

# Вычислительный эксперимент в задачах добычи природного газа\*

Э.А. БОНДАРЕВ

*Институт проблем нефти и газа СО РАН*

e-mail: bondarev@ipng.ysn.ru

И.И. РОЖИН

e-mail: rozhin@ipng.ysn.ru

К.К. АРГУНОВА

e-mail: akk@ipng.ysn.ru

В вычислительном эксперименте исследовано влияние параметров математической модели на динамику полей давления и температуры при неизотермической фильтрации газа. Для описания процесса использовалась нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, полученная из законов сохранения массы и энергии и закона Дарси, а в качестве замыкающих соотношений - физическое и калорическое уравнения состояния. Граничные условия соответствуют отбору газа при заданном давлении на забое скважины. Показано, что влияние неизотермичности процесса на такие интегральные характеристики, как суммарная добыча, наиболее существенно при умеренных темпах отбора. На примере Средне-Вилюйского месторождения Якутии определена возможность образования гидратов в газоносном пласте.

При добыче природного газа (особенно в районах Сибири и Крайнего Севера) могут возникнуть условия, способствующие образованию и отложению гидратов в скважинах и в их призабойной зоне. В настоящее время эти процессы рассматриваются отдельно, то есть в рамках неизотермической многофазной фильтрации моделируется динамика образования гидратов при различных режимах отбора, а в рамках трубной гидравлики изучается динамика образования гидратов в скважинах [1]– [3]. В последнем случае температура и давление на забое задаются и, как правило, считаются равными пластовым значениям [1, 2]. В настоящей работе сделана первая попытка частично объединить эти два подхода: из решения задачи неизотермической фильтрации несовершенного газа определяются поля давления и температуры в пласте и сравниваются с равновесными условиями образования гидратов.

**Постановка задачи.** Для математического описания отбора газа через одиночную скважину, расположенную в центре круговой залежи, воспользуемся системой уравнений, описывающей неизотермическую фильтрацию несовершенного газа в пористой среде, в которой перенос энергии за счет теплопроводности считается пренебрежимо малым по сравнению с конвективным переносом [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \right) = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right), \quad \bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \quad \bar{t} > 0, \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-05-00024-а

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left(1 + \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{c_p}{R} \frac{\bar{p}}{Z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}\right)^2, \quad \bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \quad \bar{t} > 0, \quad (2)$$

где  $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$ ,  $\bar{r} = \frac{r}{l}$ ,  $\bar{r}_w = \frac{r_w}{l}$ ,  $\bar{r}_k = \frac{r_k}{l}$ ,  $\bar{t} = \frac{\kappa_p t}{l^2}$ ,  $\bar{T} = \frac{c_r T}{m p_0}$ ,  $\kappa_p = \frac{k p_0}{m \mu}$ .

В дальнейшем черта над безразмерными переменными для удобства опускается. Здесь приняты обозначения:  $c_p$  – удельная теплоемкость газа,  $c_r$  – объемная теплоемкость насыщенного газом пласта,  $k$  – коэффициент проницаемости пласта,  $l$  – характерный размер,  $m$  – пористость,  $p$  – давление,  $r$  – радиальная координата,  $R$  – газовая постоянная,  $t$  – время,  $T$  – температура,  $Z$  – коэффициент несовершенства газа,  $\kappa_p$  – пьезопроводность насыщенного газом пласта,  $\mu$  – динамическая вязкость газа; нижние индексы означают: 0 – начальное состояние, k – на контуре питания, w – на стенке скважины.

На стенке скважины задается постоянное давление

$$p = p_w, \quad r = r_w. \quad (3)$$

На контуре питания задаются условия, моделирующие отсутствия потоков фильтрующегося газа и тепла, то есть моделируется водонапорный режим отбора газа:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = r_k. \quad (4)$$

В начальный момент времени давление и температура считаются постоянными:

$$p(r, 0) = 1, \quad T(r, 0) = T_0, \quad r_w \leq r \leq r_k. \quad (5)$$

В качестве уравнения состояния принимается уравнение Латонова-Гуревича [3]:

$$Z = \left(0.17376 \ln \left(\frac{m p_0}{c_r T_c} T\right) + 0.73\right)^{\frac{p_0}{p_c}} + 0.1 \frac{p_0}{p_c} p, \quad (6)$$

где  $T_c$ ,  $p_c$  – критические значения температуры и давления природного газа, который представляет собой смесь газов, в основном парафинового ряда, начиная с метана.

Следует отметить, что в данной постановке температура газа на забое скважины является искомой величиной, определяемой в ходе решения задачи, а уравнение (2) является квазилинейным гиперболическим уравнением первого порядка. Характеристики данного уравнения выходят из правой границы, поэтому граничного условия отсутствия теплового потока (4) достаточно для определения его единственного решения.

Кроме вычисления температуры и давления определялось общее количество добываемого газа  $V = \int_0^t A(t) dt$ ,  $A = \frac{p}{Z T} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_w}$  – безразмерный массовый расход, который выражается через размерные величины следующим образом  $A = \frac{m \mu R M}{2 \pi k H p_0 c_r}$ , где  $M$ ,  $H$  – массовый дебит газа и мощность пласта соответственно.

**Численная реализация модели и ее алгоритм.** Для решения начально-краевой задачи (1)–(6) уравнение (1) аппроксимируем чисто неявной абсолютно устойчивой разностной схемой, которая была выведена для случая плоскопараллельной задачи в работе [4]. Для этого заменим искомые функции их численными аналогами в узлах сетки:

:

$$\left( \frac{p_i^{s+1j+1}}{Z_i T_i^{sj+1}} - \frac{p_i^{sj}}{Z_i T_i^{sj}} \right) \frac{r_i}{\tau} = k_{i+1}^s \left( \frac{p_{i+1}^{s+1j+1} - p_i^{s+1j+1}}{h^2} \right) - k_i^s \left( \frac{p_i^{s+1j+1} - p_{i-1}^{s+1j+1}}{h^2} \right),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, j_0-1}, \quad (7)$$

где  $\tau$  – шаг сетки по времени  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, j_0}\}$ ,  $h$  – шаг сетки по пространству  $\bar{\omega}_h = \{r_i = r_w + ih, i = \overline{0, n}\}$ .

Разностная аппроксимация граничного условия (3) имеет вид:

$$p_0^{s+1j+1} = p_w, \quad j = \overline{0, j_0-1}. \quad (8)$$

Разностный аналог первого граничного условия (4) записывается со вторым порядком аппроксимации. Чтобы получить разностную схему для внешней границы ( $i = n$ ), интегрируем уравнение (1) в элементарной ячейке  $[r_n - h/2, r_n]$  и находим:

$$\left( \frac{p_n^{s+1j+1}}{Z_n T_n^{sj+1}} - \frac{p_n^{sj}}{Z_n T_n^{sj}} \right) \frac{hr_n}{2\tau} = -k_n^s \frac{p_n^{s+1j+1} - p_{n-1}^{s+1j+1}}{h}, \quad j = \overline{0, j_0-1}. \quad (9)$$

Поскольку функция  $T(r, t)$  является достаточно гладкой, то уравнению (2) целесообразно поставить в соответствие безусловно устойчивую неявную разностную схему «уголок» [5]:

$$\frac{T_i^{s+1j+1} - T_i^{sj}}{\tau} = \left( 1 + a_i^s T_i^{s+1j+1} \right) \left( \frac{T_i^{s+1j+1} - T_i^{sj}}{\tau} \right) + b_i^s \left( \frac{T_{i+1}^{s+1j+1} - T_i^{s+1j+1}}{h} \right) - d_i^s T_i^{s+1j+1},$$

$$i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, j_0-1}. \quad (10)$$

С учетом условия (4) для внешней границы ( $i = n$ ) получим схему:

$$\frac{T_n^{s+1j+1} - T_n^{sj}}{\tau} = \left( 1 + a_n^s T_n^{s+1j+1} \right) \left( \frac{T_n^{s+1j+1} - T_n^{sj}}{\tau} \right) - d_n^s T_n^{s+1j+1}, \quad j = \overline{0, j_0-1}. \quad (11)$$

Начальные условия аппроксимируем в виде

$$p_i^{s0} = 1, \quad T_i^{s0} = T_0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (12)$$

В соотношениях (7)–(11) приняты следующие обозначения:

$$k_i^s = \frac{r_{i-1/2} p_{i-1/2}^{sj+1}}{Z_{i-1/2} T_{i-1/2}^{sj+1}}, \quad r_{i-1/2} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad p_{i-1/2}^{sj+1} = \frac{p_{i-1}^{sj+1} + p_i^{sj+1}}{2}, \quad T_{i-1/2}^{sj+1} = \frac{T_{i-1}^{sj+1} + T_i^{sj+1}}{2},$$

$$a_i^s = \frac{1}{Z_i^{sj+1}} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_i^{j+1}, \quad b_i^s = \frac{c_p}{R} \frac{p_i^{s+1j+1}}{Z_i^{sj+1} T_i^{sj+1}} \frac{p_{i+1}^{s+1j+1} - p_{i-1}^{s+1j+1}}{2h},$$

$$d_i^s = \frac{1}{Z_i^{sj+1}} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_i^{j+1} \left( \frac{p_{i+1}^{s+1j+1} - p_{i-1}^{s+1j+1}}{2h} \right)^2, \quad d_n^s = \frac{1}{Z_n^{sj+1}} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_n^{j+1} \left( \frac{p_n^{s+1j+1} - p_{n-1}^{s+1j+1}}{h} \right)^2.$$

Для численной реализации разностной задачи (7)–(12) на каждом временном слое используется метод простых итераций с применением прогоночных алгоритмов.

**Обсуждение результатов.** В вычислительном эксперименте изучалось влияние давления на забое скважины  $p_w$  на динамику изменения температуры и давления в пласте. Кроме этого, оценивалось влияние часто используемого предположения о изотермичности процесса фильтрации на поле давления и на суммарную добычу газа. Расчеты проводились при  $p_w = 150$  атм и  $p_w = 240$  атм, при этом постоянными оставались: параметр  $c_p/R = 5$ , начальная температура пласта  $T_0 = 323$  К, начальное давление  $p_0 = 250$  атм. Критические параметры  $T_c = 205$  К и  $p_c = 46.6$  атм были определены для природного газа Средне-Вилуйского месторождения по методике, представленной в работе [6]. Равновесная температура гидратообразования вычислялась по формуле  $T_{ph}(p) = a \ln p + b$ , где постоянные  $a = 7.01$  К и  $b = 178.28$  К найдены путем аппроксимации кривой термодинамического равновесия, определяемой по методике Е.Д. Слоана [7] при известном составе газа.

Вычисления показали, что изменения поля температур существенны только при интенсивном воздействии на газоносный пласт, когда  $p_w = 150$  атм. Однако даже в этом случае они локализованы в узкой зоне вблизи скважины, а в остальной части пласта температура практически равна начальной. На рис. 1 показано, что на забое скважины температура вначале резко понижается (в приведенном примере это понижение составило 18 К), а затем начинает восстанавливаться (кривая 1). Такая же тенденция прослеживается и на небольшом расстоянии от забоя, но здесь понижение температуры составило 6 К (кривая 2). Однако уже на расстоянии 10 м наблюдается лишь незначительное понижение температуры со временем (кривая 3).

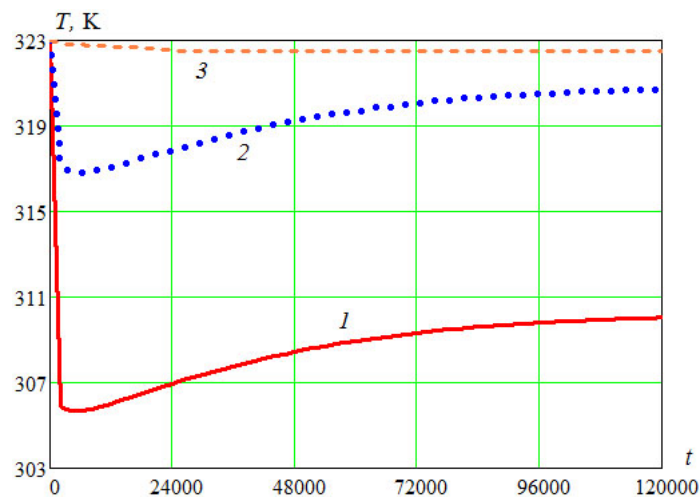


Рис. 1. Динамика изменения температуры при  $p_w = 150$  атм (1 –  $r = 0.1$  м, 2 –  $r = 0.2$  м, 3 –  $r = 10.1$  м)

Теперь перейдем к оценке влияния входных параметров и поля температур на динамику изменения поля давления. Из физических соображений, очевидно, что величина давления в точке отбора газа должна наиболее существенно определять его пространственные изменения во времени. Это хорошо видно на рис. 2, где сравниваются два варианта значений давления на забое при прочих равных условиях: в первом варианте давление существенно изменяется во всех точках пласта, тогда как во втором эти изменения затрагивают только узкую зону вблизи скважины даже при больших значениях

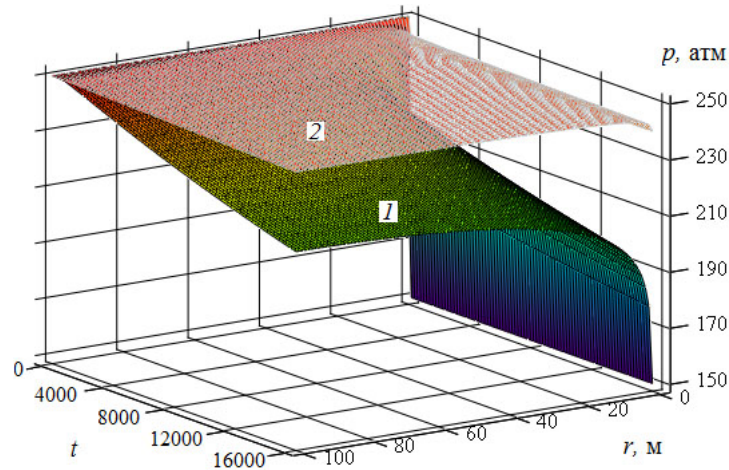


Рис. 2. Динамика поля давления (1 –  $p_w = 150$  атм, 2 –  $p_w = 240$  атм)

безразмерного времени  $t$ . В ходе эксперимента получено, что влияние температурного поля невелико, и при интенсивном отборе газа, то есть при  $p_w = 150$  атм., приводит к недооценке снижения давления. Аналогичная ситуация имеет место и при отборе газа с гораздо меньшей интенсивностью, однако при этом происходит незначительная переоценка снижения давления.

Важно отметить, что на промежуточной стадии процесса ( $t = 160000$ ) указанные выше особенности проявления неизотермичности сохраняются: при большой интенсивности отбора различия невелики (рис. 3, а); однако, при отборе с малой интенсивностью указанная недооценка снижения давления составляет почти 3 атм (рис. 3, б). Следует также обратить внимание на то, что при отборе с малой интенсивностью давление довольно быстро выходит на стационарный режим, и этот выход в изотермической модели наступает раньше, чем в неизотермической.

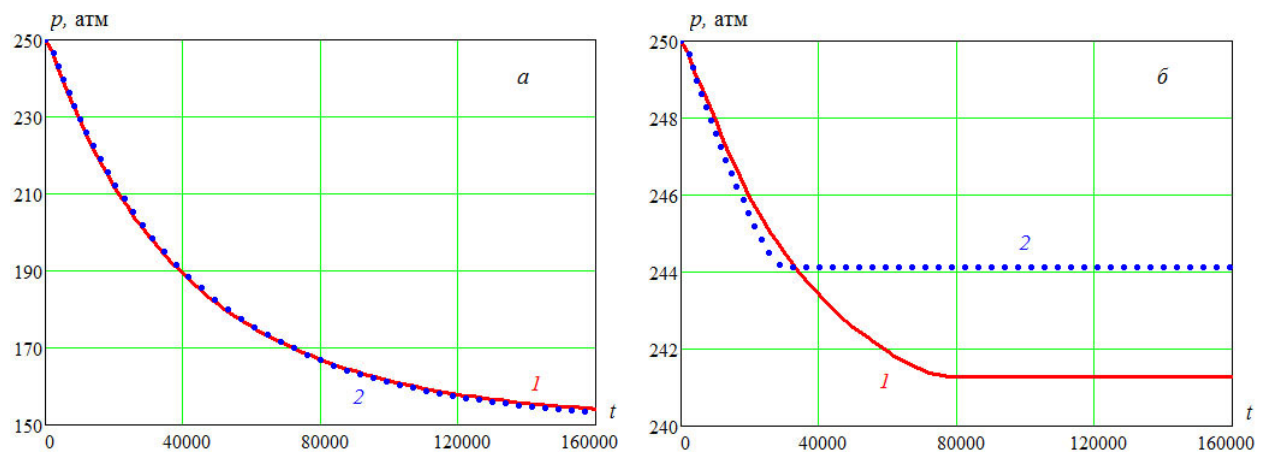


Рис. 3. Давление на границе пласта (1 – неизотермический режим, 2 – изотермический режим): а –  $p_w = 150$  атм; б –  $p_w = 240$  атм

Неизотермичность процесса, несмотря на, казалось бы, незначительное влияние на перераспределение давления в пласте, довольно сильно влияет на прогнозирование суммарного отбора газа (рис. 4). Здесь недооценка роли изменений температурного поля

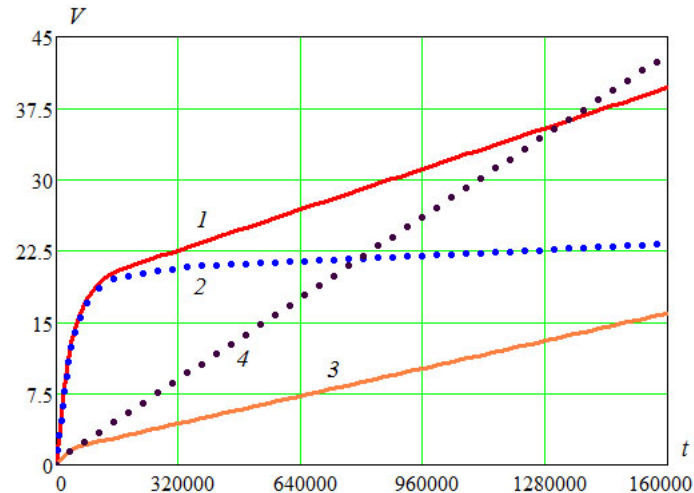


Рис. 4. Накопленная добыча газа (сплошные кривые – неизотермический режим, пунктир – изотермический режим; 1, 2 –  $p_w = 150$  атм, 3, 4 –  $p_w = 240$  атм)

составляет на конец счета 41 % для отбора с большой интенсивностью (кривые 1 и 2) и 63 % при отборе с малой интенсивностью (кривые 3 и 4). Отметим также, что кривые 1 и 2 имеют два характерных почти прямолинейных участка, где излом соответствует переходу на режим истощения залежи. Этот переход происходит гораздо раньше для режима с более интенсивным отбором газа. Первый период, когда суммарная добыча газа растет с большей скоростью, является более продолжительным для неизотермической модели фильтрации. Для отбора с малой интенсивностью (кривые 3 и 4) суммарная добыча газа является линейной функцией времени, причем количество добываемого газа растет более интенсивно в изотермическом режиме. Это означает, что пренебрежение неизотермичностью процесса приводит к завышению потенциального отбора газа при расчетах прогнозируемой добычи.

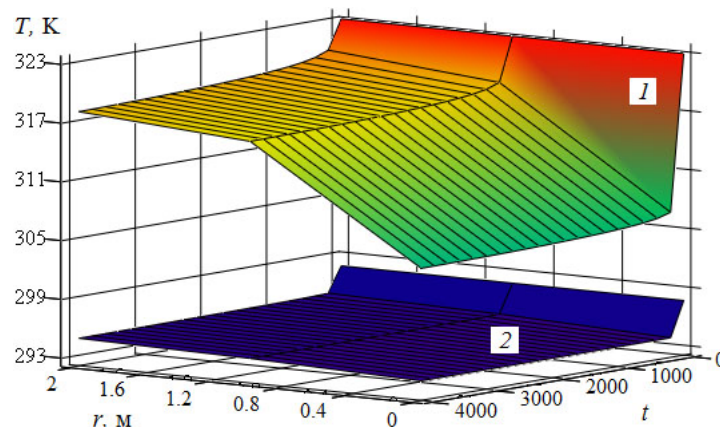


Рис. 5. Температурное поле в призабойной зоне при  $p_w = 150$  атм (1 – температура газа, 2 – равновесная температура гидратообразования)

В заключении оценим возможность образования гидратов в призабойной зоне скважины. Для этого сравним температурное поле в этой зоне с равновесными условиями гидратообразования. Из рис. 5 видно, что температура газа всегда выше равновесной температуры гидратообразования. Конечно, этот результат справедлив только для ука-

занных выше исходных данных, однако он полностью соответствует многолетней истории разработки Средне-Вилуйского месторождения Якутии.

Полученные результаты имеют важное прикладное значение, т. к. демонстрируют важность учета термодинамических процессов при математическом моделировании добычи природного газа.

## Список литературы

- [1] Бондарев Э.А., Габышева Л.Н., Каниболотский М.А. Моделирование образования гидратов при движении газа в трубах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 5. С. 105–112.
- [2] Бондарев Э.А., Аргунова К.К. Математические модели образования гидратов в газовых скважинах // Труды XIV Байкальской Всероссийской конференции "Информационные и математические технологии в науке и управлении". Часть III. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009. С. 41–51.
- [3] Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа /Э.А. Бондарев, В.И. Васильев, А.Ф. Воеводин и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
- [4] Бондарев Э.А., Аргунова К.К., Рожин И.И. Плоскопараллельная неизотермическая фильтрация газа: роль теплопереноса // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82, №6. С. 1059–1065.
- [5] Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
- [6] Kay W.B. Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures // Industrial & Engineering Chemistry Research. 1936. Vol. 28. P. 1014–1019.
- [7] Sloan E. Dendy. Clathrate hydrates of natural gases. N.Y.: Marcel Dekker, 1998.