

Схемы экспоненциальной подгонки на треугольных сетках

И.А. КУЗОВАТОВ

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

e-mail: kuzovатов@yandex.ru

Для численного решения диффузионно-конвективных краевых задач с малым параметром рассмотрены схемы экспоненциальной подгонки на треугольном сеточном шаблоне. Экспоненциальные разностные схемы для сингулярного диффузионно-конвективного уравнения построены при помощи метода конечных элементов и метода контрольных объемов. Предложенные разностные схемы обладают свойствами монотонности и консервативности.

Введение

Диффузионно-конвективные уравнения находят широкое применение при моделировании различных физических процессов. Исследование диффузионно-конвективных уравнений особенно актуально при значительном преобладании конвективных процессов, математически это можно сформулировать как наличие малого параметра ε при диффузионных слагаемых, $0 < \varepsilon \ll 1$. Численное решение диффузионно-конвективных уравнений с малым параметром малоэффективно при помощи традиционных вычислительных алгоритмов, когда величина параметра ε сравнима или меньше шага сетки.

1. Одномерная схема экспоненциальной подгонки

Одним из специальных алгоритмов, который используется для численного решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, является метод экспоненциальной подгонки, суть которого использование при построении разностной схемы априорной информации о точном решении дифференциального уравнения. Одной из первых публикаций, где приводится строгое обоснование данного подхода, является работа [1], разностная схема экспоненциальной подгонки известна так же, как схема Ильина-Аллена-Саусвелла.

Для дискретизации дифференциальных уравнений введем равномерную сетку ω_h ,

$$\omega_h = \{ x_i \mid x_i = ih; 0 \leq i \leq n \}.$$

Обозначения h и n традиционно используем для шага и количества узлов сетки, $x \in [0, 1]$. Рассмотрим одномерное сингулярное диффузионно-конвекционное уравнение в дивергентной форме, с краевыми условиями первого рода

$$-(\varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x))' = f(x), \quad (1)$$

$$u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \quad (2)$$

где $a(x) \geq a_0 > 0$ – коэффициент диффузии, $b(x)$ – коэффициент конвекции, $0 < \varepsilon \ll 1$.
 Запишем дифференциальное уравнение (1) в симметричной форме

$$-\left(\frac{\varepsilon a(x)}{\exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varepsilon a(t)} dt\right)} \cdot \left(u(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varepsilon a(t)} dt\right) \right)' \right)' = f(x). \quad (3)$$

Данная форма записи для диффузионно-конвективного уравнения позволяет выписать, например, при помощи интегро-интерполяционного метода, экспоненциальную разностную схему

$$\frac{u_i - \exp\left(-\int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{b(\xi)}{\varepsilon a(\xi)} d\xi\right) u_{i-1}}{h^2 \cdot \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\exp\left(-\int_{x_i}^x \frac{b(\xi)}{\varepsilon a(\xi)} d\xi\right)}{\varepsilon a(x)} dx} + \frac{u_i - \exp\left(-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{b(\xi)}{\varepsilon a(\xi)} d\xi\right) u_{i+1}}{h^2 \cdot \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\exp\left(-\int_{x_i}^x \frac{b(\xi)}{\varepsilon a(\xi)} d\xi\right)}{\varepsilon a(x)} dx} = f_i. \quad (4)$$

Аппроксимируя переменные коэффициенты кусочно-постоянными значениями b_L, b_R, a_L, a_R , вычислив интегралы в (4), получим схему экспоненциальной подгонки второго порядка точности и первого порядка равномерной сходимости, [1],

$$b_L \frac{u_i - e^{\frac{b_L h}{\varepsilon a_L}} u_{i-1}}{h \left(e^{\frac{b_L h}{\varepsilon a_L}} - 1 \right)} + b_R \frac{u_i - e^{-\frac{b_R h}{\varepsilon a_R}} u_{i+1}}{h \left(1 - e^{-\frac{b_R h}{\varepsilon a_R}} \right)} = f_i, \quad (5)$$

$$u_0 = g_1, \quad u_n = g_2. \quad (6)$$

Для матрицы разностного оператора экспоненциальной подгонки выполняется диагональное преобладание по столбцам, следовательно, экспоненциальная разностная схема (5) является монотонной. Решение системы разностных уравнений (5), (6) существует и единственно, для него выполняется принцип максимума.

Одномерная схема экспоненциальной подгонки (5) в случае использования прямоугольных сеток распространяется на многомерный случай, и хорошо зарекомендовала себя при моделировании физических процессов в канале магнитно-газодинамических устройств, [2], [3].

2. Экспоненциальная схема на треугольной сетке

Построение экспоненциальной разностной схемы с целью сокращения технических выкладок проведем для двумерного случая. Введем на ограниченной области $\Omega \subset R^2$ треугольную сетку Ω_h . Предполагается, что область Ω разбита на множество непересекающихся остроугольных треугольников. Полученная сетка Ω_h определяется как совокупность треугольников, их вершин и ребер. Граница Γ_h области Ω_h состоит узлов, лежащих на границе $\Gamma = \partial\Omega$ и соединенных прямолинейными отрезками “внешних” сторон треугольников.

Рассмотрим двумерное сингулярное диффузионно-конвекционное уравнение в частных производных с краевыми условиями Дирихле

$$-\operatorname{div}(\varepsilon a(x, y) \nabla u(x, y) - u(x, y) \mathbf{b}(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

При помощи экспоненциальной функции $\Phi(x, y)$, определяемой из равенства

$$-\frac{\mathbf{b} \nabla \Phi}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{\Phi}{\varepsilon a}, \quad (8)$$

данное уравнение записывается в форме аналогичной формуле (3)

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon a(x, y)}{\Phi(x, y)} \cdot \nabla(\Phi(x, y) u(x, y))\right) = f(x, y). \quad (9)$$

Для построения схемы экспоненциальной подгонки на треугольной сетке воспользуемся методами конечных элементов и контрольных объемов, [4], [5].

2.1. Экспоненциальная схема на основе метода конечных элементов

Для применения метода конечных элементов введем на расчетной области кусочно-линейные базисные функции $\phi_i(x, y)$ равные единице в узле сетки $P_i(x_i, y_i)$, линейные на примыкающих треугольниках и равные нулю вне треугольников, имеющих точку P_i одной из своих вершин (рис. 1). Совокупность примыкающих треугольников называется носителем базисной функции и обозначается Ω_i .

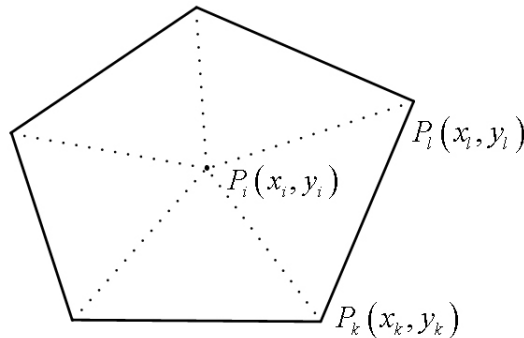


Рис. 1. Носитель Ω_i базисной функции ϕ_i

В соответствии с методом конечных элементов решение дифференциальной задачи с краевыми условиями Дирихле ищется в виде разложения по базисным функциям. Искомые значения решения u_j во внутренних узлах области определяются из системы уравнений, полученной из интегральной формы исходной дифференциальной задачи.

Запишем интегральное тождество для уравнения (7), записанного в виде (9), и подставим в интеграл представление искомого решения, получим

$$-\int_{\Omega_i} \operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon a(x, y)}{\Phi(x, y)} \cdot \nabla\left(\sum_j \Phi_j u_j \phi_j(x, y)\right)\right) \cdot \phi_i(x, y) d\Omega = \int_{\Omega_i} f \cdot \phi_i(x, y) d\Omega.$$

Применив формулу Гаусса-Остроградского и свойство линейности интеграла, получим систему разностных уравнений

$$\sum_j \Phi_j u_j \int_{\Omega_i} \frac{\varepsilon a(x, y)}{\Phi(x, y)} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega = \int_{\Omega_i} f \phi_i(x, y) d\Omega. \quad (10)$$

Для выписывания конкретного вида разностной схемы удобнее рассматривать интегральное тождество поэлементно, то есть на каждом из треугольников, составляющим в совокупности носитель базисной функции. Обозначим через Ω_{ikl} треугольник с вершинами P_i , P_k и P_l . Вершины P_k и P_l пробегают соседние узлы для узла P_i , $\Omega_i = \cup \Omega_{ikl}$, S_i и S_{ikl} – площади соответствующих фигур (рис. 1). Для функции $\Phi(x, y)/(\varepsilon \cdot a(x, y))$ обозначим через Φ_{ikl} среднее значение на треугольнике Ω_{ikl} . С учетом $\int_{\Omega_i} \phi_i(x, y) d\Omega = \frac{1}{3} S_i$ получим общий вид схемы экспоненциальной подгонки, полученной при помощи метода конечных элементов,

$$\frac{1}{\frac{1}{3} S_i} \sum_{ikl} \frac{S_{ikl}}{\Phi_{ikl}} (u_i \Phi_i (\nabla \phi_i, \nabla \phi_i) + u_k \Phi_k (\nabla \phi_k, \nabla \phi_i) + u_l \Phi_l (\nabla \phi_l, \nabla \phi_i)) = f_i, \quad (11)$$

суммирование ведется по всем треугольникам Ω_{ikl} , имеющим P_i своей вершиной.

Из формулы (11) следует, что ненулевые элементы матрицы экспоненциальной разностной схемы распределяются следующим образом: на главной диагонали находятся положительные элементы, отрицательные элементы – вне главной диагонали. Ввиду равенства $\nabla \phi_i = -\nabla \phi_l - \nabla \phi_k$, следует диагональное преобладание по столбцам для матрицы экспоненциальной разностной схемы. Таким образом, матрица схемы экспоненциальной подгонки является монотонной, что обеспечивает однозначную разрешимость системы разностных уравнений и выполнение принципа максимума для разностного решения.

Конкретные реализации экспоненциальной разностной схемы (11) отличаются способом вычисления среднего значения Φ_{ikl} . Используя “замороженные” коэффициенты диффузии и конвекции на треугольниках – \bar{a} и $\bar{\mathbf{b}}$, можем явно выписать вспомогательную экспоненциальную функцию $\Phi(x, y)$, $\Phi(x, y) = \exp\left(-\frac{\bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y}{\varepsilon \bar{a}}\right)$. Воспользуемся двумя способами вычисления величины Φ_{ikl} , первый способ – интегральное среднее $\bar{\Phi}_{ikl}$,

$$\bar{\Phi}_{ikl} = \frac{1}{S_{ikl}} \int_{\Omega_{ikl}} \frac{e^{-\frac{\bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y}{\varepsilon \bar{a}}}}{\varepsilon \bar{a}} d\Omega, \quad (12)$$

второй способ – “дифференциальное” среднее $\tilde{\Phi}_{ikl}$, ввиду определения (8) для вспомогательной функции $\Phi(x, y)$, вычислим приближенно градиент на треугольнике Ω_{ikl}

$$\tilde{\Phi}_{ikl} = -\frac{e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_i + e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_k + e^{-\frac{\bar{b}_1 x_l + \bar{b}_2 y_l}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_l}{|\bar{\mathbf{b}}|^2}. \quad (13)$$

Интересно, что в одномерном случае аналоги формул (12) и (13) приводят к тождественному результату.

Запишем с использованием формул (12) и (13) итоговые варианты схемы экспоненциальной подгонки для метода конечных элементов с кусочно-постоянными коэффи-

циентами

$$\frac{1}{\frac{1}{3}S_i} \sum_{ikl} S_{ikl} \frac{u_i e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_i \nabla \phi_i + u_k e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_k \nabla \phi_i + u_l e^{-\frac{\bar{b}_1 x_l + \bar{b}_2 y_l}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_l \nabla \phi_i}{\frac{1}{S_{ikl}} \int_{\Omega_{ikl}} \frac{e^{-\frac{\bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y}{\varepsilon \bar{a}}}}{\varepsilon \bar{a}} d\Omega} = f_i, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{3}S_i} \sum_{ikl} S_{ikl} |\bar{\mathbf{b}}|^2 \frac{u_i e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_i \nabla \phi_i + u_k e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_k \nabla \phi_i + u_l e^{-\frac{\bar{b}_1 x_l + \bar{b}_2 y_l}{\varepsilon \bar{a}}} \nabla \phi_l \nabla \phi_i}{-\left(e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_i + e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_k + e^{-\frac{\bar{b}_1 x_l + \bar{b}_2 y_l}{\varepsilon \bar{a}}} \bar{\mathbf{b}} \nabla \phi_l \right)} = f_i. \quad (15)$$

Монотонные экспоненциальные разностные схемы (14) и (15), построенные на основе метода конечных элементов, аппроксимируют исходную дифференциальную задачу (7), абсолютно устойчивы и обладают первым порядком равномерной сходимости по малому параметру.

2.2. Экспоненциальная схема на основе метода контрольных объемов

Проведем дополнительное построение на треугольной сетке Ω_h , а именно, серединными перпендикулярами к ребрам ограничим заштрихованную область D_i (рис. 2). Данная область называется ячейкой Дирихле с границей $\partial D_i = \bigcup_k T_k$, состоящей из отрезков перпендикуляров.

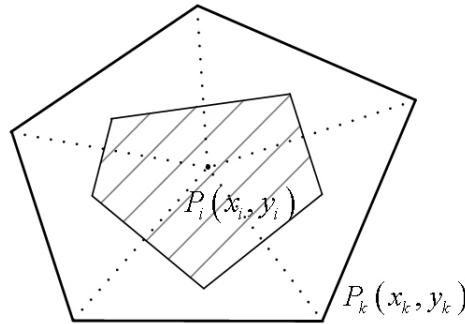


Рис. 2. Ячейка Дирихле D_i

Запишем для дифференциального уравнения (7) интегральное уравнение баланса на ячейке и воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского

$$-\sum_k \int_{T_k} \frac{\varepsilon a(x, y)}{\Phi(x, y)} \cdot \frac{\partial (\Phi(x, y) u(x, y))}{\partial n} d\Gamma = \int_{D_i} f(x, y) d\Omega. \quad (16)$$

Обозначим для вершины P_k через l_k длину ребра $P_i P_k$, d_k – длина участка границы T_k ячейки Дирихле, S_{D_k} – площадь ячейки Дирихле. Значение Φ_{ik} – среднее значение для функции $\Phi(x, y)/(\varepsilon a(x, y))$ найдем при помощи интеграла

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{l_k} \int_{P_i P_k} \frac{\Phi(x, y)}{\varepsilon a(x, y)} d\Gamma. \quad (17)$$

Производную по нормали аппроксимируем при помощи конечной разности. Вычислив приближенно при помощи формулы прямоугольников интегралы в формуле (16), получим экспоненциальную разностную схему метода контрольных объемов

$$\frac{1}{S_{D_i}} \sum_k \frac{1}{\Phi_{ik}} \frac{\Phi_i u_i - \Phi_k u_k}{l_k} d_k = f_i. \quad (18)$$

Экспоненциальная схема (18), так же как и схема (9), является монотонной. Для схемы (18) справедлив принцип максимума и, следовательно, система разностных уравнений однозначно разрешима.

Аналогично предыдущему пункту, используя “замороженные” коэффициенты диффузии и конвекции – \bar{a} и $\bar{\mathbf{b}}$, можем явно выписать вспомогательную экспоненциальную функцию $\Phi(x, y)$, $\Phi(x, y) = \exp\left(-\frac{\bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y}{\varepsilon \bar{a}}\right)$. Вычислив интеграл в (17), на основе общей формулы (18) придем к схеме экспоненциальной подгонки для метода контрольных объемов с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{S_{D_i}} \sum_k \left(\bar{b}_1 \frac{x_k - x_i}{l_k} + \bar{b}_2 \frac{y_k - y_i}{l_k} \right) \frac{u_i e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} - u_k e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}}}{e^{-\frac{\bar{b}_1 x_i + \bar{b}_2 y_i}{\varepsilon \bar{a}}} - e^{-\frac{\bar{b}_1 x_k + \bar{b}_2 y_k}{\varepsilon \bar{a}}}} d_k = f_i. \quad (19)$$

Монотонная экспоненциальная разностная схема (19) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (7), абсолютно устойчива и обладает первым порядком равномерной сходимости по малому параметру.

Заключение

Рассмотрен метод построения схем экспоненциальной подгонки для многомерных сингулярных диффузионно-конвективных уравнений на треугольном сеточном шаблоне. Построены монотонные экспоненциальные разностные схемы при помощи методов конечных элементов и конечных объемов. На основе метода “замороженных” коэффициентов получены схемы, аппроксимирующие исходную дифференциальную задачу. Предложенные варианты экспоненциальной схемы абсолютно устойчивы и обладают первым порядком равномерной сходимости по малому параметру.

Список литературы

- [1] Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
- [2] Кузоватов И.А., Миловидова Т.А., Славин В.С. Анализ влияния эффекта Холла на структуру неравновесного плазменного слоя в канале МГД-генератора // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 73–84.
- [3] Славин В.С., Кузоватов И.А., Минаков А.В. Применение разностной схемы экспоненциальной подгонки для численного моделирования нестационарных процессов, протекающих в канале линейного МГД-ускорителя. // Вестник СибГАУ, Красноярск. СибГАУ, 2009. Т. 1(22), ч. 2. С. 41–46.
- [4] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
- [5] Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2000. 345 с.