К ДЛИННОВОЛНОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Ю.Г. Губарев

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

e-mail: Yu.G.Gubarev@mail.ru

The linear stability problem of steady-state plane-parallel flows of a homogeneous in density inviscid incompressible fluid with a free surface in the gravity field is studied. It is proved by the energy method that for such flows there are no sufficient conditions for stability against small plane long-wave perturbations. However, earlier Teshukov by means of the generalized characteristics method has been received above-mentioned conditions. To eliminate the arisen contra-diction, an analytical example of the stationary flow and small perturbations in the form of normal modes imposed on it has been constructed. This example has confirmed the validity of results established by the energy method.

Введение

Волновые движения жидкости, бесспорно, относятся к числу тех явлений природы, с которыми человеческая цивилизация имеет дело практически на протяжении всей своей истории. Поэтому вполне естественно, что люди постоянно стремились (и продолжают стремиться!) к тому, чтобы научиться использовать волны в жидкости себе во благо. Однако, такое возможно лишь при условии тщательного изучения волновых движений жидкости и их свойств.

Как известно, одним из основных методов исследования волн в жидкости служит математическое моделирование. К сожалению, зачастую математические модели волновых движений жидкости оказываются достаточно сложными и с трудом поддаются аналитическому рассмотрению. Здесь на помощь приходит упрощение математических моделей волн в жидкости путём осуществления так называемого длинноволнового приближения [1].

Математические модели длинноволновых движений жидкости отличает относительная простота в сочетании с приемлемым учётом интересующих физических характеристик. Тем не менее, применяя математические модели длинных волн в жидкости, особое внимание необходимо уделять адекватности получаемых научных результатов описываемым волновым движениям жидкости.

В настоящей работе как раз и изучается проблема адекватности математического моделирования волн в жидкости на примере одной из базовых математических моделей длинноволновых движений жидкости – модели распространения длинных волн по свободной границе горизонтального слоя завихренной однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести [2].

Именно, исследуется задача линейной устойчивости установившихся плоскопараллельных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести. Энергетическим методом доказывается, что для этих течений достаточные условия устойчивости по отношению к малым плоским длинноволновым возмущениям отсутствуют. Данный результат иллюстрируется аналитическим примером (построен совместно с Е.Ю.Князевой) стационарного плоскопараллельного сдвигового течения и наложенных на него малых плоских длинноволновых возмущений в виде нормальных мод, а также сопоставляется с условиями гиперболичности, обнаруженными ранее для рассматриваемой математической модели

В.М.Тешуковым посредством оригинального метода, который известен в научной литературе как метод обобщённых характеристик [1, 3].

Формулировка точной задачи

Изучаются плоские длинноволновые течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в бесконечном по протяжённости тонком слое над горизонтальным дном в поле силы тяжести. Полагается, что действие сил поверхностного натяжения на свободной границе жидкого слоя пренебрежимо мало, а потому может в расчёт не приниматься.

Согласно этим допущениям, система уравнений Бенни [2] предстаёт в виде

$$u_t + uu_x + vu_y = -gh_x, \quad u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

где $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скорости жидкости, $g \equiv \mathrm{const} > 0$ – ускорение свободного падения, $h(x,t)$ – толщина жидкого слоя, t – время, x и y – декартовы координаты. Здесь и далее нижними индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные от искомых функций.

Соотношения (1) дополняются следующими краевыми условиями:

а) на дне ($y = 0$) – условием непротекания в форме

$$v = 0 \tag{2}$$

б) на свободной границе слоя жидкости ($y = h$) – кинематическим условием вида

$$h_t + uh'_x - v = 0 \tag{3}$$

Начальные данные для первого уравнения системы (1) и соотношения (3) берутся в форме

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad h(x,0) = h_0(x) \tag{4}$$

при этом от функций u_0 и h_0 требуется, чтобы они не противоречили второму уравнению системы (1) и соотношению (2).

Далее в начально-краевой задаче (1)-(4) удобно перейти от эйлеровых независимых переменных t, x, y к смешанным эйлерово-лагранжевым t', x', λ [4]. Такой переход даёт возможность вместо начально-краевой задачи в жидком слое со свободной поверхностью рассматривать более простую смешанную задачу в канале с фиксированными границами.

Настоящая замена независимых переменных выполняется по формулам [4]

$$t = t', \quad x = x', \quad y = \Phi(t', x', \lambda); \quad \lambda \in [0,1] \tag{5}$$

Здесь λ – лагранжева координата, нумерующая траектории движения жидких частиц в изучаемом слое; функция Φ предполагается удовлетворяющей уравнению

$$\Phi_{t'} + u\Phi_{x'} = v \tag{6}$$

Важно, что из выражений (5), (6) справедливость краевых условий (2), (3) вытекает автоматически.

В результате, смешанная задача (1)-(4) перепишется в виде

$$u_t + uu_x + gH_x = 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x = 0; \quad H \equiv \int_0^1 \rho d\lambda \tag{7}$$

$$\rho \equiv \Phi_\lambda(t,x,\lambda); \quad u(0,x,\lambda) = u_0(x,\lambda), \quad \rho(0,x,\lambda) = \rho_0(x,\lambda)$$

где штрихи у независимых переменных t' и x' сняты, чтобы избежать громоздкости в представлении нижеследующих формул.

Решения начально-краевой задачи (7) описывают длинноволновые сдвиговые течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в бесконечном по протяжённости плоском горизонтальном канале единичной ширины, верхняя стенка $\lambda = 1$ которого, благодаря осуществлённой замене (5), (6) независимых переменных, отвечает свободной поверхности $y = h$ жидкого слоя, а нижняя $\lambda = 0$ – его дну $y = 0$.

Смешанная задача (7) обладает интегралом энергии вида

$$E \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \rho u^2 d\lambda dx + \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H^2 dx = \text{const} \tag{8}$$

если её решения либо периодичны, либо локализованы вдоль оси абсцисс x.

Кроме того, несложно продемонстрировать, что начально-краевая задача (7) имеет ещё и интеграл движения в форме [5]

$$C \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 u_\lambda F(\kappa) d\lambda dx = \text{const} \tag{9}$$

Здесь $\kappa \equiv \rho / u_\lambda$: $\kappa_t + u\kappa_x = 0$; $F(\kappa)$ – произвольная функция своего аргумента.

Наконец, смешанная задача (7) обладает точными стационарными решениями в виде

$$u = u^0(\lambda), \quad \rho = \rho^0(\lambda), \quad H = H^0 \equiv \text{const} \tag{10}$$

где u^0 – некая, а ρ^0 – неубывающая функции независимой переменной λ. Нетрудно показать, что функции u^0, ρ^0 и H^0 действительно обращают в тождества все соотношения начально-краевой задачи (7).

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в том, чтобы выяснить, будут ли точные стационарные решения (10) устойчивы относительно малых плоских длинноволновых возмущений $u'(t,x,\lambda)$, $\rho'(t,x,\lambda)$ и $H'(t,x)$.

Постановка линеаризованной задачи

Для достижения этой цели выполняется линеаризация смешанной задачи (7) около точных стационарных решений (10), приводящая к начально-краевой задаче в форме

$$u'_t + u^0 u'_x + gH'_x = 0, \quad \rho'_t + u^0\rho'_x + \rho^0 u'_x = 0 \tag{11}$$

$$H' = \int_0^1 \rho' d\lambda; \quad u'(0,x,\lambda) = u'_0(x,\lambda), \quad \rho'(0,x,\lambda) = \rho'_0(x,\lambda)$$

на решениях которой с течением времени сохраняется функционал – линейный аналог интеграла энергии вида

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left[\rho^0 u'^2 + 2u^0 u'\rho' + \frac{du^0}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\kappa^2}(\kappa^0)\kappa'^2\right] d\lambda dx + \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H'^2 dx \tag{12}$$

Здесь

$$\kappa^0 \equiv \rho^0\left(\frac{du^0}{d\lambda}\right)^{-1}; \quad \kappa' \equiv \left(\rho'\frac{du^0}{d\lambda} - \rho^0 u'_\lambda\right)\left(\frac{du^0}{d\lambda}\right)^{-2}: \quad \kappa'_t + u^0\kappa'_x = 0$$

Несложно убедиться, что первая вариация δJ функционала $J \equiv E + C = \text{const}$ (8), (9) равна нулю на точных стационарных решениях (10) тогда, когда имеют место выражения

$$\frac{dF}{d\kappa}(\kappa^0) = -\frac{u^{02}}{2} - gH^0 \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\kappa^0) + \kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right]\delta u\Big|_{\lambda=1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\kappa^0) + \kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right]\delta u\Big|_{\lambda=0} dx$$

где δu – первая вариация горизонтальной составляющей u поля скорости жидкости. Вторая же вариация $\delta^2 J$ интеграла J, вычисленная с учётом первого соотношения системы (13) и записанная в терминах малых плоских длинноволновых возмущений (11), совпадает по форме с функционалом E_1 (12) в случае, если истинна связь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\kappa^0) + \kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right]\delta^2 u\Big|_{\lambda=1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\kappa^0) + \kappa^0\left(\frac{u^{02}}{2} + gH^0\right)\right]\delta^2 u\Big|_{\lambda=0} dx \tag{14}$$

(здесь $\delta^2 u$ – вторая вариация горизонтального компонента u поля скорости жидкости).

Стоит заметить, что второе из выражений (13) и соотношение (14) являются динамически непротиворечивыми и не переопределяют смешанную задачу (11), поскольку её уравнения движения образуют систему порядка два, тогда как стенки $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ канала, по которому течёт исследуемая жидкость, свободны от граничных условий. Кстати, второе выражение системы (13) и соотношение (14) могут быть удовлетворены с помощью сужения не класса малых плоских длинноволновых возмущений (11), а класса точных стационарных решений (10) путём подчинения функции $F(\kappa)$, наряду с требованием в форме первого выражения из системы (13), ещё и ограничению в виде

$$F(\kappa^0) = -\kappa^0 \int\limits_{\kappa^0(0)}^{\kappa^0} \frac{F_1(\kappa_1^0)}{\kappa_1^{02}} d\kappa_1^0$$

где $F_1(\kappa^0)$ – такая функция своего аргумента, что $F_1(\kappa^0)\big|_{\kappa^0=\kappa^0(0)} = 0,\ F_1(\kappa^0)\big|_{\kappa^0=\kappa^0(1)} = 0;\ \kappa^0(0)$ и $\kappa^0(1)$ – значения функции $\kappa^0(\lambda)$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответственно; κ_1^0 – переменная интегрирования.

Точные стационарные решения (10) начально-краевой задачи (7) будут устойчивы по отношению к малым плоским длинноволновым возмущениям (11) в том и только в том случае, когда функционал E_1 (12) или знакоопределён, или, хотя бы, знакопостоянен.

Для того чтобы установить, обладает ли интеграл E_1 свойствами знакоопределённости/знакопостоянства, его удобно представить в форме

$$E_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1} (A\mathbf{f}, \mathbf{f}) d\lambda dx; \quad \mathbf{f} \equiv (u', \rho', \kappa', H')^T \tag{15}$$

Здесь $A = \|a_{ik}\|$ – квадратная матрица размером 4×4 с ненулевыми элементами

$$a_{11} = \frac{\rho^0}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{u^0}{2}, \quad a_{24} = a_{42} = \frac{g}{4}, \quad a_{33} = \frac{1}{2}\frac{du^0}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\kappa^2}(\kappa^0)$$

В согласии с критерием Сильвестра [6], подынтегральное выражение функционала E_1 (15) положительно определено тогда и лишь тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны. В то же время отрицательно определено подынтегральное выражение функционала E_1 в том и только в том случае, если главные миноры матрицы A имеют знаки $(-1)^m$ (m – порядок того либо другого главного минора).

Нетрудно удостовериться, что главные миноры матрицы A не отвечают ни требованию положительной определённости, ни требованию отрицательной определённости. В самом деле, и для положительной, и для отрицательной определённости подынтегрального выражения функционала E_1 (15) главный минор матрицы A второго порядка Δ_2, к примеру, должен быть положителен. Но $\Delta_2 = -u^{02}/4 < 0,$ что и лишает интеграл E_1 как свойства знакоопределённости, так и свойства знакопостоянства.

Отсюда вытекает, что достаточных условий устойчивости точных стационарных решений (10) смешанной задачи (7) относительно малых плоских длинноволновых возмущений $u'(t, x, \lambda),\ \rho'(t, x, \lambda)$ и $H'(t, x)$ (11) не существует.

Однако, в публикациях [1, 3] В.М.Тешуковым для начально-краевой задачи (7) посредством оригинального метода обобщённых характеристик были получены условия гиперболичности её уравнений движения. Когда же речь заходит о смешанной задаче (11), он трактует данные условия не иначе, как достаточные условия устойчивости точных стационарных решений (10) начально-краевой задачи (7) по отношению к малым плоским длинноволновым возмущениям.

Понятно, что результаты, установленные выше при помощи энергетического метода, явно противоречат результатам В.М.Тешукова. Так как наличие или отсутствие достаточных условий устойчивости не должно зависеть от выбора того либо другого метода их получения, то с целью разрешить указанное противоречие, ниже, совместно с Е.Ю.Князевой, конструируется аналитический пример точного стационарного решения (10) смешанной задачи (7) и наложенных на него малых плоских длинноволновых возмущений (11) вида нормальных мод. Забегая вперёд, этот пример подтверждает результаты, которые установлены энергетическим методом, а не методом обобщённых характеристик.

Пример

Изучается точное стационарное решение (10) начально-краевой задачи (7) в форме

$$u = u^0(\lambda) \equiv 3\sqrt{I}\,\mathrm{th}[100(\lambda - 0{,}5)], \quad \rho = \rho^0(\lambda) \equiv 1, \quad H = H^0 \equiv 1 \tag{16}$$

$$g \equiv 1, \quad I \equiv \int_0^1 \frac{9\mathrm{th}^2[100(\lambda-0{,}5)] - 1}{\left(9\mathrm{th}^2[100(\lambda-0{,}5)]+1\right)^2} d\lambda \approx 0{,}0767 > 0$$

На данное решение накладываются малые плоские длинноволновые возмущения $u'(t,x,\lambda)$, $\rho'(t,x,\lambda)$ и $H'(t,x)$ (11) в виде нормальных мод. Конкретно,

$$u'(t,x,\lambda) = u_1(\lambda)\exp(\alpha t + i\beta x) \tag{17}$$

$$\rho'(t,x,\lambda) = \rho_1(\lambda)\exp(\alpha t + i\beta x), \quad H'(t,x) = \exp(\alpha t + i\beta x)\int_0^1 \rho_1(\lambda) d\lambda$$

где $\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ – произвольная комплексная, а β, α_1 и α_2 – некие вещественные постоянные величины.

Функции (16), (17) действительно будут обращать первые два соотношения смешанной задачи (11) в тождества, если выполняется так называемое характеристическое уравнение [1, 3] в форме

$$\chi(k) \equiv 1 - \int_0^1 \frac{d\lambda}{\left(u^0 - k\right)^2}, \quad k \equiv \frac{i\alpha}{\beta} \tag{18}$$

Здесь уместно отметить, что характеристическое уравнение типа (18) детально рассматривалось В.М.Тешуковым в работах [1, 3] в следующих двух случаях: 1) k – вещественная постоянная — χ – вещественная характеристическая функция; 2) k – комплексная постоянная величина — χ – комплексная характеристическая функция. При этом во втором случае он, считая, для определённости, $u_\lambda > 0$, доказал, что у характеристического уравнения (18) комплексных корней нет тогда и только тогда, когда справедливы условия гиперболичности – предельные соотношения, вытекающие из условия равенства нулю аргумента аналитической функции χ комплексной переменной при обходе точкой в положительном направлении контура, который принадлежит области мероморфности данной функции, охватывает её нули и полюсы, но не проходит через них (см., например, соотношение (1.11) на стр. 252 публикации [1]).

Однако, случай «k – комплексная постоянная величина — χ – вещественная характеристическая функция» из исследования В.М.Тешукова выпал. Далее этот пробел восполняется.

В самом деле, несложно заметить, что, как то принимает и В.М.Тешуков, функция $u^0(\lambda)$ (16) служит строго возрастающей, поскольку

$$\frac{du^0}{d\lambda} = \frac{300\sqrt{I}}{\mathrm{ch}^2[100(\lambda-0{,}5)]} > 0$$

Пусть теперь $\alpha_2 \equiv 0$, $\alpha_1 \equiv \beta k_1$, где k_1 − вещественная постоянная. Тогда, согласно свойству нечётности функции $u^0(\lambda)$,

$$\mathrm{Im}\,\chi(k) = -2k_1 \int_0^1 \frac{u^0 d\lambda}{\left(u^{02} + k_1^2\right)^2} \equiv 0$$

так что характеристическая функция $\chi(k)$ (18) становится вещественной

$$\chi(k) \equiv \operatorname{Re}\chi(k) = 1 - \int_0^1 \frac{u^{02} - k_1^2}{\left(u^{02} + k_1^2\right)^2} d\lambda \qquad (19)$$

Более того, прямая проверка показывает, что $k = ik_1 \equiv i\sqrt{I}$ будет комплексным корнем характеристического уравнения (19) (а следовательно, и уравнения (18) тоже). Действительно,

$$\operatorname{Re}\chi\left(i\sqrt{I}\right) = 1 - \int_0^1 \frac{9I\mathrm{th}^2[100(\lambda - 0{,}5)] - I}{\left(9I\mathrm{th}^2[100(\lambda - 0{,}5)] + I\right)^2} d\lambda = 1 - \frac{1}{I}\int_0^1 \frac{9\mathrm{th}^2[100(\lambda - 0{,}5)] - 1}{\left(9\mathrm{th}^2[100(\lambda - 0{,}5)] + 1\right)^2} d\lambda = \frac{1}{I}(I - I) \equiv 0$$

Отсюда вытекает, что, в силу вещественности характеристической функции $\chi(k)$ (19), условия гиперболичности В.М.Тешукова (см. соотношение (1.11) на стр. 252 книги [1]) истинны. Тем не менее, вопреки данным условиям, характеристическое уравнение (18) имеет комплексный корень $k = ik_1 \equiv i\sqrt{I}$. Причина этого в том, что условия гиперболичности В.М.Тешукова справедливы не для всех возможных малых плоских длинноволновых возмущений (11), а лишь для некоего их подкласса (к тому же, что принципиально, не являющегося самостоятельным).

Следовательно, построенный здесь пример неопровержимо свидетельствует об ошибочности метода обобщённых характеристик [1, 3], одновременно подтверждая правильность энергетического метода. Кроме того, поскольку за постоянной величиной α_1 сохранился значительный произвол, то при $\alpha_1 > 0$ сконструированный пример может быть интерпретирован как пример некорректности начально-краевой задачи (11) по Адамару [7]. Наконец, в случае $\alpha_1 > 0$ малые плоские длинноволновые возмущения (11) вида нормальных мод (17)-(19) будут нарастать со временем, что, в свою очередь, будет вызывать неустойчивость точного стационарного решения (16) смешанной задачи (7).

Заключение

Исходя из вышеизложенного, представляется логичным, что изучение данной проблематики должно быть продолжено, причём в таких двух главных направлениях, как: 1) доказательство абсолютной неустойчивости установившихся плоскопараллельных сдвиговых течений (10) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести относительно малых плоских длинноволновых возмущений (11) и 2) отыскание новых условий гиперболичности, которые выражались бы через интегралы движения и, тем самым, выделяли бы самостоятельные частные классы длинных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/9896).

Список литературы

[1] Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

[2] Benney D.J. Some properties of long nonliear waves. Stud. Appl. Math. Vol. 52. No. 1. 1973. P. 45-50.

[3] Тешуков В.М. О гиперболичности уравнений длинных волн. Докл. АН СССР. Т. 284. № 3. 1985. С. 555-562.

[4] Захаров В.Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи. Функцион. анализ и его прил. Т. 14. Вып. 2. 1980. С. 15-24.

[5] Губарев Ю.Г. К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова-Пуассо-на. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. Вып. 110. Акустика неоднородных сред. 1995. С. 78-90.

[6] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

[7] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.