Об одном численном алгоритме решения пространственных обратных задач теории упругости на примере решения задачи для полупространства*

А.И. Чанышев
Институт горного дела СО РАН
e-mail: lykola@yandex.ru

Предложена методика определения напряжений, деформаций, смещений, пустот, включений в массиве горных пород по данным измерений смещений на его поверхности.

Ближе всего к данной тематике подходят работы [1-12]. В [1-3] предложен экспериментально – аналитический метод определения НДС массива пород. В чем его суть? Суть заключается в определении смещений на поверхностях обнажений и в применении этой информации для определения НДС массива пород. При этом для определения смещений внутри массива пород решается вторая краевая задача теории упругости и никак не используются условия свободной от напряжений поверхности. По найденным смещениям внутри области находятся затем деформации, напряжения и т.д. Примерно по такой же схеме строятся решения в [4-6]. Суть их такая же. Берется первая, вторая или третья краевая задачи с какими-то заданными условиями на границах, отыскивается решение с некоторой свободой в задании граничных условий, эта свобода ограничивается стремлением приблизиться к реальным значениям смещений на какой – то заданной части поверхности обнажения. С другой стороны, есть работы [7-12] с совершенно новой постановкой задач когда изначально решается не краевая задача теории упругости, а задача Коши с заданными на одной и той же границе самой функцией и её производной. В данном случае роль функции играют смещения, а её производными являются деформации или напряжения. Ниже эта постановка применяется для решения задачи об определении напряженно – деформированного состояния полупространства, его дефектности по данным измерений смещений на его границе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ Пусть задано полупространство, ограниченной плоскостью $z = 0$. Система координат - $x0yz$.

Пусть на границе полупространства заданы смещения в виде функций двух переменных x, y:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y). \tag{1}$$

Предполагается, что внутри полупространства выполняются уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{2}$$

Справедливы соотношения закона Гука:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\nu\ \varepsilon_y + \nu\ \varepsilon_z + (1-\nu),\ \varepsilon_x\right],$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-05-00327-а), СО РАН (интеграционные проекты № 61, 69, 74).

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left[\nu\,\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_z + (1-\nu),\ \varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left[\nu\,\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y + (1-\nu)\,\varepsilon_z\right] \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\left(\frac{\partial\,u}{\partial y} + \frac{\partial\,v}{\partial x}\right) = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\partial\,u}{\partial y} + \frac{\partial\,v}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{xz} = 2\mu\,\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\,u}{\partial z} + \frac{\partial\,w}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\,\varepsilon_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\,v}{\partial z} + \frac{\partial\,w}{\partial y}\right),$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$.
Справедливы соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}.\right) \tag{4}$$

Пусть ещё внутри полупространства имеются некоторые полости, вид которых, вообще говоря, неизвестен. Получим уравнения для обнаружения этих пустот. Пусть L - одна из этих полостей и $\mathbf{n}$ - нормаль к её поверхности. Так как полость свободна от напряжений, то на её границе должны иметь место соотношения:

$$\sigma_{ij}n_j = 0. \tag{5}$$

Отметим, что (5) можно рассматривать как систему уравнений для отыскания направляющих косинусов n_x, n_y, n_z. Чтобы решение (5) существовало необходимо, чтобы её определитель Δ был нулевой. Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \tag{6}$$

то условие существования полости в данной точке массива пород есть

$$\Delta = 0. \tag{7}$$

Если полость нагружена каким-то давлением p, то вместо (5) следует писать

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x\,n_x + \tau_{xy}\,n_y + \tau_{xz}\,n_z = p\,n_x, \\ \tau_{xy}\,n_x + \sigma_y\,n_y + \tau_{yz}\,n_z = p\,n_y, \\ \tau_{xz}\,n_x + \tau_{xy}\,n_y + \sigma_z\,n_z = p\,n_z. \end{array} \right. \quad (5)'$$

Тогда вместо Δ получаем определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{vmatrix}.(6)'$$

Проверяя в каждой точке полупространства условие $\Delta' = 0$, меняем p. В принципе можно подобрать такое значение p, при котором условие Δ' будет выполняться для некоторой поверхности K. Это будет означать, что в этом месте полупространства существует полость, нагруженная давлением p.

Несколько слов о жестких включениях. Как и прежде (при рассмотрении полости), проверяем условие

$$(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0), \tag{8}$$

где u_0, v_0, w_0 - некоторые наперед заданные числа. Если условие (8) выполняется вдоль некоторой поверхности M, то возможно сказать, что поверхность M ограничивает некоторое жесткое включение, которое движется в массиве пород как целое со смещениями (u_0, v_0, w_0).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Прежде всего из двух условий: из (1) и условия того, что полупространство свободно от напряжений, что означает
$\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$ при $z = 0$,
найдем все напряжения и деформации на контуре $z = 0$.

Из того, что $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ - известные функции, следует, что возможно определить[1]) частные производные от этих функций по переменным x, y, то есть возможно найти деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{9}$$

найти компоненту вектора поворота $\boldsymbol{\omega} = rot\ \mathbf{u}$ вдоль оси z:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь граничные условия для напряжений. Из того, что $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$ при $z = 0$ и закона Гука в форме (3) следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right), \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{11}$$

то есть все частные производные от функций u, v, w по переменной z в плоскости $z = 0$ определяются. Это означает в силу (3), что при $z = 0$ становятся известными напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} и недостающие компоненты вектора поворота $\boldsymbol{\omega} = rot\ \mathbf{u}$. В силу (12) они равны

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{12}$$

Зная все компоненты тензора напряжений T_σ на контуре $z = 0$, можно оценить уже напряженно-деформированное состояние полупространства: по какому-либо критерию определить наличие на плоскости $z = 0$ зон пластических деформаций, зон запредельного деформирования материала. Если они имеют место, то в соответствующих точках плоскости $z = 0$ необходимо произвести перерасчет производных $\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ с использованием не закона Гука, а других определяющих соотношений, отвечающих тому или другому неупругому состоянию среды. Произвести затем переоценку в рассматриваемых точках напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} недостающих компонент вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$: ω_x,

[1]Предполагаем, что необходимый порядок производных u , v , w существует.

ω_y. Таким образом на уровне $z = 0$ все напряжения и деформации, компоненты вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ определяются. Дальнейшая задача заключается в определении этих величин и компонент вектора смещения $\mathbf{u}$: u, v, w - на глубине $z = -h$, где h - малая величина, $h > 0$.

Опишем алгоритм определения искомых величин для случая упругости. Пусть известны все напряжения и деформации, компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ на границе $z = 0$. Это означает, что на границе $z = 0$ становятся известными производные от этих величин вида $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$, $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$, то есть в каждом уравнении (2) слева становятся известными две производные из трех. Это означает, что можно определить неизвестные производные:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \gamma\right). \end{array}\right. \tag{13}$$

Запишем аппроксимации производных в (14). Имеем

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}(x,y,0) - \tau_{xz}(x,y,-h)}{h}, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}(x,y,0) - \tau_{yz}(x,y,-h)}{h}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\sigma_z(x,y,0) - \sigma_z(x,y,-h)}{h}. \end{array} \tag{14}$$

Приравнивая (15), (14), получаем значения напряжений, τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z на нижнем слое (на слое $z = -h$):

$$\begin{array}{c} \tau_{xz}(x,y,-h) = \tau_{xz}(x,y,0) + h\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right), \\ \tau_{yz}(x,y,-h) = \tau_{yz}(x,y,0) + h\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right), \\ \sigma_z(x,y,-h) = \sigma_z(x,y,0) + h\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \gamma\right). \end{array} \tag{15}$$

Для определения смещений на нижнем слое $z = -h$ используем соотношения (12). Из них следует, что

$$\begin{array}{c} \frac{w(x,y,0) - w(x,y,-h)}{h} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right), \\ \frac{u(x,y,0) - u(x,y,-h)}{h} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{v(x,y,0) - v(x,y,-h)}{h} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \end{array} \tag{16}$$

где выражения слева - это производные от функций u, v, w на плоскости $z = 0$. Из (17) следует определение смещений u, v, w на глубине $z = -h$:

$$\begin{array}{c} u(x,y,-h) = u(x,y,0) + h\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v(x,y,-h) = v(x,y,0) + h\frac{\partial w}{\partial y}, \\ w(x,y,-h) = w(x,y,0) + h\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right). \end{array} \tag{17}$$

Таким образом ситуация повторяется. На контуре $z = -h$ становятся известными и напряжения σ_z,τ_{xz}, τ_{yz}, и смещения u, v, w. Дальнейший ход вычислений следующий.

Из третьего соотношения закона Гука (3) определяется производная $\frac{\partial w}{\partial z}$ или деформация ε_z в виде:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + \frac{1-2\nu}{2\mu}\sigma_z. \tag{18}$$

Таким же образом из пятого и шестого уравнений определяются производные

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{\mu} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{\mu} - \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{19}$$

Далее находятся все деформации, компоненты вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$, все напряжения. Делается оценка и переоценка напряженно-деформированного состояния на слое $z = -h$. Вычисляются производные от напряжений σ_x, τ_{xy}, σ_y, τ_{xz}, τ_{yz} в плоскости $z = -h$. Для определения напряжений на слое $z = -2h$ используются уравнения равновесия (2). По соотношениям (19), (20) находятся смещения u, v, ω на слое $z = -2h$. Также делается все для слоя $z = -3h$, $z = -4h$ и т.д. После того, как будет построено во всем полупространстве поле напряжений, деформаций и смещений делается анализ этого поля на возможную дефектность по указанной выше схеме, то есть в каждой точке проверяется условие (7) или $\Delta' = 0$, условие (8). Ведется поиск полостей, жестких включений.

В качестве теста на плоскости $z = 0$ брались следующие выражения напряжений и смещений: полагалось, что в виде следующих функций заданы напряжения

$$\frac{\sigma_z}{p} = \left[1 - \frac{a^3}{(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}\right] \cdot \frac{H^2}{x^2+y^2+H^2} - \left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^3}{(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}\right]\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+H^2},$$

$$\frac{\tau_{xz}}{p} = \frac{3}{4}\frac{2a^3hx}{(x^2+y^2+H^2)^{5/2}}, \frac{\tau_{yz}}{p} = \frac{3}{4}\frac{2a^3hy}{(x^2+y^2+H^2)^{5/2}},$$

перемещения

$$\frac{u_x}{p} = -\left[\frac{1-2\nu}{E} + \frac{a^3}{4\mu(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}\right] \cdot x, \frac{u_y}{p} = -\left[\frac{1-2\nu}{E} + \frac{a^3}{4\mu(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}\right] \cdot y,$$

$$\frac{u_z}{p} = -\left[\frac{1-2\nu}{E} + \frac{a^3}{4\mu(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}\right] \cdot H.$$

По данному распределению напряжений, смещений на границе $z = 0$ по указанной выше схеме определялось распределение напряжений, деформаций, смещений на слоях $z = -h$, $z = -2h$, $z = -3h$ и так далее. Полученные численные решения при шаге $h = 0.1H$ сравнивались с аналитическим решением. Расчеты достаточно близки к аналитическому решению. Для нашего случая в сферических координатах с центром в точке с координатами $x, y, -H$ последнее имеет вид

$$\frac{\sigma_\rho}{p} = -\left(1 - \frac{a^3}{\rho^3}\right), \frac{\sigma_\theta}{p} = -\left(1 + \frac{a^3}{2\rho^3}\right) = \frac{\partial \sigma_\Psi}{p}, \tag{20}$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2+(z+H)^2}$.

Далее составлялся определитель Δ согласно (6). В главных осях его вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_\rho & 0 & 0 & \\ 0 & \sigma_\theta & 0 & = 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\Psi & \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем $\sigma_\rho = 0$ или уравнение сферы $\rho = a$. Из-за недостатка места здесь не приводятся картинки, иллюстрирующие согласование расчетных и аналитических зависимостей.

ВЫВОД

Построена методика определения напряжений, деформаций, смещений, пустот, включений в массиве горных пород по данным измерений смещений на его поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Грицко Г.И., Власенко Б.В., Шемякин Е.И.** Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в массиве горных пород. Новосибирск, Издательство: Наука, 1976, 187 с.

2. **Грицко Г.И., Власенко Б.В., Мусалимов В.М.** Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте // ФТПРПИ, 1971, № 1, 35—44.

3. **Грицко Г.И., Власенко Б.В., Посохов Г.Е.** и др. Прогнозирование и расчет проявлений горного давления. 1980, 160 с.

4. **Назаров Л.А., Назарова Л.А.** Метод интерпретации данных геодезических измерений для реконструкции напряженно-деформированного состояния массива горных пород // Доклады РАН, 2004, Т.395, № 5, 681-684.

5. **Назарова Л.А., Назаров Л.А.** Метод определения параметров очага готовящегося землетрясения на основе данных о смещениях дневной поверхности // Доклады РАН, 2009, Т.427, № 4, 534-538.

6. **Назаров Л.А., Назарова Л.А., Козлова М.П.** Моделирование очагов динамических явлений на основе решения обратной задачи по геодезическм данным // Физическая мезомеханика, 2008, № 1, 51-54.

7. **Шваб А.А.** Существенно переопределенная задача теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем., 4:1, 2001, 204–207.

8. **Шваб А.А.** Обратная переопределенная задача для неоднородной упругой среды // Сиб. журн. индустр. матем., 7:4, 2004, 141–147.

9. **Шваб А.А.** Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1989, № 6, 98-106.

10. **Шваб А.А.** О задаче томографии в потенциальных статических полях // Сиб. журн. индустр. матем., 2:1, 1999, 196–202.

11. **Шваб А.А.** Неклассическая упруго-пластическая задача // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1988, № 1, 140-146.

12. **Чанышев А.И., Абдулин И.М.** Характеристики и соотношения на характеристиках на запредельной стадии деформирования горных пород // ФТПРПИ, 2008, № 5, 27-41.