Однородные изотропные турбулентные течения: геометрия и динамика*

В.Н. Гребенёв

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

e-mail: vngrebenev@gmail.com

Рассматривается двухточечный корреляционный тензор, как метрическое тензорное поле, параметризованное переменной t (временем) в корреляционном пространстве $\mathcal{K}^3$. Вводится и изучается лагранжева система $(M^t, ds^2(t))$ в расширенном пространстве $\mathcal{K}^3 \times R^+$. В частности, получены кинематические законы сохранения, которые являются новыми для однородных изотропных потоков. Изменение во времени лагранжевой ситстемы $(M^t, ds^2(t))$ описывается в терминах продольной корреляционной функции, которая удовлетворяет уравнению Кармана-Ховарта. Для замкнутой модели уравнения Кармана-Ховарта, в пределе больших чисел Рейнольдса, доказывется существование и единственность решения начально-краевой задачи. Установливается асимптотическая устойчивость автомодельного решения по времени и исследуется поведение решения начально-краевой задачи в области больших масштабов корреляции. Кроме того показывается, что при определенных условиях интеграл Лойцянского является законом сохранения данной модели.

1. Введение

Изучается геометрия однородного изотропного турбулентного потока, при построении которой используется двухточечный корреляционный тензор турбулентных пульсаций скорости. Ввиду симметричности тензора по перестановкам индексных переменных, тензор порождает в корреляционном пространстве $\mathcal{K}^3$ (аффинное пространство корреляционных векторов) семейство метрик $ds^2(t)$). Как показано в работе [1], билинейная

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Межрегиональные программы интеграционные проекты СО РАН(проект № 103).

форма $ds^2(t)$ может быть приведена к специальному виду, так называемой, полуприводимой псевдоримановой метрике [2]. Также было показано, что пара $(\mathcal{K}^3, ds^2(t))$ допускает однопараметрическую группу движений (изометрий) и соответствующие кинематические законы сохранения могут быть выведены для лагранжевой системы, которые и будут представлены в данной работе. Их получение элементарно, но они являются новыми в теории однородной изотропной турбулентности.

Глава 2 посвящена изучению деформации области M^t корреляционного пространство $\mathcal{K}^3$, которую мы ассоциируем с выделенным объемом турбулизованной жидкости. Используя результаты [1], мы вводим в $\mathcal{K}^3$ структуру (псевдо-)риманного многообразия. Затем установливаем, что пара $(M^t, ds^2(t))$ порождает натуральную лагранжеву систему, которая обладает двумя кинематическими законами сохранения. Редукция уравнений геодезических (определенных на ∂M^t), с использованием законов сохранения, приводит $(M^t, ds^2(t))$ к лагранжевой системе с одной степенью свободы для каждого момента вреимени t. Отметим, что динамика во времени $(M^t, ds^2(t))$ описывается в терминах корреляционных функций (продольной и поперечной), что позволяет произвести вычисления измения с течением времени, как радиального размера выделенного объема M^t, так и изменение длины M^t вдоль меридианна. Продольная корреляционная функция удовлетворяет незамкнутому уравнению Кармана-Ховарта, которая может быть определеная в рамках процедуры замыкания. Глава 3 посвящена систематическому изучению начально-краевой задачи для замкнутой модели уравнения Кармана-Ховарта представленной в работах [3, 4] и изучается турбулентное движение с большими величинами скоростей пульсации или с большими числами Рейнольдса .

2. Геометрия и динамика однородного изотропного потока

Двухточечный корреляционный тензор имеет следующий вид

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t_c) = \overline{(u_i'(\mathbf{x}; t_c))(u_j'(\mathbf{x}'; t_c))}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}'(\mathbf{x}; t_c)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{x}'; t_c)$ - пульсации скорости в точках $(\mathbf{x}; t_c)$ и $(\mathbf{x}'; t_c)$, $t_c \in R_+$.

2.1. Метрический тензор

Предположение однородности и изотропии позволяет переписать тензор в виде

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t_c) = \overline{u'_i(\mathbf{x}; t_c)u'_j(\mathbf{x}+\mathbf{r}; t_c)}. \tag{2}$$

Кроме того, $B_{ij}(\mathbf{r}, t_c)$ - симметрический тензор, который зависит только от длины $|\mathbf{r}|$ вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, x', t_c)$, $(x, x') \in R^6$, и B_{ij} состоит только из компонент $B_{LL}(|\mathbf{r}|, t_c)$ и $B_{NN}(|\mathbf{r}|, t_c)$ [5]. Здесь используется система координат в которой вектор $\mathbf{r}$ направлен вдоль оси координат $\mathbf{r}_1$. Таким образом, $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1|$ ($\mathbf{r} = |\mathbf{r}_1|\mathbf{e}_1$). Нормализованные корреляционные функции f и g определяются соотношениями $B_{LL} = \overline{u'^2(t)}f(|\mathbf{r}_1|, t)$, $B_{NN} = \overline{u'^2(t)}g(|\mathbf{r}_1|, t)$, где $\overline{u'^2(t)} = B_{LL}(0, t)$ - интенсивность турбулентности. Тензор B_{ij} является метрическим тензором и определяет семейство метрик

$$dl^2(t) = \overline{u'^2(t)}f(|\mathbf{r}_1|, t)dr_1^2 + \overline{u'^2(t)}g(|\mathbf{r}_1|, t)(dr_2^2 + dr_3^2).$$

Квадратичная форма $dl^2(t)$ не является знакоопределенной. В работе [1] дана геометрическая реализация введенной метрики. Вводятся следующие два характерных размера: длина $\mathcal{L}(t)$ вдоль меридиана и радиус $\mathcal{R}_a(t)$ сечения построенной поверхности:

$$\mathcal{L}(t) = 2\int_0^\infty \sqrt{\overline{u'^2(t)}f(|\mathbf{r}_1|, t)}d|\mathbf{r}_1|, \qquad \mathcal{R}_a(t) = \sqrt{|\overline{u'^2(t)}g(|a|, t)|}. \tag{3}$$

Здесь f и g - безразмерные функции такие, что $f(0, t) = g(0, t) = 1$, f является положительной и $f \to 0$ ($g \to 0$) при $|\mathbf{r}_1| \to \infty$; f и g - четные ограниченные функции ($f \leq 1$, $|g| \leq 1$). Нормализованная корреляционная функция $f(|\mathbf{r}_1|, t)$ удовлетворяет уравнению Кармана-Ховарта [6]

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)}f(|r_1|, t)}{\partial t} = \frac{1}{r_1^4}\frac{\partial}{\partial r_1}r_1^4\left(\overline{u'^2(t)}^{3/2}h(|r_1|, t) + 2\nu\frac{\partial}{\partial r_1}\overline{u'^2(t)}f(|r_1|, t)\right), \tag{4}$$

где h - нормализованная функция торойных корреляций.

2.2. Лагранжева система порожденная $ds^2(t)$

Перепишем метрику $ds^2(t)$ в следующем виде [1]

$$ds^2(t) = \overline{u'^2(t)}\{dq^2 + G(q, t)d\phi^2\}, \quad G(q, t) = g(|r_1|, t). \tag{5}$$

Метрика (5) допускает однопараметрическую группу движений (изометрию) $\mathbf{g}_\tau(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{p}, a_1)$, $\mathbf{p} = (q, \phi)$:

$$\mathbf{g}_\tau : (q, \phi) \mapsto (q, \phi + \chi\tau), \quad \chi = \text{const}$$

с порождающим оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial p^i} \equiv \chi \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Скалярное произведение определяется формулой

$$X^2 = \langle X, X \rangle = \left\langle \chi \frac{\partial}{\partial \phi}, \chi \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle \equiv \chi^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = \overline{u'^2(t)} \chi^2 G(q,t). \tag{6}$$

Уравнения геодезических допускают следующие первые интегралы

$$F(z,t)\phi_\theta = \mathcal{M}, \quad F(z,t)(z_\theta^2 + \phi_\theta^2) = \mathcal{N}$$

и

$$-F(z,t)\phi_\theta = \mathcal{M}, \quad F(z,t)(z_\theta^2 - \phi_\theta^2) = -\mathcal{N}$$

соответственно для сигнатур (++) и (+−). Используя их, как инвариантные многообразия уравнения геодезических редуцируются к виду

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + \frac{F_z}{2F} \left(\frac{\pm \mathcal{N} \mp 2\mathcal{M}^2 F^{-1}}{F} \right) = 0,$$

которые представляют собой уравнения движения в потенциальном поле при каждом фиксированном значении времени t. Это движение будет определено, если значения корреляционной функции f известны. Следующий параграф посвящен проблеме вычисления f.

3. Уравнение Кармана-Ховарта

Для уравнения Кармана-Ховарта укажем двухпараметрическую группу растяжений, допускаемую "невязким"представлением (4) (в пределе больших чисел Рейнольдса):

$$G^{a_1,a_2} \, : \, t^* = e^{a_2} t, \quad r^* = e^{a_1} r, \quad \overline{u'^2}^* = e^{2(a_1 - a_2)} \overline{u'^2}, \quad f^* = f, \quad h^* = h. \tag{7}$$

3.1. Группы симметрий допускаемые уравнением Кармана-Ховарта

Двухпараметрическая группа G^{a_1,a_2} допускается "невязким"представлением замкнутой модели уравнения Кармана-Ховарта [3, 4]:

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)} f(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^4 2\kappa_2 r \sqrt{\overline{u'^2}(1-f)} \frac{\partial \overline{u'^2(t)} f(r,t)}{\partial r} \right] \tag{8}$$

и инварианты группы G^{a_1,a_2} позволяют ввести новые автомодельные переменные ξ $\hat{f}$, где r "масштабируется"с помощью интегрального масштаба $\ell_t \propto t^{2/(\sigma+3)}$, а интенсивность турбулентности $\overline{u'^2}$ ведет себя, как $\overline{u'^2} \propto t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}$. Отметим, что группа переносов может быть использована в (8) для сдвига по времени. Полученные инварианты позволяют уменьшить число переменных, и как результат, уравнение (8) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (факторизация (8) по группе G^{a_1,a_2})

$$\frac{2\kappa_2}{\xi^4}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^5(1-\hat{f})^{1/2}\frac{d\hat{f}}{d\xi}\right] + \delta\xi\frac{d\hat{f}}{d\xi} + \gamma\hat{f} = 0, \tag{9}$$

для которого ставятся следующие краевые условия

$$\xi = 0 : \hat{f}(\xi) = 1 \quad \text{and} \quad \xi \to +\infty : \hat{f}(\xi) \to 0, \tag{10}$$

где

$$\delta = \frac{2}{\sigma+3}, \quad \gamma = 2\frac{\sigma+1}{\sigma+3}. \tag{11}$$

3.2. Начально-краевая задача

В этом разделе детально исследована начально-краевая задача для изучаемой замкнутой модели уравнения Кармана-Ховарта в пределе больших чисел Рейнольдса.

Лемма 3.1. *Существует и единственно слабое решение задачи.*

Лемма 3.2. *В условиях леммы 3.1, слабое решение задачи является классическим решением.*

Лемма 3.3. *Полученное слабое решение f задачи сходится к стационарному решению (автомодельному решению $\hat{f}$) задачи при $t \to \infty$ в норме $L^1(q_1, q_2)$.*

Лемма 3.4. *Пусть $\Lambda(0) = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,0)dr < \infty$. Тогда $\partial\Lambda(t)/\partial t = 0$ for all $t \in [0,\infty)$.*

Покажем, что поток $\Phi = U^{1/2}\partial U/\partial y$ является ограниченной функцией в $Q^T = [0,\infty) \times [0,T]$, $0 < T < \infty$.

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия лемм 3.1, 3.4. Предположим, что в начальный момент времени $\Phi(y,t_0) < \infty$ для $y \in [0,\infty)$. Предположим, что $V(y,t_0) \le g_{c^{**}}(y,t_0)$, $y \in [0,\infty)$ и $\sigma = 4$. Тогда $0 \le \Phi(y,t) \le K < \infty$ для $(y,t) \in Q_T$, где K зависит только от $\max_{y\ge 0}\Phi(y,t_0)$. Кроме того, $\Phi(y,t) \le const \cdot y^{4/5}$ для $y \ll 1$ и $\Phi(0,t) = 0$.*

Замечание 3.1. Физически допустимые значения σ принадлежат интервалу $[2,4]$. Обозначим через f_σ семейство решений начально-краевой задачи (**??**),(**??**)-(**??**) для $\sigma \in [2,4]$. Применяя теорему сравнения к решениям $f_{\sigma'}$ и $f_{\sigma''}$ получаем, что $f_{\sigma'}(y,t) \leq f_{\sigma''}(y,t)$, $\sigma' \leq \sigma''$ при соответсвующих начально-краевых условиях, что позволяет получить оценку $U_\sigma(y,t)$ для $\sigma < 4$ вблизи границы (подобную (**??**)), используя результаты леммы 3.5.

4. Заключение

Физический смысл полученных результатов следующий: в случае однородной изотропной турбулентности, двухточечный корреляционный тензор может быть использован для определения семейства метрик в корреляционном пространстве $\mathcal{K}^3$. Последнее позволяет определить геометрию выделяемого объема и изучить его деформация во времени. Размеры данной области определяются в терминах корреляционных функций, которые могут быть вычислены посредством изучения уравнения Кармана-Ховарта, в частности, при исследовании адекватных моделей замыкания.

Список литературы

[1] Grebenev V.N., Oberlack M. A geometric interpretation of the second-order structure function arising in turbulence//Math. Phys. Anal. Geom. 2009. Vol.12. P.1–18.

[2] Kamyshanskij N.R., Solodovnikov A.S. Semireducible analytic spaces "in the large"//Russ. Math. Surv. 1980. Vol.35(5). P.1–56.

[3] Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Об одном способе замыканмя уравнения Кармана-Ховарта//Дин. сплош. среды. 1976. Т.27. С.124–130.

[4] Oberlack M., Peters N. Closure of the two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models//Appl. Sci. Res. 1993. Vol.55. P.533–538.

[5] Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.

[6] von Kármán Th, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence//Proc. Roy. Soc. 1938. Vol.A164. P.192–215.