Определяющие соотношения запредельного деформирования горных пород*

А.И. Чанышев, И.М. Абдулин
Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: lykola@yandex.ru

Как у всех тел сопротивление деформированию у горных пород вначале возрастает, достигая пика, затем с ростом деформаций падает. Причем падение не скачкообразное, а непрерывное, что определяется в экспериментах на жесткое нагружение образцов, при котором контролируются смещения захватов испытательных машин. В работе ставится задача построения определяющих соотношений допредельного и запредельного деформирования горных пород, отражающих изменение сопротивления среды с ростом деформаций. Ставится задача определения двух паспортных зависимостей горных пород, одна из которых имеет вид прямой линии. Показывается, что в применении к описанию состояний плоской деформации система дифференциальных уравнений задачи относится к гиперболическому типу. Причем характеристик в случае запредельного деформирования горных пород не две, а четыре. В общем случае они попарно неортогональны, зависят от значения модуля спада, предела прочности среды, угла внутреннего трения. Определены характеристики, соотношения на характеристиках, связывающие четыре параметра - максимальное касательное напряжение, среднее напряжение, угол поворота, угол, определяющий направления главных осей тензора напряжений. Показывается, что для определения значений этих параметров необходимо на одном и том же контуре задавать и вектор Коши, и вектор смещений (задача Коши). Исследовались теории запредельного деформирования как деформационного типа, связывающие напряжения с деформациями, так и теории типа пластического течения. Рассматривается применение полученных соотношений к решению задачи о двумерном сжатии плоскости с круговым отверстием, когда в окрестности отверстия материал находится в области запредельного деформирования.

Часть 1. Обработка экспериментальных данных.

На рисунке 1. представлены зависимости $\sigma_z = f(\varepsilon_z)$, $\sigma_z = g(\varepsilon_\varphi)$, где z совпадает с направлением образующей сплошного цилиндрического образца, φ – с тангенциальным направлением.

На представленных зависимостях цифрами указано значения бокового давления, приложенного к образцам, σ_z – осевое сжимающее напряжение; ε_z, ε_φ – деформации. Видна закономерность: чем больше боковое давление, тем кривые выше и длиннее.

Попытаемся эти зависимости представить в классическом тензорном базисе, один из ортов которого – шаровой тензор, другой – девиатор. То есть тензоры T_σ, T_ε рассмотрим

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-05-00327-а), СО РАН (интеграционные проекты № 61, 69, 74).

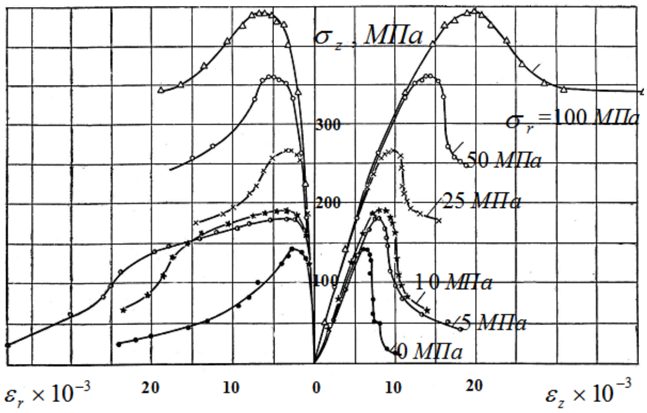

Рис. 1. Полные диаграммы деформирования песчаника [1]

в начале в базисе:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Координаты T_σ, T_ε здесь равны:

$$S_1 = \sqrt{3}\,\sigma_r + \frac{\Delta\sigma_z}{\sqrt{3}}, S_2 = -\frac{2\Delta\sigma_z}{\sqrt{6}}, S_3 = 0;$$

$$\Omega_1 = \sqrt{3}\,\varepsilon_r + \frac{2\Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_z}{\sqrt{3}}, \Omega_2 = \frac{2(\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_z)}{\sqrt{6}}, \Omega_3 = 0.$$

Зависимости $S_1 = S_1(\Omega_1)$, $S_2 = S_2(\Omega_2)$ для песчаника представлены на рисунке 2. Видна

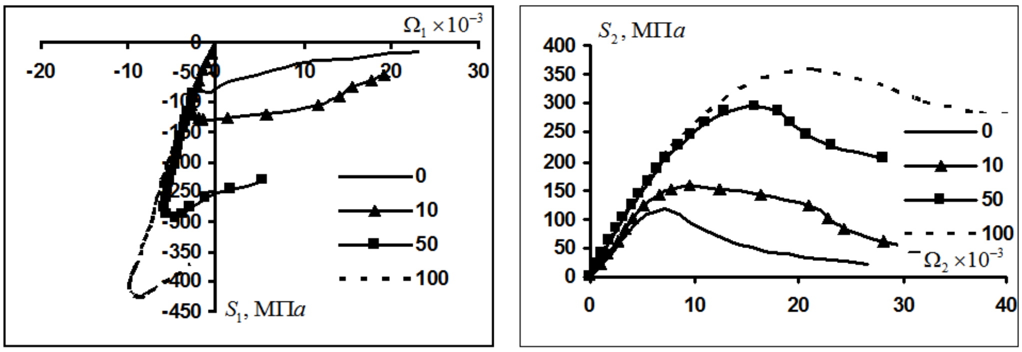

Рис. 2. Зависимости $S_1 = S_1(\Omega_1)$ (рис. a), $S_2 = S_2(\Omega_2)$ (рис. b) для песчаника по данным [1]

дилатансия (рис. 2 слева), на рис. 2 справа отсутствует «единая» зависимость.

Повернем базис (1) вокруг орта T_3 на угол $\varphi_* = 35.26^0$. Используем при этом для данного значения угла φ формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} S_m = S_1 \cos\varphi - S_2 \sin\varphi, \ S_l = S_1 \sin\varphi + S_2 \cos\varphi, \\ \Omega_m = \Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi, \ \Omega_l = \Omega_1 \sin\varphi + \Omega_2 \cos\varphi. \end{cases}$$

На рис. 3 представлены зависимости $S_m = S_m(\Omega_m)$, $S_l = S_l(\Omega_l)$.

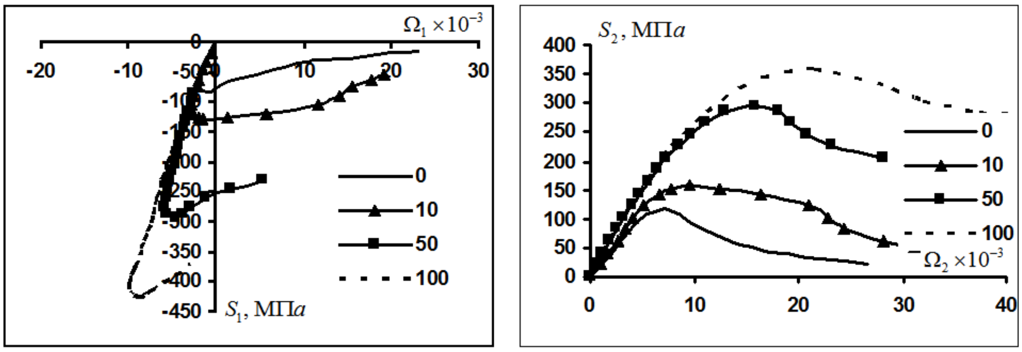

Рис. 3. Зависимости $S_m = S_m(\Omega_m)$ (рис. a), $S_l = S_l(\Omega_l)$ (рис. b) для песчаника по данным [1]

Первая зависимость рисунка 3 аппроксимируется уравнением

$$S_m = 3.2 \times 10^4 \Omega_m \ (\text{МПа}) \tag{2}$$

с коэффициентом корреляции $R = 0.937$. Вторая зависимость –

$$S_l = -2 \cdot 10^{-7}\Omega_l^6 + 4 \cdot 10^{-5}\Omega_l^5 - 3.4 \cdot 10^{-3}\Omega_l^4 + 0.1289\Omega_l^3 - 2.5074\Omega_l^2 + 22.006\Omega_l - 18.108 \tag{3}$$

с коэффициентом корреляции $R = 0.901$.

Утверждается, что (2) справедлива как для упругого деформирования, как для пластического, так и для запредельного деформирования (аналог зависимости $\sigma = k\varepsilon$ для металлов, где σ - среднее напряжение, ε – средняя деформация). Кроме того утверждается, что зависимость (3) является единой (аналог «единой» зависимости $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ для металлов, где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций соответственно).

Часть 2. Определяющие соотношения. Характеристики и соотношения на характеристиках при плоской деформации для горных пород в случае запредельного деформирования.

Рассмотрим (2), (3) для описания запредельного деформирования при плоской деформации. Основные соотношения для теории типа пластического течения имеют вид:

$$\Delta\tau' = \frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \Delta\tau_{xy}\sin 2\theta, \quad \Delta\tau'' = \frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \Delta\tau_{xy}\cos 2\theta.$$

$$-\frac{\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \Delta\varepsilon_{xy}\cos 2\theta = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \Delta\tau_{xy}\cos 2\theta\right) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_l &= \left(\tfrac{\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \Delta\varepsilon_{xy}\sin 2\theta\right)\cos\varphi_* + \tfrac{\Delta\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_y}{2}\sin\varphi_* = \\ &= -\tfrac{1}{2\mu_*}\left[\left(\tfrac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \Delta\tau_{xy}\sin 2\theta\right)\cos\varphi_* + \tfrac{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y}{2}\sin\varphi_*\right],\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_m &= -\left(\tfrac{\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \Delta\varepsilon_{xy}\sin 2\theta\right)\sin\varphi_* + \tfrac{\Delta\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_y}{2}\cos\varphi_* = \\ &= \tfrac{1}{2k}\left[-\left(\tfrac{\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \Delta\tau_{xy}\sin 2\theta\right)\sin\varphi_* + \tfrac{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y}{2}\cos\varphi_*\right].\end{aligned} \tag{6}$$

Основные соотношения модели запредельного деформирования имеют вид: (4), (5), (6), где $2\mu_*$ – модуль спада на кривой $S_l = S_l(\Omega_l)$ (рис. 3), $2k$ – модуль упругости на кривой $S_m = S_m(\Omega_m)$, 2μ – модуль упругости на кривой $S_l = S_l(\Omega_l)$.

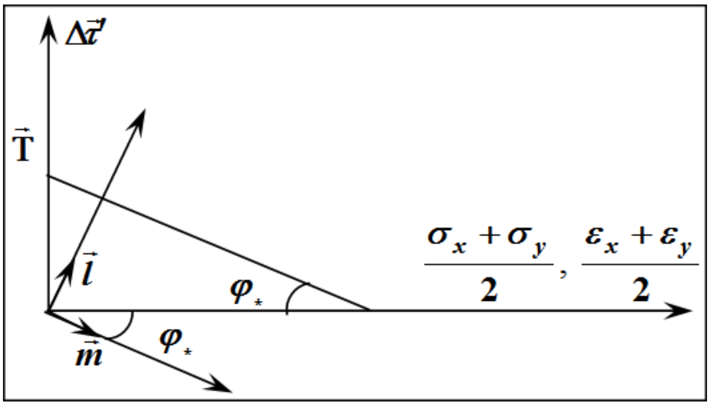

Рис. 4. Плоскость, ортогональная девиаторной, проходящую через векторы $\mathbf{T}$ (девиатор), $\Delta\boldsymbol{\tau}'$ (простое догружение в терминологии [2, 3])

Подстановка (4), (5), (6), в уравнения равновесия приводит к гиперболической системе уравнений. Характеристики системы дифференциальных уравнений получаем в виде:

$$\lambda = tg(\theta+\beta), \text{ где}$$

$$(tg\beta)_{1,\,2,\,3,\,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{c}} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{c}},$$

$$a = \left(1+\frac{\mu_*}{k}\right)\cos 2\varphi_* + \frac{2\mu_*}{\mu}, \quad b = \left(1+\frac{\mu_*}{k}\right)^2\cos^2 2\varphi_* - \frac{4\mu_*}{k}, \quad c = 1-\frac{\mu_*}{k} - \left(1+\frac{\mu_*}{k}\right)\sin 2\varphi_*,$$

т.е. имеем четыре попарно неортогональные характеристики. Эти характеристики связывают четыре параметра: максимальное касательное напряжение Т, среднее напряжение σ, угол θ, задающий главные направления осей тензора напряжений T_σ, компоненту вектора поворота ω_z:

$$\begin{aligned}&\left[\left(C-\tfrac{1}{2\mu}\right)\sin 2\beta - (A+2B+C)\ tg\beta\right]\ \tfrac{\Delta\sigma_x+\Delta\sigma_y}{2} + \left(C-\tfrac{1}{2\mu}\right)\sin(2\beta)\cdot\Delta\mathrm{T} + \\ &+2\mathrm{T}\ \left[\left(C-\tfrac{1}{2\mu}\right)\cos 2\beta - B\right]\ \Delta\theta + \Delta\omega_z = const.\end{aligned}$$

Для решения требуется знать на одной и той же границе и вектор напряжений Коши, и вектор смещений. При этом

$$\begin{cases}\Delta g_n = (C\Delta\mathrm{T} - B\Delta\sigma)\sin 2(\theta-\varphi) + \frac{2\mathrm{T}\Delta\theta\cos 2(\theta-\varphi)}{2\mu} - \Delta\omega_z\ , \\ \Delta g_t = -(C\Delta\mathrm{T} - B\Delta\sigma)\cos 2(\theta-\varphi) + \frac{2\mathrm{T}\Delta\theta\sin 2(\theta-\varphi)}{2\mu} + A\Delta\sigma\ ,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta p_n = \Delta\sigma_x\cos^2\varphi + \Delta\sigma_y\sin^2\varphi + \Delta\tau_{xy}\sin 2\varphi\ , \\ \Delta p_t = \Delta\tau_{xy}\cos 2\varphi - \frac{\Delta\sigma_x-\Delta\sigma_y}{2}\sin 2\varphi\ ,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\Delta p_n = \Delta\sigma + \Delta\mathrm{T}\cos 2(\theta-\varphi) - 2\mathrm{T}\Delta\theta\sin 2(\theta-\varphi)\ , \\ \Delta p_t = \Delta\mathrm{T}\sin 2(\theta-\varphi) + 2\mathrm{T}\Delta\cos 2(\theta-\varphi)\ .\end{cases}$$

где Δg_n, Δg_t – компоненты производной вектора приращений смещений по касательной к граничной кривой.

Часть 3. Решение задачи о деформировании массива пород вокруг выработки.

В работе рассматривается решение задачи о запредельном деформировании массива пород вокруг цилиндрической выработки. Построено поле напряжений и смещений в области запредельных деформаций и в области упругости. Граница раздела этих областей имеет вид эллипса. Решение в области упругости находится посредством применения формул Колосова-Мусхелишвили. Потенциалы φ и ψ в данном случае имеют вид:

$$\begin{gathered}\varphi'(\sigma) = \frac{1}{\aleph+1}\frac{\sigma^2 w'^2(\sigma)}{\overline{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\ \frac{\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}}{2}\Big|_\vartheta + \frac{\aleph w'(\sigma)}{\aleph+1}\ \frac{\sigma_y+\sigma_x}{2}\Big|_\vartheta - \frac{2\mu\ i\sigma w'(\sigma)}{(\aleph+1)\overline{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}(u_x - iu_y)'_\vartheta \\ \psi(\sigma) = \aleph\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \overline{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\varphi'(\sigma)}{w'(\sigma)} - 2\mu\left.(u_x - iu_y)\right|_\theta\end{gathered} \tag{7}$$

Как уже сказано, приводятся результаты вычислений границы, отделяющей области упругого и запредельного деформирования, распределений напряжений, деформаций и смещений в этих областях. В формулах (7) u_x, u_y, $\sigma_x, \sigma_y, i\tau_{xy}$ – граничные значения функций $w(\sigma)$ – отображающая на круг функция. Задача рассчитывалась следующим образом. По известным граничным значениям смещений u_r, u_φ на контуре выработки определялись граничные значения функций Т, σ, θ, ω_z. Далее, двигаясь по четырем характеристикам, определялись значения этих функций внутри области вплоть до границы упругости, на которой $\mathrm{T} = \mathrm{T}_e$, $\Gamma = \Gamma_e$, где T_e, Γ_e – пределы упругости. По известным значениям напряжений, деформаций, смещений на этой границе восстанавливались потенциалы φ и ψ по формулам (7). Определялись напряжения, деформации, смещения в области упругости. Расчеты проводились для разных значений параметров A, B, C в граничных зависимостях

$$u_r = A + B\cos 2\varphi, \quad u_\varphi = C\sin 2\varphi.$$

Выводы

1. Построена математическая модель упругого и неупругого (запредельного) деформирования горных пород с двумя паспортными характеристиками среды, одна из которых – прямая линия.

2. Разработана методика расчета задач о разрушении массива горных пород вокруг выработок на основе предложенных соотношений.

Список литературы

[1] Ставрогин А.И., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.

[2] Христианович С.А. Деформация упрочняющего пластического материала // МТТ.-1974.-№2.

[3] Шемякин Е.И. Анизотропия пластического состояния // ЧММСС.-1973.-Т.4.-№4.

[4] Качанов Л.М. Основы теории пластичности – М.: Наука, 1969.

[5] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Издательство АН СССР, 1949.

[6] Чанышев А.И. О влиянии порядка приложения нагрузок в механике горных пород // ФТПРПИ. – 2000. - №5.

[7] Жуков А.М. Пластические деформации сплава АК-6 при простом и сложном нагружениях // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1966. Вып. 12.

[8] Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Издательство АН СССР, 1963.

[9] Чанышев А.И. К проблеме разрушения деформируемых сред. Ч.1: Основные уравнения // ФТПРПИ. – 2001. – №3.

[10] Шваб А.А. Некорректные статические задачи теории упругости // МТТ.– 1989. – №6.