

НОВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С СИЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

А.О. Мосолапов, В.А. Рукавишников

Вычислительный Центр ДВО РАН, Хабаровск

NEW NUMERICAL METHOD FOR SOLVING MAXWELL EQUATIONS WITH STRONG SINGULARITY

A.O. Mosolapov, V.A. Rukavishnikov

Computing Center of Far-Eastern Branch Russian Academy of Sciences, Khabarovsk

In this note we introduce a notion of R_ν -generalized solution to Maxwell equations with strong singularity in a 2D non-convex polygonal domain. We develop a new weighted edge FEM. Results of numerical experiments prove the efficiency of this method.

Введение

Уравнения Максвелла используются для построения математических моделей электромагнитных волн в физике плазмы, в электродинамике сверхвысоких частот и других разделах физики. Часто при исследовании практических задач область ее решения является невыпуклой, а граница содержит тупые углы. Такая геометрическая особенность приводит к появлению сильных электромагнитных полей, которые, например, оказывают негативное влияние на функционирование различных высокочастотных устройств. С математической точки зрения это проявляется в том, что решение системы уравнений Максвелла имеет сильную сингулярность, интеграл Дирихле от функции решения расходится, и поэтому оно не принадлежит пространству С.Л. Соболева W_2^1 .

В последние два десятилетия краевые задачи для уравнений Максвелла с сильной сингулярностью привлекают внимание многих исследователей из разных стран. Так, группой французских математиков под руководством Ф. Сьярле (P. Ciarlet) и Ф. Ассуа (F. Assous) был разработан метод, называемый методом сингулярных дополнений (SCM), и его различные варианты. Суть этого метода состоит в представлении решения в виде суммы двух слагаемых: первое из них является регулярной составляющей, а второе – сингулярной (см., например, [1]–[4]). Другой подход к решению уравнений Максвелла с сильной сингулярностью, созданный М. Костабел (M. Costabel) и М. Дауг (M. Daug), заключается в предварительной регуляризации исходных уравнений. Для этого в обобщенную постановку вводится дополнительное дивергентное слагаемое с весом, что приводит к эллиптической задаче, эквивалентной первоначальной (см. [5], [6]).

Нами для краевых задач с сильной сингулярностью была разработана теория численных методов на основе введения понятия R_ν -обобщенного решения (см., напр., [7]–[11]). Такой подход позволил в зависимости от особенностей исходных данных (коэффициентов и правых частей уравнения и граничных условий) и геометрии границы области определить весовое пространство или множество, которому принадлежит решение, а так же строить регуляризатор, ограничивающий влияние сингулярности на точность численного нахождения приближенного решения. В настоящей работе для системы уравнений Максвелла с сильной сингулярностью, вызванной наличием тупого угла у границы области, на основе введения R_ν -обобщенного решения создан весовой векторный метод конечных элементов. Численные эксперименты модельных задач показали, что порядок скорости сходимости приближенного решения к точному решению предлагаемого метода более чем в полтора раза выше по сравнению с результатами авторов работ [3] (см. оценку (26)), [6] и [12].

1. Основные обозначения

Пусть R^2 , R^3 – двумерное и трехмерное евклидовы пространства с элементами $x = (x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно. Через Ω будем обозначать ограниченную об-

ласть этих пространств, $\partial\Omega$ – ее граница, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. В случае, когда $\Omega \subset R^2$, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор к $\partial\Omega$. Вектор-функции $f: R^3 \rightarrow R^3$ или $f: R^3 \times [0, T] \rightarrow R^3$ будем обозначать прописными латинскими буквами с чертой: $\bar{E}(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$, а вектор-функции $f: R^2 \rightarrow R^2$ – жирными латинскими или греческими буквами: $\mathbf{E}(x) = (E_1(x), E_2(x))$.

В случае, когда $\Omega \subset R^2$, будем использовать скалярный и векторный операторы rot :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}, \quad \text{rot } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial f}{\partial x_1} \right).$$

С изучением уравнений Максвелла тесно связаны функциональные пространства $H(\text{curl}, \Omega) = \{\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(\Omega) \mid \text{curl } \mathbf{E} \in L_2(\Omega)\}$, $H_0(\text{curl}, \Omega) = \{\mathbf{E} \in H(\text{curl}, \Omega) \mid \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, x \in \partial\Omega\}$,

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{E} \in L_2(\Omega)\}, \quad H(\text{div}0, \Omega) = \{\mathbf{E} \in H(\text{div}, \Omega) \mid \text{div } \mathbf{E} = 0\},$$

$$V = H_0(\text{curl}, \Omega) \cap H(\text{div}0, \Omega).$$

Пусть область $\Omega \subset R^2$ имеет особую точку границы $O(0,0)$. Введем в рассмотрение весовую функцию $\rho(x)$, в некоторой δ -окрестности $B_\delta(O)$ точки $O(0,0)$ совпадающую с расстоянием до нее, а вне этой окрестности равную постоянной δ .

Определим весовое пространство Соболева $H_{2,\nu}^k(\Omega)$ с нормой:

$$\|f\|_{H_{2,\nu}^k} = \left(\sum_{|\lambda| \leq k} \int_{\Omega} \rho^{2(\nu+|\lambda|-k)}(x) |D^\lambda f|^2 dx \right)^{1/2},$$

здесь $D^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$, ν – неотрицательное действительное число, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, λ_1, λ_2 – неотрицательные целые числа, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$. При $k=0$ $H_{2,\nu}^k(\Omega) = L_{2,\nu}(\Omega)$. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать $\mathbf{H}_{2,\nu}^k(\Omega)$, $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$. Через $\mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^k(\Omega)$ обозначим подпространство пространства $\mathbf{H}_{2,\nu}^k(\Omega)$, образованное вектор-функциями с нулевой касательной составляющей на $\partial\Omega$: $\mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^k(\Omega) = \{\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{2,\nu}^k(\Omega) \mid \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ для п.в. } x \in \partial\Omega\}$.

2. Постановка задачи

Пусть Ω – область пространства R^3 . Следуя работам [1], [6], будем предполагать, что граница области сверхпроводящая, среда однородная (вакуум), свободные электрические заряды отсутствуют, а рассматриваемое электромагнитное поле и ток – периодическое во времени с постоянной круговой частотой ω :

$$\bar{E}(x, t) = \bar{E}(x) \exp(-i\omega t), \quad \bar{B}(x, t) = \bar{B}(x) \exp(-i\omega t), \quad \bar{J}(x, t) = \bar{J}(x) \exp(-i\omega t).$$

Тогда система уравнений Максвелла, замкнутая соответствующими граничными условиями, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} i\omega \bar{E} + c^2 \text{rot } \bar{B} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{J}, \\ -i\omega \bar{B} + \text{rot } \bar{E} &= 0, \\ \text{div } \bar{E} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \bar{E} \times \mathbf{n} &= 0, \\ \bar{B} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь \bar{E} – напряженность электрического поля, \bar{B} – индукция магнитного поля, \bar{J} – плот-

ность тока проводимости, c – скорость света, ε_0 – электрическая постоянная.

Следуя [1], будем считать, что \bar{E} , \bar{B} , \bar{J} не зависят от переменной x_3 . Тогда исходную систему (1) можно декомпозировать на совокупность двух систем в двумерной области: с неизвестными $\bar{E} = (E_1, E_2, 0) = \mathbf{E}$, $\bar{B} = (0, 0, B_3) = B$ (ТЕ-волна) и $\bar{E} = (0, 0, E_3) = E$, $\bar{B} = (B_1, B_2, 0) = \mathbf{B}$ (ТМ-волна). В дальнейшем положим $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0] \subset R^2$, т.е. Ω – L-образная область с границей $\partial\Omega$, содержащая тупой внутренний угол величиной $3\pi/2$ с вершиной в точке $O(0, 0)$. Используя стандартный прием (см., напр., [1]), приведем систему (1), записанную для ТЕ-волны, к краевой задаче:

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Поскольку область невыпуклая, то, как известно, решение задачи (2)-(4) принадлежит пространству V и не принадлежит пространству $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (см., например, [1], [5], [6]). Следовательно, для этой задачи нельзя определить обобщенное решение.

Введем для задачи (2)-(4) понятие R_ν -обобщенного решения (см. [7]-[11]). Для этого обозначим через

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = (\mathbf{rot} \mathbf{E}, \mathbf{rot}(\rho^{2\nu} \mathbf{F})) - k^2 (\mathbf{E}, \rho^{2\nu} \mathbf{F}),$$

$$b(\mathbf{F}) = (\mathbf{f}, \rho^{2\nu} \mathbf{F}).$$

билинейную и линейную формы соответственно.

Определение 1. Вектор-функцию $\mathbf{E}(x)$ из пространства $\mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^1(\Omega)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи (2)-(4), если она удовлетворяет условию соленоидальности (3), и для каждой вектор-функции $\mathbf{F} \in \mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^1(\Omega)$ справедливо интегральное тождество:

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = b(\mathbf{F}).$$

3. Построение схемы метода конечных элементов

Построим схему весового векторного метода конечных элементов для нахождения приближенного R_ν -обобщенного решения задачи (2)-(4).

Осуществим триангуляцию области Ω , для этого горизонтальными и вертикальными прямыми $x_1 = -1 + jh$, $x_2 = -1 + lh$, $j, l = \overline{0, N}$, разобьем $\bar{\Omega}$ на совокупность $\{K\} = \{K_i\}_{i=1}^{N_h}$ замкнутых квадратов K_i . Здесь N – положительное целое четное число, $h = \frac{2}{N}$, $N_h = \frac{3N^2}{4}$.

Квадраты K_i будем называть конечными элементами.

Пусть S_1, \dots, S_{S_h} – множество тех сторон конечных элементов K_i , которые не принадлежат границе области $\partial\Omega$: $S = \{S_i, i = 1, \dots, S_{S_h}, S_i \notin \partial\Omega, S_h = \frac{3N^2}{2} - 2N\}$. Обозначим через M_i середину стороны S_i , $i = \overline{1, S_h}$.

Для каждого конечного элемента K_i обозначим через $O^{K_i} = (o_1^{K_i}, o_2^{K_i})$ его центр, $S_j^{K_i}$ – стороны, $M_j^{K_i} = (m_{1j}^{K_i}, m_{2j}^{K_i})$ – середины сторон $S_j^{K_i}$, $j = \overline{1, 4}$.

Введем функции формы элемента K_i , ассоциированные с его сторонами:

$$\Psi_1^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\nu}(m_{11}^{K_i}, x_2) \left(\frac{h}{2} + o_2^{K_i} - x_2 \right) \mathbf{i}, \quad \Psi_2^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\nu}(m_{12}^{K_i}, x_2) \left(\frac{h}{2} + x_2 - o_2^{K_i} \right) \mathbf{i},$$

$$\Psi_3^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\nu}(x_1, m_{23}^{K_i}) \left(\frac{h}{2} + o_1^{K_i} - x_1 \right) \mathbf{j}, \quad \Psi_4^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\nu}(x_1, m_{24}^{K_i}) \left(\frac{h}{2} + x_1 - o_1^{K_i} \right) \mathbf{j},$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} – ортонормированный базис пространства R^2 .

Для каждой стороны $S_i \in S$ введем весовую базисную функцию. Пусть K_m и K_n – два конечных элемента с общей стороной S_i , а $\Psi_j^{K_m}, \Psi_l^{K_n}$ – их функции формы, ассоциированные с этой стороной. Тогда соответствующая базисная функция задается как:

$$\Psi_i = \begin{cases} \Psi_j^{K_m}, & x \in K_m, \\ \Psi_l^{K_n}, & x \in K_n, \\ 0, & x \in \overline{\Omega} \setminus (K_m \cup K_n). \end{cases}$$

Обозначим через \mathbf{V}_h линейную оболочку $\{\Psi_i\}_{i=1}^{S_h}$. Очевидно, что $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_{2,\nu}^1(\Omega)$. В этом подпространстве будем искать приближенное R_ν -обобщенное решение задачи (2)-(4).

Определение 2. Приближенным R_ν -обобщенным решением задачи (2)-(4) по весовому векторному методу конечных элементов будем называть вектор-функцию $\mathbf{E}_\nu^h \in \mathbf{V}_h$, которая для любой вектор-функции $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$a(\mathbf{E}_\nu^h, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h).$$

Приближенное R_ν -обобщенное решение будем искать в виде:

$$\mathbf{E}_\nu^h = \sum_{i=1}^{S_h} d_i \Psi_i,$$

где $d_i = \rho^\nu(M_i)g_i, g_i = \text{const}$.

Неизвестные d_i найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b}, \quad (5)$$

где $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{S_h})^T, A = (A_{ij}), i, j = \overline{1, S_h}, A_{ij} = a(\Psi_i, \Psi_j), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{S_h})^T, b_i = b(\Psi_i)$.

4. Результаты численных экспериментов

Для проведения численного анализа серии модельных задач системы уравнений Максвелла с сингулярностью нами была разработана программа “Проба-III” на основе весового векторного МКЭ, изложенного в п. 3, и GMRES-метода для решения СЛАУ (5). Для найденного приближенного R_ν -обобщенного решения величина ошибки вычислялась как модуль разности с точным решением в серединах сторон конечных элементов и в норме пространства $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$. Здесь мы приведем результаты численного анализа для одной модельной задачи.

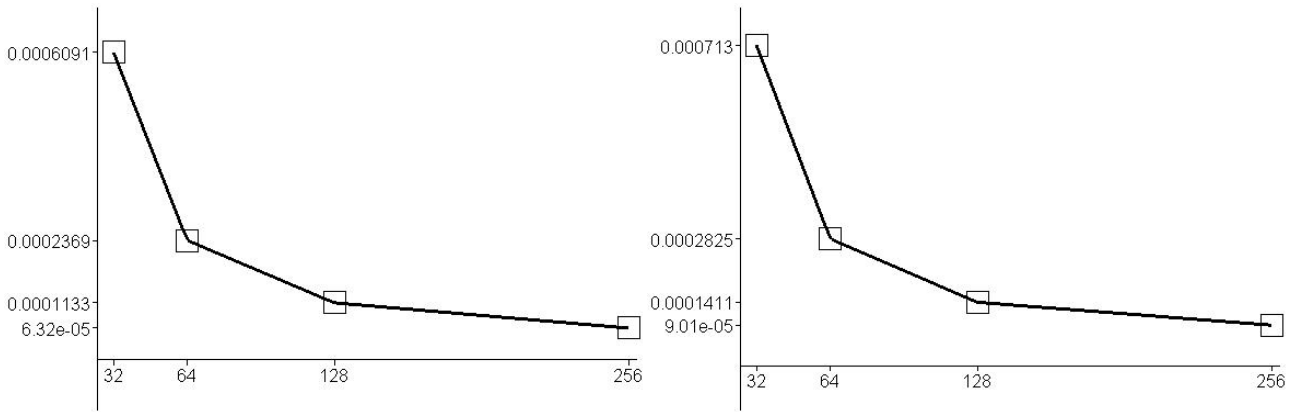
Для этого введем вспомогательную функцию $\phi = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1)^2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3}$. Положим $\mathbf{E} = \text{rot } \phi$. Для данного \mathbf{E} и коэффициентов $k_1 = 300$ и $k_2 = 220$ (частота 14.314 ГГц и 10.5 ГГц соответственно) определялась правая часть \mathbf{f} . Вычисления проводились на сетках с различным шагом h . Результаты тестовых расчетов приведены в таблицах, на графиках и на рисунках.

Таблица 1. Зависимость ошибки $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}$ от количества отрезков разбиения $N, \nu = 2.0, \gamma = 0.3, \delta = 0.084$

($k = k_1$), $\nu = 1.9, \gamma = 0.3, \delta = 0.078$ ($k = k_2$).

N	32	64	128	256
$k = k_1$	0.0006091	0.0002369	0.0001133	0.0000632
$k = k_2$	0.0007130	0.0002825	0.0001411	0.0000901

Результаты, приведенные в таблице 1, также изображены на рисунке 1.



(а)

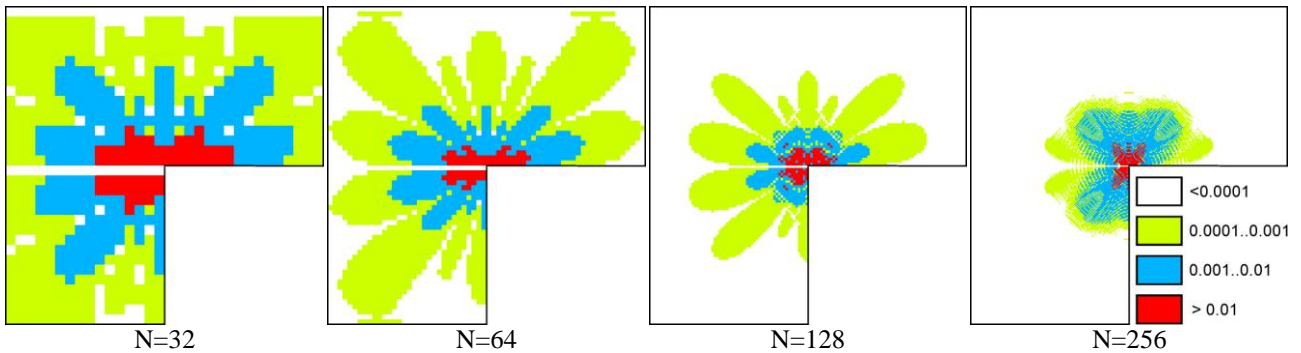
(б)

Рисунок 1. Зависимость ошибки $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_v^h\|_{L_{2,v}(\Omega)}$ от количества отрезков разбиения N , $k = k_1$ (а), $k = k_2$ (б).

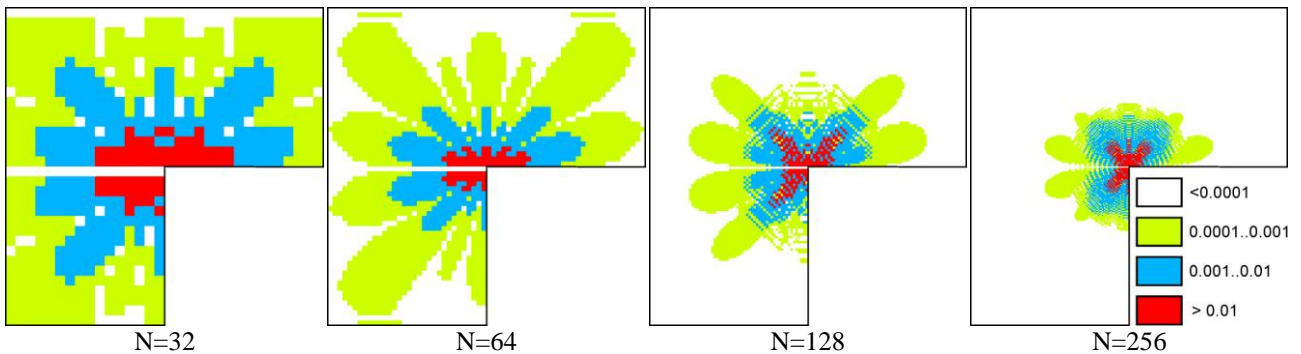
В таблице 2 для найденного приближенного R_v -обобщенного решения мы приводим количество точек (в процентах от их общего числа), в которых погрешности $\delta_{1i} = |E_1(M_i) - E_{1v}^h(M_i)|$, $\delta_{2i} = |E_2(M_i) - E_{2v}^h(M_i)|$, $i = \overline{1, S_h}$, меньше заданной предельной погрешности $\Delta = 10^{-4}$.

Таблица 2. Количество точек (в процентах от их общего числа), в которых погрешности меньше данной предельной $\Delta = 10^{-4}$, $\nu = 2.0, \gamma = 0.3, \delta = 0.084$ ($k = k_1$), $\nu = 1.9, \gamma = 0.3, \delta = 0.078$ ($k = k_2$).

N	32	64	128	256
$k = k_1$	10.33%	34.18%	71.04%	83.64%
$k = k_2$	10.73%	34.43%	69.75%	85.88%



(а)



(б)

Рисунок 2. Распределение точек M_i с погрешностью δ_{ii} в заданных пределах для компоненты E_{1v}^h приближенного R_v -обобщенного решения, $k = k_1$ (а), $k = k_2$ (б).

На рисунке 2 изображено распределение точек M_i с погрешностью δ_i в заданных пределах для компоненты E_{1v}^h приближенного R_ν -обобщенного решения на различных сетках. Рисунок для компоненты E_{2v}^h аналогичный.

Результаты серии расчетов показали, что с измельчением сетки численное решение по весовому векторному методу конечных элементов сходится к точному решению в норме $\|\cdot\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}$ со скоростью $O(h)$, что более чем в полтора раза по порядку степени h превосходит результаты, установленные в работах других авторов (см., например, [3], [6] и [12]); количество узлов с погрешностью, превосходящей заданную предельную Δ , и радиус окрестности, содержащей их, уменьшаются.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00060) и Президиума ДВО РАН (проект 09-П-СО-01-001).

Список литературы

1. Assous F., Ciarlet P., Jr, Segré J. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domain: the singular complement method // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 161, No 1. P. 218–249.
2. Assous F., Ciarlet P., Jr., Garcia E. Singular electromagnetic fields: inductive approach // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2005. Vol. 341, No 10. P. 605–610.
3. Assous F., Ciarlet P., Jr., Garcia G., Segré J. Time-dependent Maxwell's equations with charges in singular geometries // Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. 2006. Vol. 196, No 1-3. P. 665–681.
4. Buffa A., Ciarlet P., Jr., Jamelot E. Solving electromagnetic eigenvalue problems in polyhedral domains // Numer. Math. 2009. Vol. 113, No 4. P. 497–518.
5. Costabel M., Daug M., Schwab C. Exponential convergence of hp-FEM for Maxwell's equations with Weighted Regularization in polygonal domains. // Math. Model. Meth. Appl. Sci. 2005. Vol. 15, No 4. P. 575–622.
6. Costabel M., Daug M. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains // Numer. Math. 2002. Vol. 93, No 2. P. 239–277.
7. Рукавишников В.А. О дифференциальных свойствах R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле // ДАН. 1989. Т. 309. С. 1318–1320.
8. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // ДАН. 1994. Т. 338. С. 731–733
9. Беспалов А.Ю., Рукавишников В.А. Экспоненциальная скорость сходимости метода конечных элементов для задачи Дирихле с сингулярностью решения // ДАН. 2000. Т. 374. № 6. С. 727–731.
10. Rukavishnikov V.A. Methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2009. Vol. 24, No 6. P. 565–590.
11. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // J. Comput. Appl. Math. 2010. Vol 234, No 9. P. 2870–2882.
12. Jamelot E. A nodal finite element method for Maxwell's equations // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2004. Vol. 339, No 11. P. 809–814.
13. J.M. Jin The finite element method in electromagnetics. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 753.