К устойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска

А.А.Гаврильева
Институт физико-технических проблем Севера им. В.П. Ларионова СО РАН
e-mail: gav-ann@yandex.ru

Ю.Г. Губарев
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Исследуется задача линейной устойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений непрерывно стратифицированной невязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными бесконечными пластинами, находящейся в поле силы тяжести, в приближении Буссинеска. Прямым методом Ляпунова доказано, что данные течения абсолютно неустойчивы относительно малых плоских возмущений. А именно, построена априорная оценка снизу, свидетельствующая об экспоненциальном во времени нарастании рассматриваемых возмущений, и приведен наглядный аналитический пример установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений, а также наложенных на них малых плоских возмущений, растущих со временем согласно сконструированной оценке снизу.

1. Введение

Проблема устойчивости сдвиговых течений стратифицированной жидкости играет важную роль при исследовании различных задач гидродинамики, физики атмосферы, океанологии и других родственных областей науки. К сожалению, она до сих пор не имеет удовлетворительного решения ввиду большой сложности определяющих уравнений. Более того, данная проблема связана с фундаментальной научной проблемой потери устойчивости ламинарного движения жидкости и его перехода к турбулентному состоянию. Первые работы по изучению этой проблемы путем анализа интегральных соотношений были выполнены около ста лет назад. Для рассматриваемых течений Майлс сформулировал достаточное условие устойчивости [1]. В данной работе с помощью новой аналитической методики [2] установлена абсолютная неустойчивость изучаемых установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений стратифицированной жидкости относительно малых плоских возмущений. А именно, построена априорная оценка снизу, которая свидетельствует об экспоненциальном во времени нарастании рассматриваемых возмущений, и приведен наглядный аналитический пример как установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений, так и наложенных на них малых плоских возмущений, растущих со временем согласно сконструированной оценке снизу. Таким образом, показано, что достаточное условие устойчивости Майлса рассматриваемых течений, которое получено им методом интегральных соотношений, является одновременно и необходимым.

2. Постановка задачи

Рассматриваются плоские течения идеальной несжимаемой неоднородной по плотности жидкости между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными неограниченными стенками в поле силы тяжести в приближении Буссинеска. В согласии с данным приближением, пренебрегают изменениями плотности, когда это касается их влияния на инерцию, но, ни в коем случае, не изменениями веса (или плавучести) жидкости [3].

Данные течения описываются эволюционными решениями смешанной задачи вида [1, 3]

$$\widehat{\rho}_0 Du = -p_x,\ \widehat{\rho}_0 Dv = -p_y + \rho g,\ D\rho = 0,\ u_x + u_y = 0 \quad \text{в}\, \tau; \tag{2.1}$$
$$v = 0\, \text{на}\, \partial\tau; u(x,y,0) = u_0(x,y), v(x,y,0) = v_0(x,y),$$

где $\widehat{\rho}_0$ - постоянная средняя плотность жидкости, $\rho(x,y,t)$ - ее возмущения; $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ - составляющие поля скорости жидкости; $p(x,y,t)$ - возмущения поля давления; потенциальное поле силы тяжести $\nabla\Phi = (0,-g), g \equiv \text{const}$; $D \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ - дифференциальный оператор; x, y - декартовы координаты; $\tau \equiv \{x,y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < H\}$ - область течения жидкости; $\partial\tau \equiv \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, y = 0, H\}$ - граница области течения; u_0, v_0 - начальные компоненты поля скорости жидкости; t - время; H - ширина зазора между стенками.

Начально-краевая задача (2.1) имеет точные стационарные решения вида

$$\rho = \rho_0(y),\ u = U(y),\ v = 0,\ p = P(y) \equiv p_0 - \int_0^y \rho_0(y_1)\frac{d\Phi}{dy_1}dy_1 \tag{2.2}$$

(здесь ρ_0, U - некоторые функции ординаты, p_0 - постоянная величина, y_1 - переменная интегрирования).

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в том, чтобы выяснить, могут ли стационарные решения (2.2) быть устойчивыми по отношению к малым плоским возмущениям.

3. Априорная экспоненциальная оценка снизу

Для того чтобы продемонстрировать неустойчивость какого-либо стационарного решения (2.2) смешанной задачи (2.1) по отношению к малым плоским возмущениям, нужно суметь выделить среди этих возмущений всего только одно, но зато экспоненциально быстро нарастающее во времени возмущение. Поиск такого возмущения осуществляется ниже в подклассе плоских течений

$$\xi_{1t} = u' - U\xi_{1x} + \xi_2 dU/dy,\ \xi_{2t} = v' - U\xi_{2x}, \tag{3.1}$$

где $u'(x,y,t), v'(x,y,t)$ - малые плоские возмущения поля скорости; $\xi_1(x,y,t), \xi_2(x,y,t)$ - составляющие поля лагранжевых смещений [2].

В этом подклассе линейным аналогом интеграла энергии служит функционал вида

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{H}[\widehat{\rho}_0(\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2 - U^2\xi_{1x}^2 - U^2\xi_{2x}^2) - \frac{d\rho_0}{dy}g\xi_2^2]dydx. \tag{3.2}$$

Знакоопределенность подынтегрального выражения (3.2) имеется только на состояниях покоя и при следующем распределении плотности рассматриваемой жидкости: $d\rho_0/dy < 0$. Наложение же сколь угодно слабого сдвига скорости «дестабилизирует» течение в смысле нарушения знакоопределенности подынтегрального выражения (3.2). В результате, условий устойчивости точных стационарных решений (2.2) относительно малых плоских возмущений нет. Особо следует заметить, что в коэффициентах формы подынтегрального выражения (3.2) локальное число Ричардсона $\mathrm{Ri} \equiv -(g/\rho_0)(d\rho_0/dy)(dU/dy)^{-2}$ не появляется. Этот факт говорит о том, что локальное число Ричардсона как критерий устойчивости из энергетических соображений не возникает [4].

В интересах последующего изучения удобно ввести в рассмотрение вспомогательный функционал вида [2]

$$M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{H}\widehat{\rho_0}(\xi_1^2 + \xi_2^2)dydx.$$

Для данного функционала, используя свойство сохранения линейного аналога интеграла энергии (3.2), можно извлечь дифференциальное неравенство

$$d^2M/d^2t - 2\lambda dM/dt + 2(\lambda^2 + \alpha)M \geq 0;\ \alpha \equiv \frac{g}{\widehat{\rho_0}}\max_{0\leq y\leq H} \mid \frac{d\rho_0}{dy} \mid > 0, \tag{3.3}$$

где λ - любая вещественная постоянная.

Оказывается, если постоянную величину λ подчинить требованию $\lambda > 0$ и добавить дополнительные условия [2, 5] к неравенству (3.3), то из него будет вытекать искомая априорная экспоненциальная по времени оценка снизу вида

$$M(t) \geq C\exp(\lambda t), \tag{3.4}$$

где C - известная положительная постоянная величина.

Таким образом, согласно определению неустойчивости по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений, доказана принципиальная возможность возникновения и последующей эволюции во времени неограниченно растущих малых плоских возмущений (3.1) точных стационарных решений (2.2). Так как соотношение (3.3) построено без предъявления каких бы то ни было требований ограничительного характера к установившимся плоско-параллельным течениям (2.2), то неустойчивость этих течений относительно малых плоских возмущений (3.1) будет абсолютной.

Далее конструируется пример точных стационарных решений (2.2) и наложенных на них малых плоских возмущений (3.1), развивающихся со временем в соответствии с построенной априорной экспоненциальной оценкой снизу (3.4).

4. Пример

Изучаются малые плоские возмущения (3.1) в форме нормальных волн

$$\xi_1(x,y,t) \equiv f_1(y)\exp(ik(x-ct)),\ \xi_2(x,y,t) \equiv f_2(y)\exp(ik(x-ct)) \tag{4.1}$$

(здесь f_1, f_2 - произвольные функции своего аргумента; i - мнимая единица; $c \equiv c_r + ic_i$ - произвольная комплексная, а k, c_r, c_i - произвольные вещественные постоянные).

Если вместо амплитуды f_2 ввести новую искомую функцию $f \equiv (c-U)f_2$, то соотношения (4.1) позволяют получить так называемое уравнение Тейлора-Гольдштейна [1, 6]

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + (\frac{d^2U/dy^2}{c-U} - k^2 - \frac{d\rho_0/dy}{\rho_0}\frac{g}{(c-U)^2})f = 0 \tag{4.2}$$

с граничными условиями

$$f = 0 \,\text{при}\, y = 0,\ H. \tag{4.3}$$

Согласно приближению Буссинеска, в выражении (4.2) $\widehat{\rho_0}$ заменено на ρ_0 [3].

Здесь уместно вспомнить о достаточном условии линейной устойчивости, установленном ранее Майлсом методом интегральных соотношений в ходе рассмотрения краевой задачи (4.2), (4.3) [1, 6].

Повторяя рассуждения Майлса, нужно сделать еще одну замену искомой функции $h \equiv f/\sqrt{U-c}$; полученное после такой замены уравнение сначала следует умножить на комплексно-сопряженную функцию h^*, а затем отделить в нем мнимую часть:

$$c_i(-\mid \frac{dh}{dy} \mid^2 - k^2 \mid h \mid^2 + \frac{\mid h \mid^2}{(U-c_r)^2 + c_i^2}(\frac{1}{4}(\frac{dU}{dy})^2 + \frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dy})) = \mathrm{Im}[\frac{d}{dy}((U-c)h^*\frac{dh}{dy})]. \tag{4.4}$$

Интегрирование соотношения (4.4) по поперечному сечению зазора и учет граничных условий (4.3) приводят к равенству вида

$$\frac{c_i \mid h \mid^2}{(U-c_r)^2 + c_i^2}(\frac{1}{4}(\frac{dU}{dy})^2 + \frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dy}) = c_i(\mid \frac{dh}{dy} \mid^2 + k^2 \mid h \mid^2), \tag{4.5}$$

если функция dh/dy содержит в себе не более, чем конечное число ветвей. Из соотношения (4.5) следует, что экспоненциально растущие малые плоские возмущения (3.1) в форме нормальных волн (4.1) ($c_i > 0$) могут быть тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ri} < 1/4$ хотя бы в одной точке в пределах области течения жидкости.

Таким образом, получается достаточное условие устойчивости Майлса [6]

$$\mathrm{Ri} \geq \frac{1}{4} \tag{4.6}$$

точных стационарных решений (2.2) смешанной задачи (2.1) по отношению к малым плоским возмущениям (3.1) в виде нормальных волн (4.1) в случае, если последние таковы, что функция dh/dy состоит не более, чем из конечного числа ветвей.

Однако, функция dh/dy может содержать в себе и счетное число ветвей. Это приведет к тому, что в процессе интегрирования уравнения (4.4) по поперечному сечению прослойки между двумя поверхностями слагаемые из его правой части, в силу граничных условий (4.3), будут давать неопределенность типа $0 \cdot \infty$. В результате, ни соотношение (4.5), ни, тем более, достаточное условие устойчивости Майлса (4.6) из уравнения (4.4) не возникнут. Следовательно, тогда, когда функция dh/dy состоит из счетного числа ветвей, могут быть экспоненциально нарастающие малые плоские возмущения (3.1) в форме нормальных волн (4.1) и в том случае, если истинно достаточное условие Майлса (4.6) линейной устойчивости, потому что данные растущие возмущения под его действие не подпадают. Ниже эти рассуждения подкрепляются конкретным аналитическим примером.

Далее исследуется подкласс стационарных решений (2.2) в виде

$$u = U(y) \equiv a + b\,\mathrm{ch}(Cy - l), v = 0, \tag{4.7}$$

$$p = P(y) \equiv p_0 - \int_0^y \rho_0(y_1)\frac{d\Phi}{dy_1}dy_1, \rho_0(y) = q\exp(-my), \text{ где}$$

a, b, C, l и m - произвольные, p_0, q - положительные вещественные постоянные величины.

С помощью переопределения постоянных $m \equiv mg/(C^2b^2), k \equiv \pm k/C, c \equiv c/b - a/b$; замен независимой переменной $x \equiv \mathrm{ch}(Cy - l)$ и $t \equiv (1 - x)/2$; замен искомой функции $w(x) \equiv (x-c)^{-p}f$, $(p(p-1) \equiv m/(1-c^2))$; а также с учетом соотношений (4.7) уравнение Тейлора-Гольдштейна (4.2) примет стандартную каноническую форму уравнения Гойна [7]:

$$t(t-1)(t-\frac{1-c}{2})w_{tt} + (\frac{1}{2}(t-1)(t-\frac{1-c}{2}+\frac{1}{2}t(t-\frac{1-c}{2}+2pt(t-1))w_t+ \tag{4.8}$$

$$+((t-1/2)(p^2-k^2-1) - \frac{c}{2}(p^2-p+k^2))w = 0.$$

Граничные условия (4.3) преобразуются к системе равенств в форме

$$w(t(y=0)) = w(t(y=H)) = 0. \tag{4.9}$$

Для наборов определяющих параметров a, b, C, l, H, k и m, таких что

$$H > 0, 0 < C \leq 2\mathrm{Arcch}(2)/H, l = CH/2, c_r = a; \tag{4.10}$$

1) $\frac{3}{4} \leq \frac{mg}{C^2b^2} \leq \frac{35}{4} : \forall k_m \in (2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}]\, \exists k \in (2\sqrt{2}; k_m)$, где $k_m = \pm\sqrt{\frac{13}{4}C^2 + \frac{mg}{b^2} + 2\sqrt{C^2 + 4\frac{mg}{b^2}}}$, $\Rightarrow c_i = (\frac{mg}{(\sqrt{k^2+C^2}-3C^2/2)(\sqrt{k^2+C^2}-5C^2/2)})^{1/2}$;

2) $\frac{mg}{C^2b^2} > \frac{35}{4} : \forall k_m \in (0;\infty)\, \exists k \in (0; k_m)$, где $k_m = \pm\sqrt{\frac{13}{4}C^2 + \frac{mg}{b^2} - 2\sqrt{C^2 + 4\frac{mg}{b^2}}}$, $\Rightarrow$ $c_i = (\frac{mg}{(\sqrt{k^2+C^2}+3C^2/2)(\sqrt{k^2+C^2}+5C^2/2)})^{1/2}$;

3) $\frac{mg}{C^2b^2} > \frac{35}{4} : \forall k_m \in (2\sqrt{6};\infty) \exists k \in (2\sqrt{6}; k_m)$, где $k_m = \pm\sqrt{\frac{13}{4}C^2 + \frac{mg}{b^2} + 2\sqrt{C^2 + 4\frac{mg}{b^2}}}$, $\Rightarrow$ $c_i = (\frac{mg}{(\sqrt{k^2+C^2}-3C^2/2)(\sqrt{k^2+C^2}-5C^2/2)})^{1/2}$;

существует решение уравнения Гойна (4.8)

$$w(t) = w_1(t(y=0))w_2(t) - w_2(t(y=0))w_1(t) \tag{4.11}$$

которое удовлетворяет граничным условиям (4.9). Здесь $w_1(t)$ - решение Фробениуса в окрестности точки $t = 0$, определяемое степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} g_n^1 t^n$, коэффициенты g_n^1 которого получаются из трехчленного рекуррентного соотношения, возникающего после подстановки (4.11) в уравнение (4.8); $w_2(t) = t^{1/2}\sum_{n=2}^{\infty} g_n^2 t^n$ - другое частное решение уравнения Гойна, чьи коэффициенты g_n^2, по аналогии, получаются из трехчленного рекуррентного соотношения, которое также возникает после подстановки (4.11) в уравнение (4.8) [7]. Наборы определяющих параметров течения жидкости (4.10) взяты таким образом, чтобы выполнялось достаточное условие устойчивости Майлса (4.6).

Отсюда получается, что действие достаточного условия устойчивости Майлса на самом деле не распространяется на малые плоские возмущения (3.1) в виде нормальных волн (4.1), когда функция dh/dy содержит в себе счетное число ветвей. Следовательно, если условие Майлса (4.6) линейной устойчивости течений (2.2) и выполнено для неких малых плоских возмущений (3.1), то никоим образом не для возмущений (3.1), (4.1), (4.7), (4.10), что и указывает на необходимый и достаточный характер данного условия.

5. Заключение

В настоящем докладе рассмотрена задача линейной устойчивости неоднородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска в пространстве между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными неограниченными поверхностями. Прямым методом Ляпунова продемонстрировано, что данные течения абсолютно неустойчивы к малым плоским возмущениям. Построна априорная оценка снизу, свидетельствующая об экспоненциальном во времени росте исследуемых малых возмущений. Приведен наглядный аналитический пример стационарных плоско-параллельных сдвиговых течений неоднородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска в прослойке между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными неограниченными поверхностями и наложенных на эти течения малых плоских возмущений в форме нормальных волн, которые развиваются со временем в согласии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу несмотря на справедливость условия линейной устойчивости Майлса. Таким образом, показано, что достаточное условие устойчивости Майлса рассматриваемых течений, которое получено им методом интегральных соотношений, широко используемым в линейной теории гидродинамической устойчивости, является одновременно и необходимым. Следует подчеркнуть, что с математической точки зрения представленные в данной работе результаты служат, в большинстве своем, априорными, поскольку теоремы существования решений изучавшихся смешанных задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными не доказаны.

Наконец, применение метода интегральных соотношений для рассмотрения задач линейной устойчивости установившихся течений нуждается в строгом описании исследуемых подклассов малых возмущений, так как иначе полученные результаты могут быть ошибочными.

Список литературы

[1] Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10. No. 4. P. 496-508.

[2] Gubarev Yu.G. The development of Lyapunov's direct method in the application to new types of problems of hydrodynamic stability theory // In: Progress in nonlinear analysis research / Ed. Erik T. Hoffmann. Chapter 7. New York: Nova Science Publishers, inc., 2009. P. 137-181 (ISBN 978-1-60456-359-7).

[3] Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.

[4] Владимиров В.А Об интегралах плоских движений идеальной несжимаемой неоднородной по плотности жидкости // Механика жидкости и газа. 1987. № 3. С. 16-20.

[5] Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 104 с.

[6] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. Г.Г. Цыпкина. Под ред. А.Т. Ильича. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 288 с. (ISBN 5-9221-0629-5).

[7] Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. Пред. А. Зеегера. С.-Пб.: Невский диалект, 2002. 312 с.