

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЗОНДИРОВАНИЯ СКВАЖИН С АЗИМУТАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ ОКОЛОСКВАЖИННЫХ ЗОН

Б.Г.МУКАНОВА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

e-mail: mbsha01@gmail.com

Рассматривается задача электрического зондирования скважины методом сопротивлений. Предполагается, что электрические свойства окружающей среды зависят только от расстояния до оси скважины. Задача заключается в восстановлении неизвестной электропроводности среды по измерениям потенциала электрического поля на оси скважины, возбуждаемого точечным источником тока. Задача сводится к минимизации функционала невязки по отношению к логарифмической производной искомого коэффициента. Задача интерпретации была решена численно методом градиентного спуска. Исследованы различные случаи распределения электропроводности среды и получены условия, при которых возможно успешное решение рассмотренной коэффициентной обратной задачи.

1. Введение

Теория коэффициентных обратных задач является одной из наиболее практически востребованных областей прикладной математики, имеющей множество приложений в медицине, геофизике, дефектоскопии. Обзор работ, посвященных этой области исследования, приведен в [1-3]. В данной работе мы рассматриваем задачу зондирования постоянным током. В классической постановке данная задача была впервые сформулирована в работе Лангера [4]. В этой постановке источник тока располагается на поверхности среды, при этом предполагается, что электрические свойства среды непрерывно меняются с глубиной. Тихоновым А.Н. в [5] была строго обоснована единственность решения обратной задачи для таких сред. Эта задача представляет собой классический пример коэффициентной обратной задачи, которая является некорректной. Общие подходы к решению подобных задач, такие, как метод квазирешения и регуляризации, изложены в работах [6-7]. Первая попытка численного решения этой задачи была кратко описана в незавершенном исследовании [8]. Авторы работы основывались на методе регуляризации и привели несколько примеров восстановления неизвестного коэффициента. Нам в [9] удалось численно решить данную задачу для различных вариантов распределения электропроводности. В отличие от работы [8] мы не использовали регуляризующую добавку в функционале невязки, которая внесла бы в решение дополнительный произвол. Основной идеей, приведшей к успешному численному решению задачи, была идея двухэтапного восстановления искомого коэффициента. На первом шаге восстанавливалась его логарифмическая производная, затем по аналитической формуле - сам коэффициент. В [10-11] мы исследовали свойства функционала невязки и установили,

что градиент функционала является Липшицевым, а сам функционал удовлетворяет некоторому "одностороннему" условию выпуклости В предлагаемой работе мы также рассматриваем задачу зондирования постоянным током. Однако, в отличие от [4,5,8-11], мы предполагаем, что источник тока находится в скважине, а не на поверхности среды. Постановка краевой задачи для определения потенциала электрического поля при заданной электропроводности среды, описана в книге [12]. Для решения обратной задачи мы будем опираться на постановку прямой задачи из [12].

2. Постановка задачи

Допустим, что вертикальная скважина радиуса r_c пробурена в электрически однородном по высоте пласте. Будем рассматривать цилиндрически симметричный случай, т.е. предположим, что электропроводность среды зависит только от радиуса r . Будем считать, что среда бесконечно простирается в пространстве. Для описания параметров среды будет использовать цилиндрические координаты (r, φ, z) . Предположим, что скважина заполнена буровым раствором и удельная электропроводность среды в скважине известна и равна $\sigma_c = const$. Скважина окружена зоной проникновения, в которой удельное сопротивление среды непрерывно меняется в радиальном направлении до радиуса r_1 . Пусть электропроводность вмещающей среды для $r > r_1$ известна и равна $\sigma_n = const$. Перейдем к безразмерным единицам, в которых в качестве масштаба длины используется радиус скважины, а в качестве масштаба удельной электропроводности - величина σ_c . Пусть в начале координат помещен точечный источник, сила тока которого равна I . В качестве единицы измерения потенциала электрического поля примем величину

$$M = \frac{I}{4\pi\sigma_w r_w} \quad (1)$$

Пусть функция $W(r, s)$ - есть преобразование Фурье потенциала электрического поля $U(r, z)$ по переменной z :

$$W(r, s) = \int_0^\infty U(r, z) \cos(sz) dz, \quad (2)$$

Тогда потенциал поля равен

$$U(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty W(r, s) \cos(sz) ds, \quad (3)$$

Введем обозначение:

$$a(r) = r\sigma(r), \quad (4)$$

где $\sigma(r) \in C^{2+\alpha}[0, r_1], 0 < \sigma_1 \leq \sigma(z) \leq \sigma_2 < \infty$. Согласно [12], математическая модель для определения электрического поля вне скважины при известных электрических свойствах среды может быть записана в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(a(z) \frac{\partial W}{\partial r} \right) - a(r) s^2 W(r, s) = 0, \quad s \in [0, \infty), r \in (1, r_1), \quad (5)$$

$$W'(1, s) = k(s)W(1, s) - l(s), \quad (6)$$

$$W'(r_1, s) = -m(s)W(r_1, s), \quad (7)$$

где

$$k(s) = sI_1(s)/I_0(s), \quad l(s) = 1/I_0(s), \quad m(s) = -sK_1(sr_1)/K_0(sr_1) \quad (8)$$

- заданные функции; (K_1, K_0, I_0 - модифицированные функции Бесселя своего аргумента). Задача (5-7) образует прямую задачу расчета поля, если удельная электропроводность среды $\sigma(r)$ известна. Постановка обратной задачи предполагает, что электрические свойства среды неизвестны, но при этом задана дополнительная информация, а именно, поле в доступной для наблюдателя области может быть измерено. Предположим, что в окрестности точечного источника поле в размерных переменных описывается в виде суммы потенциала точечного источника и некоторой регулярной добавки:

$$U_c(r, z) = \frac{I}{4\pi\sigma_c r_c} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \Phi(r, z) \right), \quad (9)$$

где $\Phi(r, z)$ - ограниченная и убывающая на бесконечности функция, такая, что существует преобразование Фурье

$$\psi(s) = \int_0^\infty \Phi(r, z) \cos(sz) dz \quad (10)$$

Учитывая представления (9-10), и определение единицы измерения потенциала M , мы можем записать, что на оси скважины измеренные данные аппроксимируются выражением:

$$U_c(0, z) = M \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi(s) \cos(sz) ds \right) \quad (11)$$

Будем считать, что значения электрического потенциала $U_c(0, z)$ вдоль оси скважины могут быть измерены. Зная функцию $U_c(0, z)$ и проводя обратное преобразование Фурье по отношению к отклонению измеренного поля $U_c(0, z) = MU_0(0, z)$ от величины M/z , получаем функцию $\psi(s)$:

$$\psi(s) = \int_0^\infty \left(U_0(z) - \frac{1}{z} \right) \cos(sz) dz \equiv \int_0^\infty u(z) \cos(sz) dz \quad (12)$$

Как показано в [12],

$$W(1, s) = \psi(s)I_0(s) + K_0(s) \equiv \varphi(s) \quad (13)$$

Оставляя за пределами данного исследования вопросы численного расчета преобразования Фурье (13), будем в дальнейшем использовать функцию $\varphi(s)$ в качестве измеренных данных.

Решение обратной задачи сформулируем следующим образом: *Требуется найти функцию $\sigma(r) = a(r)/r$ через решение краевой задачи (5-7), удовлетворяющую дополнительному условию (13), где $\varphi(s)$ - заданная функция.* В данной постановке наша задача свелась к рассмотренной в [9-11], за исключением формулировки краевых условий. Поэтому для численного решения этой задачи мы применили метод, описанный нами в [9].

3. Численный метод решения обратной задачи

Итак, требуется найти функцию $a(r) = r/\sigma(r)$ на решениях краевой задачи (5-7), если задана дополнительная информация о решении в виде (10). Следуя подходу, описанному в [9] введем в рассмотрение логарифмическую производную искомого коэффициента

$$p(r) = (\ln a(r))' = \frac{(\sigma r)'}{\sigma r} = \frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{r} \quad (14)$$

и будем искать решение обратной задачи (5-8), (13) методом квазирешения, а именно, будем минимизировать функционал невязки по функции $p(r)$. Введем в рассмотрение функционал невязки

$$J[p] = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} (W(1, s) - \varphi(s))^2 ds \quad (15)$$

Пусть $W(r, s; p)$ - решение задачи (5-7), соответствующее некоторой функции $p(r)$, определенной в (14). Аналогично [9], можно показать, что градиент функционала определяется формулой:

$$\nabla J = -a(r) \int_{s_1}^{s_2} l^{-1}(s)(W(1, s) - \varphi(s))W(r, s)W'(r, s)ds \quad (16)$$

Задача минимизации функционала решалась методом сопряженных градиентов [14]. Изложенная выше методика была реализована программно и получены численные результаты. На рисунках 1-3 представлены варианты как успешного, так и неудачного восстановления искомого коэффициента для точных и зашумленных данных.

Из результатов численного моделирования следуют выводы:

- обратная задача для внутрискважинного зондирования постоянным током сводится задаче зондирования над вертикально-слоистой средой, отличаясь лишь в краевыми условиями;

- теоретические результаты, полученные для задачи зондирования для вертикально-слоистой среды могут быть обобщены для рассмотренного здесь случая;

- численный метод, применявшийся ранее для вертикально-слоистой среды дает приемлемые результаты и для внутрискважинного зондирования;

Однако, в целом, качество результатов интерпретации оказывается хуже, чем в случае зондирования над вертикально-слоистой средой.

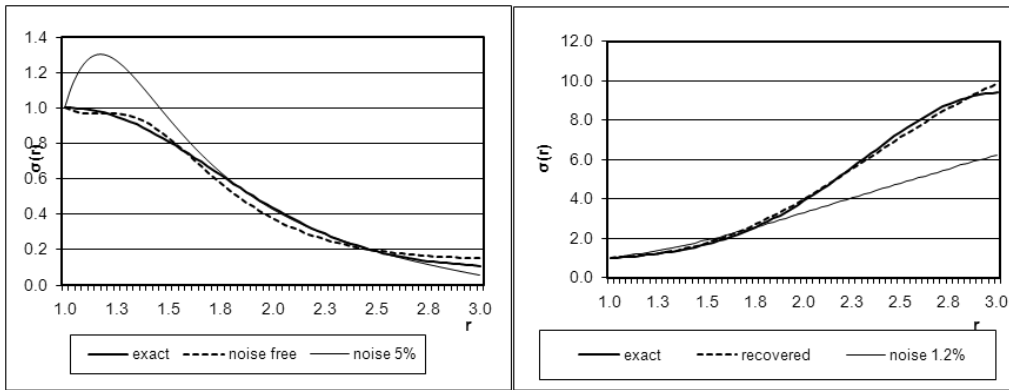


Рис. 1. Результаты восстановления монотонного профиля проводимости для контрастности среды равной 10

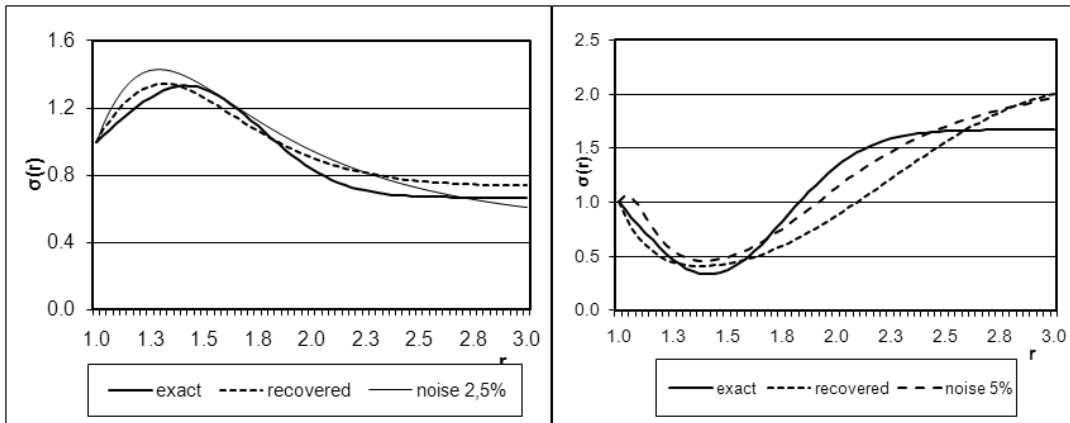


Рис. 2. Результаты восстановления профиля проводимости, имеющего экстремум вблизи границы скважины, на расстоянии 0.4 радиуса скважины

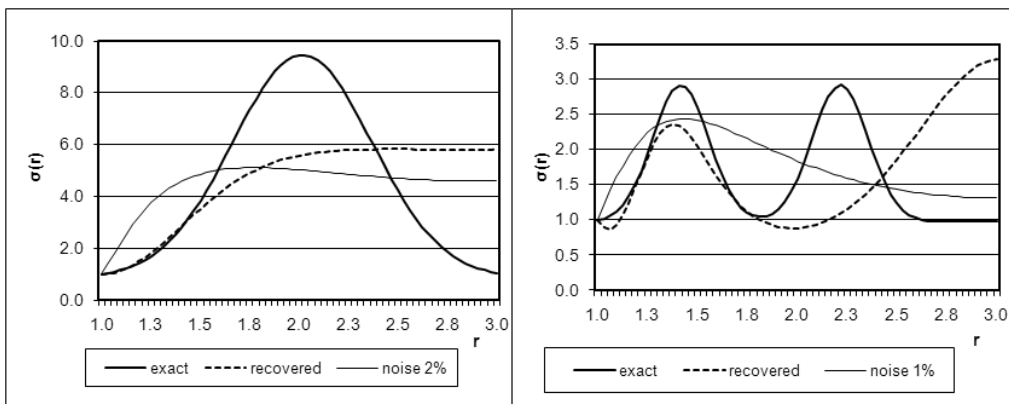


Рис. 3. Результаты интерпретации для удаленного экстремума и волнообразного профиля проводимости

Список литературы

- [1] BORCEA L. Electrical impedance tomography. Topical review//Inverse problems. 2002. Vol. 18. R99–R136.
- [2] KAUFMAN A.A., DASHEVSKY YU.A. Principles of Induction Logging//Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [3] PEN'KOVSKII V.I., KORSAKOVA N.K. The new method of data interpretation of well electromagnetic sounding// Inv.Problems in Sci. and Eng. 2010. Vol. 18, N 7. P. 983–995.
- [4] LANGER R.E. An inverse problem in differential equations// American Mathematical Society Bull. 1933. Vol. 39, P. 814–820.
- [5] ТИХОНОВ А.Н. О единственности решения задачи электроразведки//ДАН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
- [6] ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1979. 142 с.
- [7] ИВАНОВ В.К. О некорректно поставленных задачах//Матем. сборник. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.
- [8] ALEKSEEV A.S., TCHEVERDA V.A, NIAMBAA SH. Optimizational method for solving the inverse problem of geophysical prospecting by electric means under direct current for vertically-inhomogeneous media. Inverse Modelling in Exploration Geophysics. Braunschweig, Wiesbaden,1989. P 171–189.
- [9] MUKANOVA B.,ORUNKHANOV M. Inverse resistivity problem: Geoelectric uncertainty principle and numerical reconstruction method// Mathematics and computers in simulation. Elsevier,2010. Vol. 80. P. 2091–2108.
- [10] MUKANOVA B. An inverse resistivity problem: 1. Lipschitz continuity of the gradient of the objective functional//Applicable Analysis. 2009. Vol. 88, N 5. P. 749–765.
- [11] MUKANOVA B. An inverse resistivity problem: 2. Unilateral convexity of the objective functional//Applicable Analysis. 2009. Vol. 88, N. 5. P. 767–788.
- [12] ДВОРЕЦКИЙ П.И., ЯРМАХОВ И.Г. Электромагнитные и гидродинамические методы при освоении нефтегазовых месторождений. М.: Недра, 1998. 318 с.
- [13] WATSON G.N. A treatise on the theory of Bessel functions//Cambridge University press, 1945.
- [14] ВАСИЛЬЕВ Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.:Наука, 1981. 400 с.