

Моделирование волн-убийц: обнаружение, предсказание и разрушение*

Р.В. ШАМИН

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН; Новосибирский государственный университет
e-mail: roman@shamin.ru

Рассматриваются вычислительные эксперименты по моделированию поверхностных волн идеальной жидкости экстремальной амплитуды, так называемых волн-убийц. Вычисления основаны на дифференциальных уравнениях в конформных переменных. Рассматриваются такие задачи, как обнаружение и предсказание волн-убийц, а также вопросы разрушения волн-убийц в момент их возникновения.

1. Введение

В работе рассматриваются поверхностные волны аномально большой амплитуды, так называемые волны-убийцы. Как известно, единого определения волн-убийцы, охватывающего все аспекты этого явления нет. Это связано как с многогранностью волн-убийц, так и с тем, что волнами-убийцами часто называют совершенно разные явления. Мы рассматриваем волны-убийцы как поверхностные волны в океане, которые обладают следующими основными признаками:

1. одиночная волна или небольшая группа волн, состоящая из двух-трех волн, амплитуда которых превосходит амплитуду остальных волн в данной районе;
2. волна имеет большую крутизну;
3. волна возникает внезапно;
4. волна обладает достаточно большой энергией и импульсом.

Наш подход к изучению волн-убийц основывается на вычислительных экспериментах, в ходе которых осуществляется моделирование нелинейной динамики волн на воде. В качестве математической модели мы используем нестационарные уравнения в конформных переменных. Нестационарные уравнения в конформных переменных были получены в работе [1], а затем использовались в работах многих авторов, например, [2], [3] и др. Мы будем использовать уравнения в конформных переменных в форме, полученные в работе [4]. Заметим, что эти уравнения эквивалентны уравнению Эйлера, рассматриваемому в области со свободной границей.

* Данная работа выполнялась при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор №11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между МинОбрНауки РФ, НГУ и ведущим ученым)

2. Базовые уравнения

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал. Всюду в данной работе мы считаем, что операторы градиента, дивергенции и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным x и y . Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

С уравнением (1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2)$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0, \quad (4)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \quad (5)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (6)$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Задача (1)–(6) является достаточно сложной для непосредственного изучения. Следуя работе [3], перепишем задачу (1)–(6) в других обозначениях. Совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v) .

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$x = u + \tilde{x}(u, t), \quad y = y(u, t),$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта

$$y = \mathbf{H}[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -\mathbf{H}[y],$$

$$\mathbf{H}[f](u) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности. Как показано в работе [3], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$

полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u \text{H} \left[\frac{\text{H}[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{\text{H}[\Psi_u]}{J}, \quad (7)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (\text{H}[\Psi_u])^2}{2J} + \text{H} \left[\frac{\text{H}[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{\text{H}[\Psi_u]}{J} \text{H}[\Psi_u] - gy, \quad (8)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (7)–(8) являются разрешенными относительно производных по времени. Однако для численного моделирования уравнения (7)–(8) оказались неудобны. В частности, во время численных расчетов возникает явление вычислительной неустойчивости, которое препятствует расчетам на больших временных интервалах. Поэтому мы использовали другую эквивалентную форму этих уравнений, полученную в работе [4].

Образуем пару комплексных функций $z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$ и на действительной оси $\Phi(u, t) = \Psi(u, t) + i\text{H}[\Psi(u, t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}, \quad V(w, t) = i \frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитические в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} R(w, t) &\rightarrow 1, & |w| &\rightarrow \infty, & \text{Im } w &\leq 0, \\ V(w, t) &\rightarrow 0, & |w| &\rightarrow \infty, & \text{Im } w &\leq 0. \end{aligned}$$

Как показано в работе [4], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$\dot{R} = i(UR_w - U_w R), \quad (9)$$

$$\dot{V} = i(UV_w - B_w R) + g(R - 1),$$

где $U = \text{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $B = \text{P}(V\bar{V})$, $\text{P} = (\text{I} + i\text{H})/2$ — интегральный оператор. Разрешимость этих уравнений рассматривалась в работах [5], [6].

С точки зрения численных методов уравнения (9) выгодно рассматривать с условиями периодичности по переменной u . В дальнейшем в статье мы будем рассматривать именно периодическую по u задачу.

3. Эксперименты по обнаружению волн-убийц

В работе [7] рассматривались масштабные вычислительные эксперименты по моделированию волн на воде с целью обнаружения волн убийц.

Начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - k_0) \cos(kx - \xi_k)$$

Здесь K_{max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории. Конформное преобразование осуществлялось при помощи итерационного алгоритма. Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases}$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$.

Число $1 \leq K_w \leq 10$ определяло спектральную ширину, κ, α — «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры — средняя крутизна $\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$ и дисперсия $D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1}$ принимали заданные значения. Далее, мы вычисляем точные значения полной энергии E и следили за тем, чтобы вклад в нее случайного шума составлял не более трех процентов.

Было проделано 5000 «элементарных» экспериментов. В каждом эксперименте время менялось до 10^4 с, что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{max} = 2048$ или $K_{max} = 4096$ в зависимости от полной энергии, которая менялась в пределах $1.5 \cdot 10^{-4} \leq E \leq 4 \cdot 10^{-4}$.

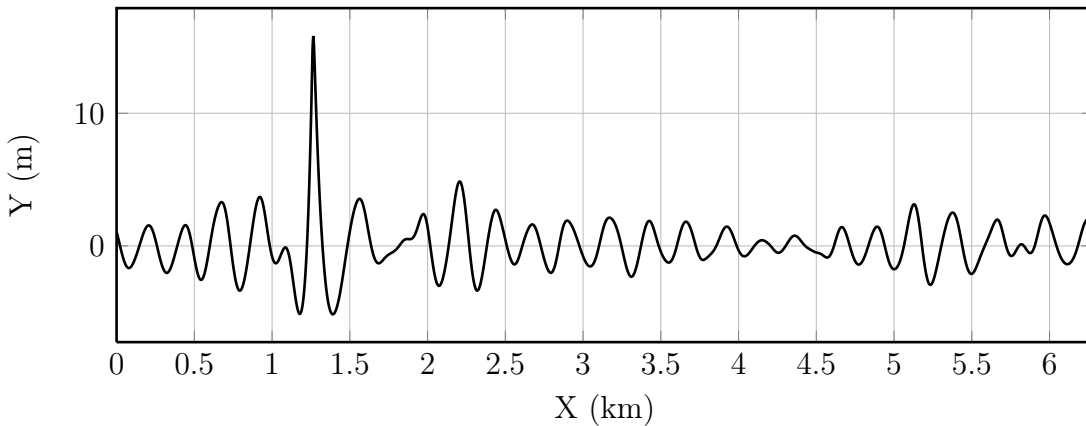
Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия

$$\frac{H_{max}}{H_s} \geq 2.1,$$

где H_{max} — амплитуда самой высокой волны, а H_s — существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн. Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение, т.е. было выполнено условие $\max_{0 < x < 2\pi} |\eta_x| \geq 0.3$. Это требование вызвано физическими соображениями и является весьма существенным.

На рис. 1 приведен характерный профиль волны-убийцы.

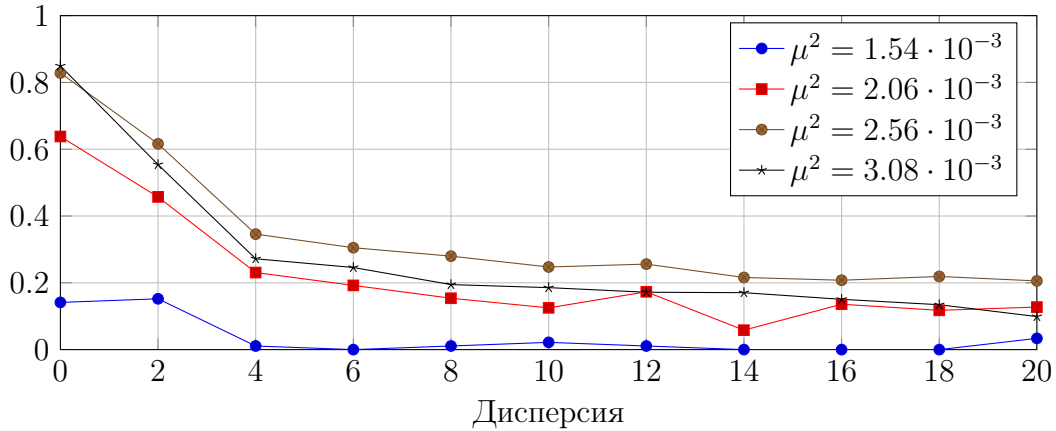
Рис. 1. Профиль волны-убийцы. Время $t = 3360$ с, максимальная крутизна — 0.558



В итоге была построена вероятность возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начальных данных. Эти результаты приведены на рис 2.

Вероятность возникновения волны-убийцы

Рис. 2. Вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от дисперсии



4. Предсказание волн-убийц

Задача предсказания возникновения волн-убийц решается на основе результатов о статистических характеристиках волн-убийц, представленных в предыдущем параграфе. Также исследовалась задача оперативного прогноза возникновения волн-убийц.

Метод краткосрочного оперативного прогноза основан на анализе изменения величин

$$H(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)}, \quad \mu_{max}(t)$$

где $H_{max}(t)$ — максимальная амплитуда в момент времени t , а $H_s(t)$ — существенная высота волн, $\mu_{max}(t)$ — максимальная крутизна свободной поверхности в момент t . Прогноз возникновения волны-убийцы регистрируется если выполнены условия:

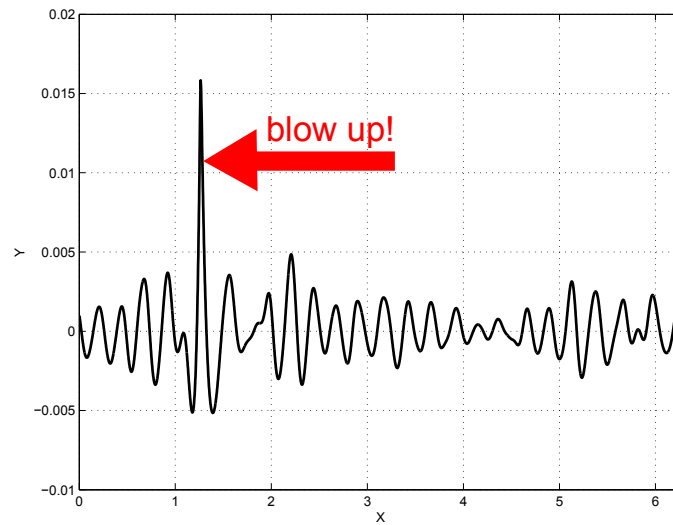
$$\frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta} \geq \alpha, \quad \frac{\mu_{max}(t + \Delta) - \mu_{max}(t)}{\Delta} \geq \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметры метода. На основе анализа данных вычислительных экспериментов наилучший выбор параметров метода прогноза возникновения волн-убийц показал точность прогноза в 68.94%.

5. Разрушение волн-убийц

Проблема разрушения возникшей или возникающей волны-убийцы в океане является весьма интересной с теоретической и практической точек зрения. Нами получены расширения уравнений (9), позволяющие учитывать внешние воздействия. Основная идея состоит в том, чтобы моделировать импульсный удар по поверхности воды в момент возникновения волны-убийцы. Схема разрушения возникающей волны-убийцы показана на следующем рисунке.

Подобные вычислительные эксперименты показывают возможность предотвращения возникновения волн-убийц.



Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. - Новосибирск, 1973. - Вып.15. - С.104-125.
- [2] Chalikov D., Sheinin D. Direct modeling of one-dimensional nonlinear potential waves, in Nonlinear Ocean Waves, ed. W. Perrie, Advances in Fluid Mechanics, Vol 17, Computation Mechanics Publications, 1998, 89-110.
- [3] Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы, 1999, т. 22, N 10, с. 916–928.
- [4] Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface// Eur. J. Mech. B Fluids. — 2002. — 21. — С. 283 – 291.
- [5] Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
- [6] Шамин Р.В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28. С. 3-144.
- [7] Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, том 91 (2010), вып. 2, с. 68-71