в астросейсмологии. И в атмосферной геофизике обнаруживается множество новых эффектов, оказывающих заметное влияние на атмосферную циркуляцию, структуру среды, ее энергетический баланс.

В качестве математической модели для анализа распространения акустико - гравитационных волн выбрана плоскослоистая атмосфера, находящаяся в постоянном поле силы тяжести. Система уравнений газодинамики для адиабатических возмущений, распространяющихся по вертикали, имеет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g=0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V\right)=0,\quad \frac{dp}{dt}-c^2\frac{d\rho}{dt}=0,$$

где p – давление, ρ – плотность газа, V – вертикальная скорость частиц, g – ускорение силы тяжести и $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ – адиабатическая скорость звука (γ – постоянная адиабаты). Ось z выбрана противоположно направлению силы тяжести. Разделяя основное состояние неоднородной атмосферы и волновые составляющие, и считая волновые возмущения малыми, получаем линеаризованную систему, которая легко сводится к волновому уравнению для функции $\chi(z,t)=dV/dz$ с коэффициентами, зависящими от единственной переменной – невозмущенной скорости звука $c(z)$:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=c^2(z)\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\left[\frac{dc^2(z)}{dz}-\gamma g\right]\frac{\partial\chi}{\partial z}. \tag{1}$$

Поставим следующую задачу. Существуют ли такие преобразования переменных, при котором уравнение (1) с переменными коэффициентами сводится к волновому уравнению с постоянными коэффициентами, при этом физический смысл аргументов: времени и координаты после замены не изменится? Если такие преобразования существуют, то тем самым мы найдем безотражательные волны в неоднородной среде, потому что в гиперболических уравнениях с постоянными коэффициентами такие волны всегда существуют. Идея преобразования вытекает из анализа волновых процессов в плавно неоднородных средах, когда бегущая волна имеет переменные амплитуду и фазу, но сохраняет свою форму при распространении.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\chi(z,t) = A(z)W(Z,t), \quad Z = Z(z), \tag{2}$$

где все функции подлежат определению. После подстановки (2) в (1) получаем так называемое уравнение Клейна – Гордона с переменными коэффициентами. Чтобы получить в этом уравнении постоянные коэффициенты, необходимо наложить несколько условий на функции $A(z)$ и $Z(z)$:

$$Z(z) = \int \frac{dz}{c(z)}, \quad A(z) \sim \frac{1}{\sqrt{c(z)}} \exp\left[\int \frac{dz}{2H(z)}\right], \tag{3}$$

после чего получаем:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = Q(z)W, \tag{4}$$

где

$$Q = \frac{1}{A}\frac{d}{dz}\left[c^2(z)\frac{dA}{dz} - \gamma g A(z)\right]. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы в (4) $Q = const$, тогда очевидны его решения в виде распространяющихся волн. Уравнение (5) является искомым обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка для нахождения “безотражательных” профилей скорости, которое запишем в безразмерном виде

$$\frac{d^2u^2}{dh^2} - \frac{1}{4}\frac{(du^2/dz)^2}{u^2} + \frac{1}{u^2} = \beta, \tag{6}$$

$$u(x) = c(x)/c_0, \quad h = z/H_0, \quad H_0 = \gamma g/c_0^2, \quad \beta = -Q/\omega_0^2, \quad \omega_0 = \gamma g/2c_0.$$

Здесь c_0 – значение скорости звука на некоторой высоте $z = 0$, H_0– высота однородной атмосферы для этой же высоты, ω_0 - частота отсечки акустических волн, соответствующая изотермической атмосфере, скорость звука в которой равна c_0. Уравнение (6) в силу его автономности один раз интегрируется и сводится окончательно к квадратурам

$$h + h_0 = \pm\int \frac{udu}{\sqrt{\beta u^2 + \alpha u + 1}} \quad , \tag{7}$$

где α и h_0 – две произвольные постоянные. Естественно положить $h_0 = 0$ без ограничения общности, и таким образом, все возможные решения определяются через две константы α и β, которые могут меняться в широких пределах, как по величине, так и по знаку.

В первую очередь выделим класс решений, для которых $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. В этом случае $Q = 0$, и уравнение (4) сводится к классическому волновому уравнению, описывающему бегущие волны *W(t* $\pm$ *Z)*. В исходных переменных волна имеет переменную амплитуду и фазу, но ее временная форма остается неизменной в процессе распространения. Таких профилей существуют несколько. Первые из них ($\alpha = 0$) имеют вид

$$u = \sqrt{2|h|}.$$

Это случай политропной атмосферы, когда температура изменяется линейно с высотой.

Следующий класс безотражательных профилей получается при $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$. При этом по-прежнему $Q = 0$, так что уравнение Клейна – Гордона (4) сводится к волновому уравнению. Он описываются обратными функциями

$$h = \pm \frac{2}{3\alpha^2} \sqrt{1 + \alpha u} \, (\alpha u - 2) \, .$$

Таким образом, при нулевом Q мы имеем всего два различных профиля для скорости звука: все они начинаются с нуля и идут с возрастанием высоты на конечное или бесконечное значение. Поскольку для всех этих профилей $Q = 0$, то волны распространяются вверх без дисперсии (как решения "чисто" волнового уравнения), и мы будем называть эти профили "бездисперсионными".

Следующий класс решений может быть получен при не нулевом Q, когда уравнение (4) является уравнением Клейна-Гордона, решениями которого являются дисперсионные волны. В частности, если $\alpha = 0$, то решение (7) имеет вид

$$h^2 - \beta u^2 = 1,$$

и в зависимости от знака β определяет гиперболу или эллипс.

Общее решение, когда все константы не равны нулю ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), записывается в более громоздком виде:

при $\beta > 0$

$$\pm h = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta u^2 + \alpha u + 1} - \frac{\alpha}{\beta^{3/2}} \ln \left[2\sqrt{\beta(\beta u^2 + \alpha u + 1)} + 2\beta u + \alpha \right],$$

при $\beta < 0$

$$\pm h = -\frac{1}{|\beta|} \sqrt{-|\beta| u^2 + \alpha u + 1} + \frac{\alpha}{|\beta|^{3/2}} \arcsin \left[\frac{-2|\beta| u + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4|\beta|}} \right].$$

Знак Q влияет на характер дисперсии акустико-гравитационных волн. Меняя параметр β, можно "управлять" градиентами скорости звука.

В общем случае элементарное волновое решение уравнения Клейна-Гордона (4) имеет вид

$$\chi(t, z) = \frac{G}{\sqrt{c(z)}} \exp \left[i \left(\omega t - K \int \frac{dz}{c(z)} \right) \right] \tag{8}$$

(G – произвольная константа) с дисперсионным соотношением

$$K = \pm \sqrt{\omega^2 + Q}.$$

В зависимости от знака Q возможна как положительная, так и отрицательная дисперсия. Если $Q > 0$, то волны любых частот распространяются вверх в атмосферу; если же $Q < 0$, то распространяющимися являются высокочастотные волны с частотой

$$\omega > \sqrt{\beta}\omega_0 = \frac{\sqrt{\beta}\gamma g}{2c_0}.$$

Частота отсечки волн в “безотражательной” атмосфере может быть как больше, так и меньше частоты отсечки акустико-гравитационных волн в эквивалентной изотермической атмосфере.

Используя элементарные решения (8), можно получить интегральные выражения для волны произвольной формы. В случае $Q = 0$ волна записывается в наиболее простом виде

$$\chi(t,z) = \frac{G}{\sqrt{c(z)}}W[t - Z(z)] = \frac{G}{\sqrt{c(z)}}\exp\left(-\frac{\gamma g}{2}\int\frac{dz}{c^2(z)}\right)W\left[t - \int\frac{dz}{c(z)}\right]. \qquad (9)$$

где W – произвольная функция. Во всех остальных случаях необходимо использовать численное преобразование Фурье.

Используя (8), можно найти все компоненты волнового поля. Так, скорость частиц V, которая, конечно же, является интегралом от (9), выражается проще, если использовать

$$V = -\frac{1}{\omega^2}\left[c(z)^2\frac{\partial\chi}{\partial z} + \gamma g\chi\right]. \qquad (10)$$

Волновое возмущение давления также однозначно определяется через χ

$$p' = \frac{i\rho_0}{\omega^3}\left[gc^2(z)\frac{\partial\chi}{\partial z} + \left(\gamma g^2 - \omega^2 c^2\right)\chi\right]. \qquad (11)$$

Для исследования возможности сверхдальнего распространения волн в случае “безотражательных” профилей скорости звука вычислим плотность потока энергии по вертикали

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[p'V^* + Vp'^*\right],$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Подставляя сюда (10) и (11) получаем

$$\Pi(z) = -\frac{1}{2}\frac{G^2}{\omega^3}\frac{\rho_0(z)c^2(z)}{\exp\left(\gamma g\int dz/c^2\right)}.$$

или

$$\Pi = -\frac{\gamma G p(0)}{2\omega^3},$$

и, следовательно, поток энергии не зависит от z и сохраняется несмотря на сильную неоднородность атмосферы. В результате, монохроматическая волна может распространяться на большие высоты без потери энергии. Этот вывод справедлив для волн на любом из рассмотренных безотражательных профилей, вне зависимости от величины и знака параметра Q. В тоже время амплитуда импульсных возмущений зависит от величины Q, поскольку она влияет на дисперсионное расплывание волнового пакета.

Таким образом, предложенный в работе подход к решению волнового уравнения позволяет определить семейство профилей скорости звука, для которых волновое поле может быть представлено бегущей волной в неоднородной атмосфере. Поток волновой энергии на таких безотражательных профилях сохраняется, что и доказывает возможность переноса энергии на большие высоты. Число таких профилей достаточно велико (около 10), что позволяет аппроксимировать реальные вертикальные распределения скорости звука в земной атмосфере кусочно безотражательными профилями. Не исключено, что их вклад в энергетический баланс может существенно отличаться от принятого в настоящее время, на всем протяжении хромосферы и нижней короны Солнца. Кроме того, аппроксимации реальных профилей в геофизике позволят упростить расчеты волновой динамики, сводя их к решению алгебраических уравнений на “стыке” безотражательных профилей.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (11-05-00216) и Гос. контракта № 02.740.11.0732.

Список литературы

[1] Григорьев Г.И. Акустико-гравитационные волны в атмосфере Земли // Изв. Вузов Радиофизика. 1999. Т. 42, Вып. 1. С. 3 – 25.

[2] Huang C.S, Sofko G.J. Numerical simulations of midlatitude ionospheric perturbations produced by gravity waves // J Geophys. Res. 1998. Vol. 103, N A4. P. 6977 – 6989.

[3] Лайтхилл Д. Волны в жидкостях: Пер. с англ. М.: Мир, 1981.

[4] Ламб Г. Гидродинамика: Пер. с англ. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

[5] Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. Homogenization of the variable - speed wave equation // Wave Motion. 2010. Vol. 47, N 8. P. 468 – 480.