Об одной краевой задаче для эллиптической системы первого порядка в слое.

Ж.А. Токибетов
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: `tokibetov@mail.ru`

Функциональным методом доказывается корректность одной краевой задачи в слое для эллиптической системе первого порядка, являющейся самым общим обобщением системы Коши-Римана в R^4

Если $A_j (j = \overline{1,n})$ - комплексные матрицы 2×2, $U = (u, v)$- вектор столбец из комплекснозначных гармонических функций $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, то систему двух дифференциальных уравнений $PU \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0$ называют четырехмерным аналогом системы Коши-Римана. Постановка действительных граничных условий для решений системы $PU = 0$ делает целесообразной замену ее на эквивалентную ей системе четырех действительных уравнений.

Рассмотрим следующую краевую задачу: требуется найти решение $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ системы

$$LU = \sum_{j=1}^{4} B_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + CU \equiv P(U) + CU = F(x), \tag{1}$$

являющейся естественным обобщенным четырехмерным аналогом системы уравнений Коши-Римана с младшим членам (здесь $B_1 = E$ – единичная матрица),

$$B_2 = \begin{pmatrix} K & \theta \\ \theta & L \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \theta & M \\ \rho N & \theta \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \theta & R \\ \rho S & \theta \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -b_2 & -b_1 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 + ib_2, \quad \rho = |b|^{-2},$$

$C = C(x)$ – заданная квадратная матрица четвертого порядка, $F(x)$ – заданная четырехмерная вектор-функция в области $D \equiv \{0 \prec x_1 \prec h, -\infty \prec x_2, x_3, x_4 \prec +\infty\}$, а на границе области D условиям

$$u_1|_{\Gamma} = u_2|_{\Gamma} = u_3|_{x_1=0} = u_4|_{x_1=h} = 0 \tag{2}$$

Класс вектор-функций $U(x) \in C^{\infty}(\overline{D}) \cap W_2^2(D)$, удовлетворяющих на границе условиям (2) обозначим через C_L, а его замыкание в норме пространства $W_2^1(D)$ через S_L. Норму функций $f(x) \in L_2(D)$ обозначим через $\|f\|_0$, а норму функции $f(x) \in W_2^1(D)$ через $\|f\|_1$.

При $\rho = 1$ для любой вектор - функций $U(x) \in S_L$ имеют место оценки

$$\|PU\|_0 \geq \|U_{x_1}\|_0, \quad \|PU\|_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{L}\|U\|_0.$$

Для любой вектор – функций $U(x) \in C_L$ справедливы неравенства

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{h}\right) \|U\|_1 \leq \|PU\|_0 \leq \|U\|_1.$$

Если матрица $C(x) \in C(\overline{D})$ и существует положительное число $\delta \prec \frac{\sqrt{2}}{h}$ такое, что $\|CU\|_0 \leq \delta \|U\|_0$, то для любой вектор – функций $U(x) \in S_L$ выполнены неравенства

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{h}\right)\left(1 - \delta \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \|U\|_1 \leq \|LU\|_0 \leq \|PU\|_0 \leq \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\delta\right) \|U\|_1.$$

На основании этих утверждении докажем следующую теорему:

Теорема. Если матрица $C(x)$ удовлетворяет условию последнего утверждения, то для любой вектор – функции $F(x) \in L_2(D)$ задача (1)-(2) имеет единственное решение $U(x) \in W_2^1(D)$.