Численное решение задачи распространении упругих волн в слоистых средах

Л.Т. КУРБАНАЛИЕВ

Международный казахско-турецкий университет им. К.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан

e-mail: aia-611@mail.ru

В работе рассмотрена задача распространения продольных и поперечных упругих волн в слоистых средах. Для решения поставленной задачи применен матричный метод. Начальные и граничные условия задачи выражаются через потенциалов. Получены формулы через потенциалов, для расчета перемещений и напряжений. Приведена система диференциальных уравнений первого порядка, котрая получена в результате применения матричного метода.

Рассмотрим задачу распространения плоских гармонических волн в среде, состоящей из n - слоев с плоскопараллельными границами раздела. Рассмотрим случай, когда исследуемая слоистая среда заключена между двумя полупространствами (с индексами т=0 и т = п +1. Задача заключается в определении амплитудных и фазовых спектров, коэффициентов отражения и преломления для всех заданных углов падения. Предположим, что из нижнего полупространства падает плоская гармоническая волна с частотой W под углом ? и фазовой скоростью С от удаленного источника. Граничные условия задачи между слоями (во всех точках площадки контакта) задаем в виде равенств: скоростей смещений скелета, напряжений твердой компоненты, давления жидкости и сохранения потока веществ.

$$\underset{1(m-1)}{\dot{U}} = \underset{1(m)}{\dot{U}},\ \underset{1(m-1)}{\dot{V}} = \underset{1(m)}{\dot{V}},\ \ \overline{\sigma}_{zz(m-1)} = \overline{\sigma}_{xz(m-1)} = \overline{\sigma}_{zz(m)},$$

$$\overline{\sigma}_{m-1} = \overline{\sigma}_m,\ \beta_{(m-1)}(\underset{2(m-1)}{\dot{V}} -(\underset{1(m-1)}{\dot{V}}) = \beta_m(\underset{2(m)}{\dot{V}} - \underset{1(m)}{\dot{V}}), \qquad , \tag{1}$$

$$\overline{\sigma}_{zz(m)} = \overline{\sigma}_{zz(m)} + \overline{\sigma}_m, \quad \overline{\sigma}_m = \beta_m P_m.$$

на нижней границе эти условия имеют вид:

$$\begin{array}{l} \underset{1(1)}{\dot{U}} = \underset{1(0)}{\dot{U}} + f_1(x,t),\ \underset{1(1)}{\dot{V}} = \underset{1(0)}{\dot{V}} + f_2(x,t), \\ \overline{\sigma}_{zz(1)} = \overline{\sigma}_{zz(0)} + f_3(x,t), \quad \sigma_{xz(1)} = \sigma_{xx(0)} + f_4(x,t), \\ \overline{\sigma}_{(1)} = \overline{\sigma}_{(0)} + f_s(x,t), \quad \beta_{(1)}(\underset{2(1)}{\dot{V}} - \underset{1(1)}{\dot{V}}) = \beta_{(0)}(\underset{2(0)}{\dot{V}} - \underset{1(0)}{\dot{V}}) + f_6(x,t). \end{array} \qquad , \tag{2}$$

Условия на свободной поверхности:

$$\sigma_{zz(n)} = \sigma_{xz(n)} = \sigma = 0., \tag{3}$$

Алгоритм метода. Потенциалы Φ_i и ψ_i в формуле (3) с учетом отраженных и преломленных волн можно представить в виде [2]:

$$\begin{array}{l} \Phi_{1(m)} = \varphi'_{1(m)} + \varphi''_{1(m)} + \varphi'_{2(m)} + \varphi''_{2(m)}, \\ \Phi_{2(m)} = \beta_{1(m)}(\varphi'_{1(m)} + \varphi''_{2(m)}) + \beta_{2(m)}(\varphi''_{2(m)} + \varphi''_{2(m)}), \\ \psi_{1(m)} = \psi'_{1(m)} + \psi''_{1(m)} + \psi'_{2(m)} + \psi''_{2(m)}, \quad \psi_{2(m)} = \eta_{0(m)}\psi_{1(m)}, \end{array} \qquad , \tag{4}$$

где $\varphi'_{j(m)}$ и $\psi'_{j(m)}$ - потенциалы отраженных продольных и поперечных волн; $\varphi''_{2(m)}$ и $\psi''_{j(m)}$ - потенциалы продольных и поперечных преломленных волн. Решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям (1-3) запишем так:

$$\begin{aligned} \varphi'_{j(m)} &= A'_{j(m)} \exp[iw(t - \tfrac{x}{c} - r_{jm}z)], \\ \varphi''_{j(m)} &= A''_{j(m)} \exp[iw(t - \tfrac{x}{c} + r_{jm}z)], \qquad j = 1,\ 2,\ 3, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} r_{jm} &= \sqrt{\tfrac{1}{a_{jm}^2} - \tfrac{1}{c^2}}, \quad \mathrm{Re}(r_{jm}) > 0 \quad \mathrm{Re}(c) \geq c_{jm}; \\ r_{jm} &= -\sqrt{\tfrac{1}{c^2} - \tfrac{1}{c_{jm}^2}}, \quad \mathrm{Im}(r_{jm}) < 0 \quad \mathrm{Re}(c) < c_{jm}; \\ \varphi'_{3m} &= \psi'_{1m}, \quad \varphi''_{3m} = \psi''_{1m}. \end{aligned}$$

В выражении (5) коэффициенты a_{jm} являются комплексными, зависящими от частоты. Их обратные значения представим в виде:

$$\frac{1}{a_{jm}} = \frac{1}{c_{jm}} - i\delta_{jm} \qquad (j = \overline{1,3}, \quad m = \overline{1,\ n+1}.$$

При решении сейсмологических задач предполагается:

$$\left|\frac{1}{jm}\right| \geq \delta_{jm}, \quad \delta_{jm} > 0.$$

Напряжения и давления в произвольном слое можно выразить через обобщенные потенциалы:

$$\sigma_{zz(m)} = (A_m + 2N_m)\frac{\partial^2\Phi_{1m}}{\partial z^2} + A_m\frac{\partial^2\Phi_{1m}}{\partial x^2} - 2N_m\frac{\partial^2\psi_{1m}}{\partial x\partial z} + Q_m\Delta\Phi_{2m},$$

$$\sigma_{xz(m)} = N_m(2\frac{\partial^2\Phi_{1m}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_{1m}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_{1m}}{\partial x^2}), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx(m)} &= (A_m + 2N_m)\tfrac{\partial^2\Phi_{1m}}{\partial x^2} + A_m\tfrac{\partial^2\Phi_{1m}}{\partial z^2} - 2N_m\tfrac{\partial^2\psi_{1m}}{\partial x\partial z} + Q_m\Delta\Phi_{2m}, \\ \sigma_m &= Q_m\Delta\Phi_{1m} + R_m\Delta\Phi_{2m}. \end{aligned}$$

Далее подставим (5) в (4) и переходя от смещений к скоростям с учетом (6), получим соотношение в виде:

$$\delta_{1m} = iwr_{1m}, \quad \delta_{2m} = iwr_{2m}, \quad \delta_{3m} = iwr_{3m},$$

$$\begin{aligned} &F_{jm} = [(1 - \beta_{0(m)}) + \beta_{0(m)}\beta_{j(m)}]r_{jm}, \quad F_{3m} = -(1 - \beta_{0(m)} + \beta_{(0)m}\gamma_{1m})\tfrac{\gamma_m}{c}, \\ &K_{3m} = \tfrac{2N_m r_{3m}\gamma_m}{c} \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &G_{jm} = -(Q_m + R_m\beta_{jm})(c^{-2} - r_{jm}^2), \quad L_{jm} = -\tfrac{2N_m r_{jm}}{c}, \\ &L_{3m} = -N(r_{3m}^2 - \tfrac{\gamma_{1m}}{c^2})\gamma_m, \quad K_{jm} = -[(A_m + 2N_m)r_{jm}^2]\tfrac{A_m}{c^2} + Q_m\beta_{jm}(c^{-2} + r_{jm}^2), \end{aligned}$$

$$K_{3m} = \frac{2N_m r_{3m}\gamma_m}{c} \quad j = 1, 2.$$

Поместим начало координат на границе между $m-1$ и m слоями, тогда скорости смещений и напряжений на этой границе будут связаны с потенциалами этих слоев зависимостями:

$$(\underset{1(m-1)}{\dot{U}},\ \underset{1(m-1)}{\dot{V}},\ G_{(m-1)},\ \sigma_{(m-1)},\ \sigma_{xz(m-1)},\ \sigma_{zz(m-1)} = M_m(A'_{1m},\ A''_{1m},\ A'_{2m},\ A''_{2m},\ A'_{3m},\ A''_{3m}).,\tag{7}$$

Скорость смещений и напряжений т - слоя выражается через потенциалы в слое в виде:

$$(\underset{1(m)}{\dot{U}},\ \underset{1(m)}{\dot{V}}, G_{(m)},\ \overline{\sigma}_m,\ \sigma_{xz(m)},\ \overline{\sigma}_{zz(m)}) =$$

$$= N_m(A'_{1(m)},\ A''_{1(m)},\ A'_{2(m)},\ A''_{2(m)},\ A'_{3(m)},\ A''_{3(m)}).,\tag{8}$$

Исключим из (8) и (9) потенциалы, получим формулу, связывающую скорости смещений и напряжений на верхней и нижней границах m - го слоя:

$$(\underset{1(m)}{\dot{U}},\ \underset{1(m)}{\dot{V}}, G_{(m)},\ \overline{\sigma}_m,\ \sigma_{xz(m)},\ \overline{\sigma}_{zz(m)}) =$$

$$= N_m M_m^{-1}(\underset{1(m-1)}{\dot{U}},\ \underset{1(m-1)}{\dot{V}},\ G_{(m-1)},\ \overline{\sigma}_{(m-1)},\ \sigma_{xz(m-1)},\ \overline{\sigma}_{zz(m-1)}).,\tag{9}$$

Используя граничные условия, найдем соотношения для m и m-1 слоя:

$$(\underset{1(m)}{\dot{U}},\ \underset{1(m)}{\dot{V}}, G_{(m)},\ \overline{\sigma}_m,\ \sigma_{xz(m)},\ \overline{\sigma}_{zz(m)}) =$$

$$= L_m L_{m-1}\cdot(\underset{1(m-1)}{\dot{U}},\ \underset{1(m-1)}{\dot{V}},\ G_{(m-1)},\ \overline{\sigma}_{(m-1)},\ \sigma_{xz(m-1)},\ \overline{\sigma}_{zz(m-1)}).$$

Повторяя математические преобразования подобного рода n раз, получим связь между характеристиками нижней и верхней среды в виде:

$$(\underset{1(n+1)}{\dot{U}},\ \underset{1(n+1)}{\dot{V}}, G_{(n+1)},\ \overline{\sigma}_{(n+1)},\ \sigma_{xz(n+1)},\ \overline{\sigma}_{zz(n+1)}) =$$

$$= L_n\cdot L_{n-1}...L_1(\underset{1(0)}{\dot{U}},\ \underset{1(0)}{\dot{V}},\ G_{(0)},\ \overline{\sigma}_{(0)},\ \sigma_{xz(n)},\ \overline{\sigma}_{zz(n)}).,\tag{10}$$

Подставляя в (10) вместо скоростей смещений и напряжений их выражения через потенциалы, будем иметь:

$$\begin{aligned} &A'_{1(n+1)}, A''_{1(n+1)},\ A''_{2(n+1)},\ A'_{3(n+1)},\ A''_{3(n+1)} = \\ &= M^{-1}_{(n+1)}\ L_n...L_1 E_0(A'_{1(0)},\ A''_{1(0)},\ A'_{2(0)},\ A''_{2(0)}, A'_{3(0)}, A''_{3(0)}.) \end{aligned}\ ,\tag{11}$$

В верхнем полупространстве отсутствуют отраженные волны, поэтому справедливы соотношения $A''_{1(n+1)} = A''_{2(n+1)} = A''_{3(n+1)} = 0$. В случае падения продольных волн первого типа на нижней границе среды должно быть$A'_{2(0)} = A'_{3(0)} = 0$. Предположим, что $A'_{1(0)} = 0$, тогда для второго типа продольных и поперечных волн справедливы выражения: $\begin{array}{l} A'_{2(0)} = 1\ ,\ \ A'_{1(0)} = A'_{3(0)} = 0\ , \\ A'_{3(0)} = 1\ ,\ \ A'_{1(0)} = A'_{2(0)} = 0. \end{array}$

Список литературы

[1] Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. - Л.: Наука, 1984.

[2] Thomson W.T. Transmission of elastic waves trough a strait-fief solid material. J. Apple. Phys., 1950, 21, N2, 89-93.