

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ГОРНОГО МАССИВА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ НЕАРХИМЕДОВОГО АНАЛИЗА

С.В.Лавриков, О.А.Микенина, А.Ф.Ревуженко

(Институт горного дела СО РАН им. Н.А.Чинакала, г. Новосибирск)

1. НЕАРХИМЕДОВАЯ ЧИСЛОВА СИСТЕМА

В механике сплошных сред используется концепция архимедового арифметического пространства. Точка такого пространства представляет собой тройку вещественных чисел, удовлетворяющих аксиоме Архимеда. Это значит, что, двигаясь с фиксированным шагом из любой точки пространства, можно за конечное число шагов достичь любой другой заданной его точки. В этом смысле архимедово пространство является одномасштабным.

В работе строится математический анализ, имеющий разрешающую способность бóльшую, чем классический анализ. Концепция вещественного числа по Кантору распространяется на несчетные фундаментальные последовательности. На этой основе строится неархимедова числовая система. Отказ от аксиомы Архимеда позволяет рассмотреть многомасштабность пространства и естественным образом описать иерархию масштабных уровней геосреды [1].

Формулируются теории пределов, рядов, производных, неопределенных и определенных интегралов. Материальная точка в своем движении в пространстве, координатные оси которого представляют собой неархимедовые прямые, все промежуточные положения может не проходить, подобно движению колеса по дороге с неровностями, много меньшими диаметра колеса.

В рамках арифметической концепции показано, что на микроуровне пространственные измерения и время перестают быть линейно упорядоченными и становятся многомерными.

2. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

С использованием неархимедовой числовой системы формулируется плоская двухмасштабная математическая модель горного массива, обладающего иерархией структурных уровней. Модель основана на представлении о горной породе как среде, обладающей внутренними источниками и стоками энергии [2].

Вводится актуальная бесконечно малая величина ϵ . По определению ϵ – это положительное число, которое меньше любого числа вида $\frac{1}{n}$, где n – произвольное натуральное число. Рассмотрим два масштабных уровня среды при плоском описании. Тогда неархимедовые независимые переменные можно описать в виде

$$X_1 = x_1 + \xi_1, \quad X_2 = x_2 + \xi_2, \quad (1)$$

где введены обозначения $\xi_1 = y_1 E$, $\xi_2 = y_2 E$, а переменные x_1, x_2, y_1, y_2 – это вещественные числа. Таким образом, в окрестности каждого вещественного числа появилась целая окрестность пространства «вглубь», т.е. появился новый масштабный уровень.

В качестве неизвестных рассмотрены вектор смещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ и вектор внутренних усилий $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, здесь x_1, x_2 – независимые переменные макромасштабного уровня, а ξ_1, ξ_2 – соответственно, микромасштабного уровня. Показано, что использование вектора внутренних усилий, производные по соответствующим координатам от компонент которого определяют микро- t_{ij} и макро- σ_{ij} напряжения:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad t_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \quad t_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, \dots, \quad (2)$$

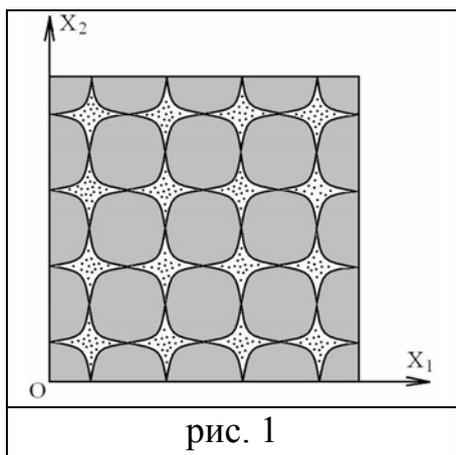
гораздо удобнее в использовании и позволяет снять ряд трудностей. При этом условие парности касательных напряжений примет вид $\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$, а уравнения

равновесия согласно определению (2) при отсутствии массовых сил выполняются автоматически.

Определяющие соотношения среды записываются отдельно для каждого масштабного уровня. Формулируются также уравнения, описывающие связи между различными масштабными уровнями.

Примем, что на микромасштабном уровне структура среды моделируется регулярной эффективной упаковкой линейно-упругих зерен (рис. 1). Поровое пространство между зёрнами предполагается не заполненным. Если не учитывать неоднородность деформаций и напряжений в пределах одного зерна, то закон Гука для зерен структуры в описанных терминах примет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial \xi_2} + \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} &= -\frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} - \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (3)$$



где ν, μ – упругие постоянные. Отметим, что предположение о регулярности упаковки зерен, по сути, описывает свойство анизотропии среды.

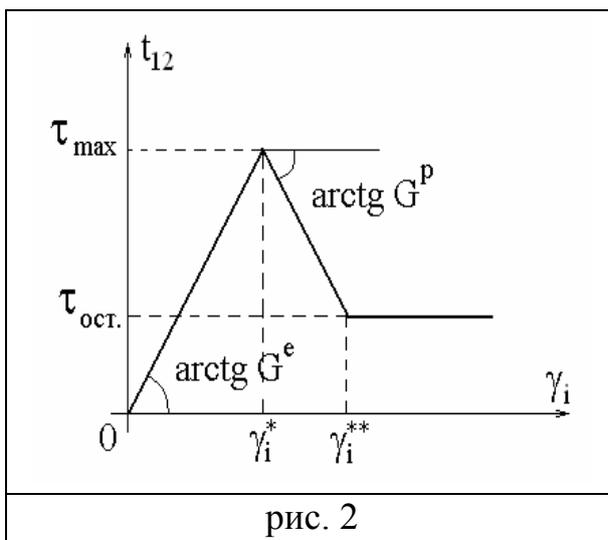
Рассмотрим теперь условия связи двух масштабных уровней среды. Кинематика процесса деформаций на стыке двух масштабов описывается разностью макро- и микродеформаций. Примем, что на границах между зернами допускаются пластические проскальзывания, развивающиеся по нелинейному закону с учетом стадий упрочнения,

разупрочнения и остаточной прочности. Тогда описанные свойства могут быть записаны в виде следующих соотношений

$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$
(4)

где первые два уравнения свидетельствуют об отсутствии дилатансии среды (объем при деформировании не изменяется), а вторая пара уравнений описывает сдвиги между зернами скелета, причем независимо по двум различным семействам линий межзеренных контактов. Модули G_1, G_2 - представляют собой пластические модули, которые могут меняться в процессе сдвигов. Общую нелинейную зависимость межзеренных проскальзываний будем аппроксимировать кусочно-линейной функцией, как показано на рис. 2. Тогда вторую пару уравнений (4) можно переписать в линеаризованном (для приращений) виде



$$\Delta t_{12} = G_1 \cdot \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi_1} \right) = G_1 \cdot \Delta \gamma_1,$$

$$\Delta t_{12} = G_2 \cdot \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi_2} \right) = G_2 \cdot \Delta \gamma_2,$$
(5)

а пластические модули G_1, G_2 однозначно определяются через заданные константы

$$\gamma_i^*, \gamma_i^{**}, G^e, G^p \text{ (см. рис. 2) выражением } G_i = \begin{cases} G^e, & 0 \leq \gamma_i < \gamma_i^*, \\ -G^p, & \gamma_i^* \leq \gamma_i < \gamma_i^{**}, \quad i = 1, 2. \\ 0, & \gamma_i^{**} \leq \gamma_i, \end{cases}$$

Описанная модель позволяет исключить внутренние микропеременные и записать замкнутую систему уравнений отдельно для макромасштабного уровня в виде зависимости приращений макроперемещений центров зерен и компонент вектора внутренних усилий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} &= A_{11} \cdot \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{12} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{13} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} &= A_{21} \cdot \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{22} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{23} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} &= A_{31} \cdot \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{32} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{33} \cdot \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь, первое уравнение представляет аналог уравнений равновесия, остальные – определяют макроповедение среды. Коэффициенты модели A_{ij} зависят только свойств структурных элементов, угла анизотропии среды, и не зависят от искомым приращений смещений и компонент вектора внутренних усилий. Однако они не являются постоянными и могут изменяться в процессе деформирования. Модель (6) может быть использована для численного решения краевых задач деформирования в квазистатической постановке по шагам нагружения.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

На основе модели разработан конечно-элементный алгоритм и компьютерная программа по решению плоских краевых задач. Рассмотрено решение задачи о деформировании горного массива в окрестности горизонтальной протяженной выработки с различной формой поперечного сечения. Показано, что в зависимости от соотношения упругих свойств зерен и степени разупрочнения при межзеренном скольжении на микромасштабном уровне процесс макродеформирования может носить как устойчивый, так и неустойчивый характер. В последнем случае в массиве происходит неконтролируемое краевыми условиями динамическое высвобождение накопленной упругой энергии.

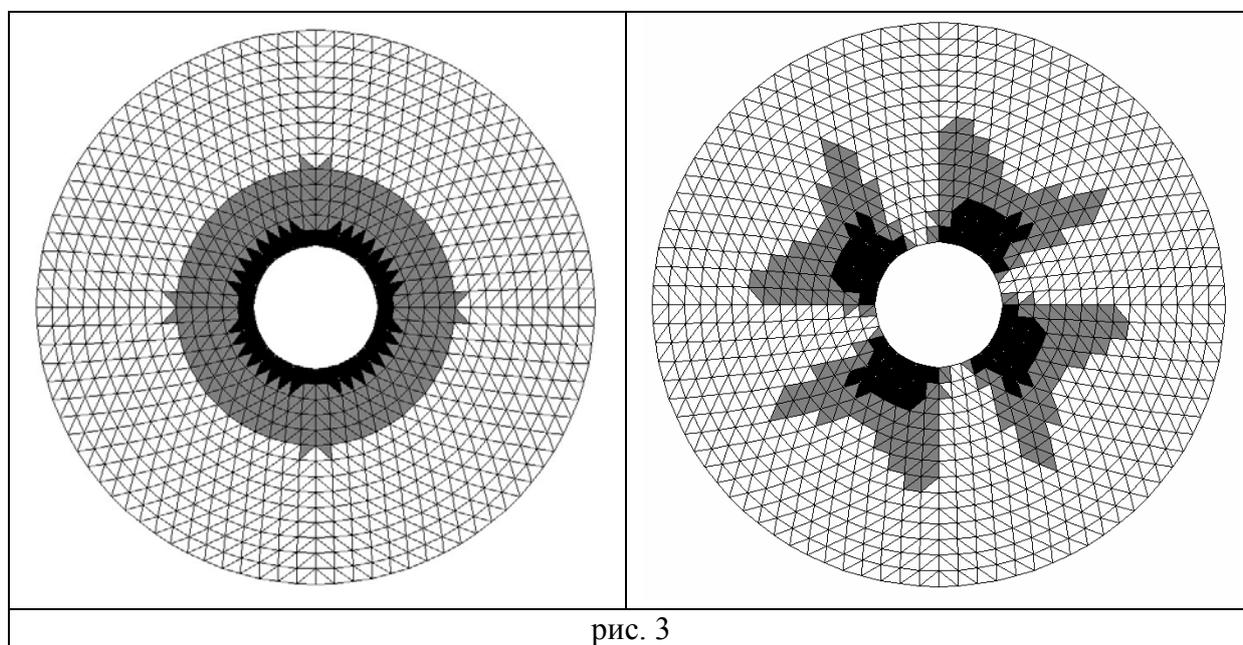
Оказывается, что модель (6) позволяет еще до численного решения задачи сделать вывод о том, будет ли деформирование протекать устойчиво, или же в среде

будут иметь место динамические скачки разупрочнения [3]. Анализ показывает, что если один из двух межзеренных контактов (скажем, с номером i) вышел на стадию разупрочнения, т.е. $G_i = -G^p$, а второй контакт (с номером j), соответственно, еще упрочняется $G_j = G^e$, тогда устойчивость деформирования гарантируется

выполнением неравенства $G^p < \frac{\mu \cdot G^e}{\mu + G^e}$. В случае, если оба контакта одновременно

вышли на разупрочнение, тогда условие устойчивости примет вид $G^p < 2\mu$. Иными словами, для устойчивости деформирования наклон ниспадающей ветви диаграммы (см. рис. 2) не должен быть слишком крутым. Он должен быть меньше критического значения. В противном случае, в среде будут наблюдаться неконтролируемые краевыми условиями динамические проявления.

Проведен ряд численных расчетов как для устойчивого, так и неустойчивого режимов деформирования. Показано, что в процессе нагружения в массиве в окрестности выработки формируются зоны разупрочнения (серый цвет) и зоны потери прочности на сдвиг (черный цвет). Геометрия указанных зон зависит от свойств среды на микромасштабном уровне, параметров разупрочнения и анизотропии горного массива. Типичные картины деформирования для различных форм поперечного сечения выработки и различных параметров задачи показаны на рис. 3,4. Построены изолинии напряженного состояния в массиве и линии тока энергии.



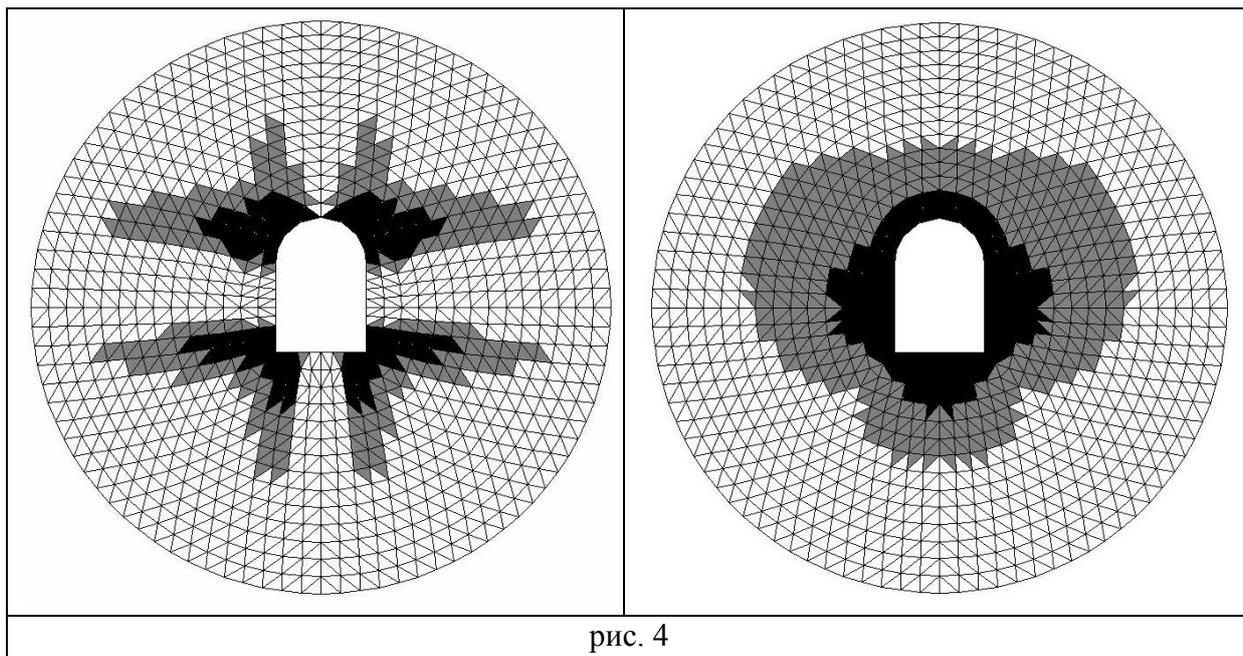


рис. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-05-91002) и СО РАН (интеграционный проект № 69).

Литература:

1. **С.В.Лавриков, О.А.Микенина, А.Ф.Ревуженко, Е.И.Шемякин.** Концепция неархимедового многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физическая мезомеханика. - 2008. - т. 11. - № 3. - с. 45-60.
2. **А.Ф.Ревуженко.** Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск, изд-во Новосибирского университета, 2000, 429с.
3. **С.В.Лавриков, О.А.Микенина, А.Ф.Ревуженко.** Моделирование процессов деформирования массива горных пород с использованием методов неархимедового анализа // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - 2008. - № 1. - с. 3-16.