ПОЛНЫЕ НЕЛИНЕЙНО–ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ПЛОСКОСТИ И СФЕРЕ

З.И.Федотова[1], Г.С.Хакимзянов[1]
[1]Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

THE FULL NONLINEAR DISPERSIVE EQUATIONS OF SHALLOW WATER ON THE PLANE AND ON SPHERE

Z.I.Fedotova[1], G.S.Khakimzyanov[1]
[1]Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

In the paper a new derivation of the plane nonlinear dispersive equations of hydrodynamics for the case of a movable bottom is made. The comparison is carried out with analogous equations on a rotating attracting sphere. It is shown that the transition to the linear velocity and linear coordinates in the nonlinear dispersive equations on a sphere allows us to obtain the plane nonlinear dispersive equations.

Введение

В настоящее время при моделировании распространения длинных океанических волн заметна тенденция к использованию приближенных гидродинамических моделей, учитывающих дисперсию волн и эффекты, связанные со сферичностью и вращением Земли [1]. Однако в ограниченных акваториях вполне удовлетворительными являются нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели, в которых сферичность Земли не учитывается.

Представляет интерес установление связи между уравнениями НЛД-моделей на вращающейся притягивающей сфере [2] и аналогичными уравнениями плановых НЛД-моделей [3].

В настоящей работе приводится новый вывод плановых НЛД-уравнений гидродинамики для случая подвижного дна. Приведены аналогичные уравнения на вращающейся притягивающей сфере, записанные в угловых скоростях и координатах. Показано, что при переходе в последних уравнениях к линейной скорости и линейным координатам на касательной плоскости с последующим пренебрежением сферичностью Земли НЛД-уравнения на сфере переходят в плановые уравнения, к которым добавлены кориолисова и центробежная силы.

1. Постановка задачи для уравнений Эйлера

Рассмотрим ограниченный снизу подвижным дном, а сверху – свободной границей слой несжимаемой идеальной жидкости, предполагая, что вращением Земли и ее сферичностью можно пренебречь, так что свободная поверхность покоящейся жидкости является плоской. Пусть t – время, x, y, z – координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной вертикально вверх, и плоскостью Oxy, совпадающей с невозмущенной плоской поверхностью жидкости. В полной постановке задачи требуется найти компоненты u, v, w вектора скорости, давление p и форму свободной поверхности жидкости η, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}+w_z=0,\quad \boldsymbol{u}_t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+w\boldsymbol{u}_z+\nabla p=0,\quad w_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla w+ww_z+p_z=-g, \tag{1}$$

а также условиям на свободной границе $z=\eta\left(\boldsymbol{x},t\right)$ и подвижном дне $z=-h\left(\boldsymbol{x},t\right)$:

$$\left(\eta_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\eta-w\right)\Big|_{z=\eta}=0,\qquad p\Big|_{z=\eta}=0,\qquad \left(h_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla h+w\right)\Big|_{z=-h}=0, \tag{2}$$

где g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{u}=(u,v)^T$ – вектор горизонтальной составляющей скорости, $\boldsymbol{x}=(x,y)$, $\nabla=\left(\partial/\partial x,\partial/\partial y\right)$, $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=u_x+v_y$.

Для вывода уравнений мелкой воды введем характерные масштабы и перейдем к безразмерным величинам. Пусть L и h_0 – характерные масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно, a_0 – характерная амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$, $\mu = h_0/L$. В соответствии с масштабами определим безразмерные переменные:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{L},\ \bar{z} = \frac{z}{h_0},\ \bar{\eta} = \frac{\eta}{a_0},\ \bar{t} = \frac{t\sqrt{gh_0}}{L},\ \bar{h} = \frac{h}{h_0},\ \bar{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\alpha\sqrt{gh_0}},\ \bar{w} = \frac{w}{\alpha\mu\sqrt{gh_0}},\ \bar{p} = \frac{p}{gh_0}.$$

В новых переменных задача (1), (2) примет вид (надчерки над переменными далее опускаем для упрощения обозначений):

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} + w_z = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \alpha w\boldsymbol{u}_z + \alpha^{-1}\nabla p = 0, \tag{4}$$

$$\mu^2\left(w_t + \alpha\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla w + ww_z\right)\right) + \alpha^{-1}\left(p_z + 1\right) = 0, \tag{5}$$

$$\left(\eta_t + \alpha\boldsymbol{u}\cdot\nabla\eta - w\right)\big|_{z=\alpha\eta} = 0, \tag{6}$$

$$p\big|_{z=\alpha\eta} = 0, \tag{7}$$

$$\left(h_t + \alpha\boldsymbol{u}\cdot\nabla h + \alpha w\right)\big|_{z=-h} = 0. \tag{8}$$

2. Вывод вспомогательных соотношений для приближенной модели

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются $H = \alpha\eta + h$ – полная глубина слоя жидкости и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(x,y,t)$ – вектор скорости в приближенной модели. Возьмем в качестве $\boldsymbol{c}$ осредненную по глубине «горизонтальную» составляющую скорости

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)^T = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{u}\,dz. \tag{9}$$

Проинтегрируем уравнение (3) по толщине слоя и с учетом условий (6), (8) получим цепочку равенств:

$$\int_{-h}^{\alpha\eta}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u} + w_z\right)dz = \nabla\cdot\int_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{u}dz - \left(\alpha\boldsymbol{u}\cdot\nabla\eta - w\right)\big|_{z=\alpha\eta} - \left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla h + w\right)\big|_{z=-h} = \nabla\cdot\int_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{u}dz + \eta_t + \alpha^{-1}h_t,$$

откуда сразу вытекает уравнение неразрывности модели мелкой воды, которое с учетом формулы (9) можно записать в виде:

$$H_t + \alpha\nabla\cdot\left(H\boldsymbol{c}\right) = 0. \tag{10}$$

Выполненный ниже вывод уравнений НЛД-модели опирается на дополнительное предположение о безвихревом характере течения. Для введенных безразмерных переменных из условия потенциальности вытекает соотношение

$$\boldsymbol{u}_z = \mu^2\nabla w, \tag{11}$$

поэтому для вывода НЛД-уравнений целесообразно использовать разложение компонент вектора скорости в ряды по степеням параметра μ^2:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \mu^2\boldsymbol{u}_1 + O\left(\mu^4\right),\quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O\left(\mu^4\right). \tag{12}$$

Цель нижеследующих выкладок – выразить коэффициенты разложения (12) через среднюю скорость $\boldsymbol{c}$, введенную с помощью формулы (9). Подстановка разложения (12) в соотношение (11) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях μ показывает, что функция $\boldsymbol{u}_0$ не зависит от вертикальной координаты z.

Выразим функцию w_0 через $\boldsymbol{u}_0$. Подставив функции w, $\boldsymbol{u}$ в уравнение неразрывности (3), приходим к соотношению $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0 + \left(w_0\right)_z = 0$. Интегрируя его по вертикальной координате и учитывая равенство $\left(\boldsymbol{u}_0\right)_z = 0$, приходим к соотношению

$$\left(z + h\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0 + w_0(z) - w_0\big|_{z=-h} = 0,$$

которое с учетом условия на дне (8), переписанного для первых коэффициентов разложения (12) в виде

$$w_0\Big|_{z=-h} = -\frac{D_0 h}{\alpha}, \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla,$$

позволяет выразить составляющую w_0 вертикальной компоненты скорости через первый член разложения горизонтальной компоненты скорости:

$$w_0 = -\frac{D_0 h}{\alpha} - (z+h)\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0.$$

С помощью этой формулы определим функцию $\boldsymbol{u}_1$ из ряда (12), проинтегрировав по переменной z равенство

$$\left(\boldsymbol{u}_1\right)_z = \nabla w_0,$$

вытекающее из условия (11):

$$\boldsymbol{u}_1(z) = -(z+h)\left(\frac{\nabla D_0 h}{\alpha} + \nabla h(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0)\right) - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) + \boldsymbol{u}_1\Big|_{z=-h}.$$

Полученный таким образом отрезок ряда для скорости $\boldsymbol{u}$ подставим в формулу (9):

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{H}\int_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{u}\, dz = \boldsymbol{u}_0 - \mu^2\left[\frac{H}{2}\left(\frac{\nabla D_0 h}{\alpha} + \nabla h(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0)\right) + \frac{H^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0)\right] + \mu^2\, \boldsymbol{u}_1\Big|_{z=-h} + O\left(\mu^4\right),$$

откуда следует, что $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{c} + O\left(\mu^2\right)$, и выражение для скорости $\boldsymbol{u}$ принимает вид

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + \mu^2 \boldsymbol{V}_1 + O\left(\mu^4\right), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \left(\frac{H}{2} - z - h\right)\left(\frac{\nabla Dh}{\alpha} + \nabla h(\nabla \cdot \boldsymbol{c})\right) + \left(\frac{H^2}{6} - \frac{(z+h)^2}{2}\right)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{c}), \tag{14}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \boldsymbol{c} \cdot \nabla. \tag{15}$$

Что касается вертикальной компоненты скорости, то для всех последующих выводов достаточно ее представление с точностью $O\left(\mu^2\right)$:

$$w = -\frac{Dh}{\alpha} - (z+h)\nabla \cdot \boldsymbol{c} + O\left(\mu^2\right). \tag{16}$$

Выражения (13), (16) будут использованы ниже для вывода НЛД-уравнений движения.

3. Формула для давления и уравнения движения в НЛД-модели

Для выражения давления через переменные НЛД-модели проинтегрируем уравнение (5) по вертикальной координате с учетом динамического условия (7) и, привлекая равенство $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + O\left(\mu^2\right)$ для использования (15) , перепишем этот интеграл в виде соотношения

$$p(z) = \alpha\mu^2 \int_z^{\alpha\eta}\left[Dw + \alpha w w_\varsigma + O\left(\mu^2\right)\right] d\varsigma - z + \alpha\eta. \tag{17}$$

Преобразуя подынтегральное выражение с применением формулы (16), получим:

$$Dw + \alpha w w_z = -\frac{D^2 h}{\alpha} - (z+h) D(\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + \alpha(z+h)(\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2 + O\left(\mu^2\right) = -Q_2 - (z+h)Q_1 + O\left(\mu^2\right),$$

где

$$Q_1 = D(\nabla \cdot \boldsymbol{c}) - \alpha(\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2, \quad Q_2 = \frac{D^2 h}{\alpha}. \tag{18}$$

С привлечением этого соотношения из выражения (17) сразу получается формула для вычисления давления:

$$p = H-(z+h)-\alpha\mu^2\left[\left(H-(z+h)\right)Q_2+\left(\frac{H^2}{2}-\frac{(z+h)^2}{2}\right)Q_1\right]+O\left(\mu^4\right),\ -h\le z\le\alpha\eta. \qquad (19)$$

Основываясь на формулах для давления и вертикальной компоненты скорости, выведем уравнения движения НЛД-модели. Интегрируя уравнение (4) по толщине слоя воды и принимая во внимание динамическое условие (7), приходим к соотношению

$$\int_{-h}^{\alpha\eta}\left(\boldsymbol{u}_t+\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\alpha w\boldsymbol{u}_z\right)dz+\frac{1}{\alpha}\left(\nabla\int_{-h}^{\alpha\eta}p\,dz-p\big|_{z=-h}\nabla h\right)=0. \qquad (20)$$

Преобразуем равенство (20), подставив в него полученные выражения для функций w и p. Выражение членов с давлением с использованием формулы (19) приводит к соотношению:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\nabla\int_{-h}^{\alpha\eta}p\,dz-p\big|_{z=-h}\nabla h\right)=H\nabla\eta-\mu^2\left[\nabla\left(\frac{H^3}{3}Q_1+\frac{H^2}{2}Q_2\right)-H\nabla h\left(\frac{H}{2}Q_1+Q_2\right)\right]+O\left(\mu^4\right).$$

Слагаемое с компонентой скорости w преобразуем, применив формулы (13), (16):

$$\alpha\int_{-h}^{\alpha\eta}w\boldsymbol{u}_z\,dz=\mu^2 Dh\boldsymbol{V}_1\big|_{z=-h}-\mu^2\left(Dh+\alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\right)\boldsymbol{V}_1\big|_{z=\alpha\eta}+O\left(\mu^4\right).$$

Тогда первый интеграл из уравнения (20) приводится к виду:

$$\int_{-h}^{\alpha\eta}\left(\boldsymbol{u}_t+\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\alpha w\boldsymbol{u}_z\right)dz=H\left(\boldsymbol{c}_t+\alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}\right)-\mu^2\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h}\left[h_t+\alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla h)-Dh\right]-$$

$$-\mu^2\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta}\cdot\left[(\alpha\eta)_t+\alpha\left(\boldsymbol{c}\cdot\nabla(\alpha\eta)\right)+Dh+\alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\right]+O\left(\mu^4\right),$$

при этом выражения в квадратных скобках равны нулю в силу уравнения неразрывности (10) и определения (15) оператора D.

Возвращаясь к уравнению (20) и делая соответствующие подстановки, используя результаты выполненных преобразований, приходим к искомым уравнениям движения:

$$\boldsymbol{c}_t+\alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}+\nabla\eta=\mu^2\left[\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}Q_1+\frac{H^2}{2}Q_2\right)-\nabla h\left(\frac{H}{2}Q_1+Q_2\right)\right]+O\left(\mu^4\right).$$

Отбросив члены порядка $O\left(\mu^4\right)$, вернемся в полученных уравнениях к размерным переменным. Тогда система уравнений НЛД-модели принимает следующий вид:

$$H_t+\nabla\cdot(H\boldsymbol{c})=0, \qquad (21)$$

$$\boldsymbol{c}_t+(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}+g\nabla\eta=\frac{1}{H}(\nabla\varphi-\psi\nabla h), \qquad (22)$$

где

$$\varphi=\frac{H^3}{3}Q_1+\frac{H^2}{2}Q_2,\quad \psi=\frac{H^2}{2}Q_1+HQ_2,$$

$$Q_1=D(\nabla\cdot\boldsymbol{c})-(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2,\quad Q_2=D^2h,\quad D=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla.$$

4. Полные уравнения НЛД-модели на сфере

Приведем полученные в работе [2] НЛД-уравнения на сфере. При использовании обозначений, описанных выше, если это может привести к двусмысленности, будем применять верхний индекс «s», например: $(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^s$, Q_1^s и т. п. Для величин η, h, H, $\boldsymbol{c}$, а также для операторов ∇, зависящих от новых переменных, сохраним обозначения.

Кратко опишем задачу. В сферической системе координат $O\lambda\theta r$, центр которой совпадает с центром сферы радиуса R, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω, рассмотрен слой жидкости, ограниченный снизу подвижным дном $r=R-h(\lambda,\theta,t)$, а сверху

– свободной поверхностью $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$. Здесь λ – долгота, отсчитываемая к востоку от некоторого меридиана $(0 \le \lambda < 2\pi)$, $\theta = \pi/2 - \phi$ – дополнение до широты ϕ, r – радиальная переменная. Величина R является средним радиусом Земли, шарообразность которой не предполагается и с которой жестко связана упомянутая выше сфера радиуса R. Предполагается, что слой жидкости тонок по сравнению с радиусом R, а масштабы движения удовлетворяют условиям мелкой воды. Тогда с учетом гравитационного притяжения и центробежной силы полная система НЛД-модели на сфере может быть записана в виде:

$$H_t + \left(\nabla \cdot (H\boldsymbol{c})\right)^s = 0, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\left(\nabla\varphi^s - \psi^s \nabla h\right) + (0, q)^T, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{c} = \left(c^1, c^2\right)^T$ – осредненная по толщине слоя воды «горизонтальная» составляющая скорости; ковариантные компоненты скорости $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$ связаны с компонентами c^1, c^2 посредством равенств

$$v_1 = \left(\Omega + c^1\right)R^2 \sin^2\theta, \quad v_2 = R^2 c^2; \qquad q = \left(\Omega + c^1\right)^2 R^2 \sin\theta\cos\theta;$$

$$\varphi^s = \frac{H^3}{3}Q_1^s + \frac{H^2}{2}Q_2^s, \quad \psi^s = \frac{H^2}{2}Q_1^s + HQ_2^s, \quad Q_1^s = D^s\left(\nabla \cdot \boldsymbol{c}\right)^s - \left[\left(\nabla \cdot \boldsymbol{c}\right)^s\right]^2, \quad Q_2^s = \left(D^s\right)^2 h,$$

$$D^s = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla), \quad \left(\nabla \cdot \boldsymbol{c}\right)^s = c^1_\lambda + c^2_\theta + c^2 \operatorname{ctg}\theta.$$

Уравнения (23), (24) описывают движение частиц жидкости в области изменения координат λ, θ с компонентами вектора скорости $c^1 = \dot{\lambda}$, и $c^2 = \dot{\theta}$. Покажем, что для малых областей и при пренебрежении «сферичностью» Земли и ее вращением уравнения (23), (24) переходят в плановые уравнения (21), (22). Для этого в некоторой окрестности точки (λ_0, θ_0) рассмотрим преобразование координат

$$x = R\sin\theta_0(\lambda - \lambda_0), \quad y = -R(\theta - \theta_0),$$

обозначив новые координаты и компоненты

$$u = \dot{x} = Rc^1 \sin\theta_0, \quad v = \dot{y} = -Rc^2$$

вектора скорости $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$ в новой системе координат теми же буквами, что и при выводе плановых уравнений. Тогда имеют место следующие связи:

$$c^1 = \frac{u}{R\sin\theta_0}, \quad c^2 = -\frac{v}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial\lambda} = R\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = -R\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{c}\right)^s = \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \frac{v}{R}\operatorname{ctg}\theta, \; Q_1^s = Q_1 + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad Q_2^s = Q_2, \quad \varphi^s = \varphi + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \psi^s = \psi + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

где

$$Q_1 = D(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2, \quad Q_2 = D^2 h, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = u_x + v_y,$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}, \quad \varphi = \frac{H^3}{3}Q_1 + \frac{H^2}{2}Q_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}Q_1 + HQ_2.$$

В силу этих равенств уравнения (23), (24) можно переписать в виде:

$$H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = \frac{Hv}{R}\operatorname{ctg}\theta, \tag{25}$$

$$Du + \sigma^2 g\eta_x = 2\sigma v\Omega\cos\theta + \frac{2uv}{R}\operatorname{ctg}\theta + \sigma^2\frac{\varphi_x - \psi h_x}{H} + O\left(\frac{1}{R}\right), \tag{26}$$

$$Dv + g\eta_y = -\frac{2}{\sigma}u\Omega\cos\theta - \frac{\Omega^2 R\sin 2\theta}{2} + \frac{\varphi_y - \psi h_y}{H} + O\left(\frac{1}{R}\right), \qquad (27)$$

где через $O(1/R)$ обозначены члены, имеющие порядок $1/R$, $\sigma = \sin\theta_0/\sin\theta$.

Далее предполагаем, что в направлении широты область мала, т. е. мала величина $\delta = \theta - \theta_0$. Тогда

$$\sigma = 1 + O(\delta),\ \cos\theta = \cos\theta_0 + O(\delta),\ \Omega^2 R\sin 2\theta = \Omega^2 R\sin 2\theta_0 + O(\delta).$$

Так как приполярные области в задачах об океанических волнах не рассматриваются, то можно считать, что $\operatorname{ctg}\theta$ ограничен. Будем также полагать ограниченными переменные u, v, H и их производные. В силу этого, пренебрегая в уравнениях (25)–(27) членами, имеющими порядок $O(\delta)$ или $O(1/R)$, получаем уравнения, которые отличаются от плановых уравнений (21), (22) наличием в правой части уравнений движения силы Кориолиса с постоянным коэффициентом $2\Omega\cos\theta_0$ и члена $\Omega^2 R\sin\theta_0\cos\theta_0$, связанного с центробежной силой. Если пренебречь и вращением Земли, то получаются в точности приведенные в разделе 3 плановые уравнения мелкой воды (21), (22) с заменой $\boldsymbol{c}$ на $\boldsymbol{u}$. Таким образом, последние уравнения оказалось возможным получить из НЛД-уравнений на сфере, попутно определив их область применения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-05-91052-НЦНИа, 09-05-00294а), а также в рамках программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-6068.2010.9) и Проекта IV.31.2.1. программы фундаментальных исследований СО РАН.

Список литературы

1. Dao M., Tkalich P. Tsunami propagation modeling–a sensitivity study. Nat. Hazards Earth Syst. Sci. Vol. 7. 2007. P.741–754.
2. Федотова З.И, Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере // Вычислительные технологии. Т. 15, № 3. 2010. С. 135–145.
3. Федотова З.И, Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычислительные технологии. Т. 13, № 4. 2008. С. 114–126.