Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

e-mail: shary@ict.nsc.ru

Рассматривается задача о распознавании разрешимости (непустоты множества решений) интервальных систем уравнений, главным образом, линейных.

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с интервальными $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ множеством решений называется множество [2]

$$\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b) \,\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. В этой работе мы обсудим, как проверять пустоту или непустоту множества решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, а также находить точку из него. В самой общей ситуации эта задача является NP-трудной.

Пусть $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ обозначает наименьшее расстояние точек интервала $\boldsymbol{a}$ до нуля, так называемую мигнитуду интервала, а $\operatorname{mid} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rad} \boldsymbol{a}$ — это середина и радиус интервала $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{mid} \boldsymbol{a} &:= \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}), \\ \operatorname{rad} \boldsymbol{a} &:= \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}), \end{aligned} \qquad \langle \boldsymbol{a} \rangle := \begin{cases} \min\{\, |\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}| \,\}, & \text{если } \boldsymbol{a} \not\ni 0, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{a} \ni 0. \end{cases}$$

Тогда выражением

$$\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \textstyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

задается функционал $\operatorname{Uni} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni:

$$x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0.$$

То есть, множество решений системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ — это лебегово множество $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0 \,\}$ функционала Uni.

Функционал Uni, который мы называем *распознающим функционалом* множества решений, является вогнутым в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$, а если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ некоторые столбцы целиком точечные, то $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ достигает конечного максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Как следствие этих результатов, естественно приходим к следующему рецепту исследования разрешимости интервальных линейных систем уравнений. Решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала Uni. В случае, когда полученное значение максимума функционала больше либо равно нулю, множество решений непусто и ему принадлежит аргумент максимума.

Приложением разработанной техники может служить задача восстановления линейной зависимости по неточно измеренным данным. Традиционно она сводится к нахождению решения (обычного или в обощённом смысле) для системы уравнений, построенной по данным измерений. Если же эти данные имеют интервальные неопределённости, оценкой параметров естественно взять точку из множества решений соответствующей интервальной системы уравнений [1], хотя в общем случае прямое применение этого подхода приводит к парадоксам. Для их преодоления мы предлагаем при пустом множестве решений в качестве значений искомых параметров брать точку, на которой минимизируется увеличение неопределённости в данных, делающее это множество решений интервальной системы непустым.

Для численной реализации процедуры успешно применимы методы негладкой выпуклой оптимизации, развитые в [3] и других работах, так что в целом получаем эффективную методику обработки данных с интервальными неопределённостями, которая является хорошей альтернативой методу наименьших квадратов. Она очевидным образом обобщается на нелинейный случай, но требует привлечения существенно более сложных оптимизационных методов.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента России по поддержке ведущих научных школ, проект № НШ-6068.2010.9.

Литература

[1] *Вощинин А.П.* Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская Лаборатория. 2002. Т. 68, №1. С. 118–126.

[2] *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. – Электронная книга, см. `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks`

[3] *Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градинетов // Кибернетика. 1971. №3. С. 51–59.