КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С.В. Попов

Академия наук Республики Саха (Якутия), Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Республика Саха (Якутия)

Международная конференция "Современные проблемы обратных задач", посвященная 90-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева
Новосибирск, Академгородок, 19 - 23 декабря 2022 года

19-23 декабря 2022 г.

В краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий полностью обеспечивает принадлежность решения пространствам Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2}$, но в случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных далеко не обеспечивает принадлежность решения этим пространствам.

С.А. Терсеновым в простейших случаях получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в пространствах $H_{x\ t}^{p,p/2}$ при $p > 2$. При этом условия разрешимости (ортогональности), которым должны удовлетворять данные задачи, были выписаны в явном виде.

Краевые задачи Жевре для уравнений третьего порядка рассматривались в работах Т.Д. Джураева. Отметим, что в одномерном случае число необходимых условий ортогональности конечно. Обобщенную, регулярную разрешимость краевых задач Жевре можно найти в работах А.И. Кожанова и С.Г. Пяткова.

1. Задача Жевре для уравнения третьего порядка

Пусть Q — бесконечная полоса $\Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные соответственно при $x < 0$ и $x > 0$ функции, σ_k $(k = 0, 1, 2)$ — действительные постоянные числа.
В области $Q^{\pm}$ рассматривается уравнение

$$u_{xxx} - \operatorname{sgn} x \cdot u_t = 0, \tag{1}$$

где $Q^+ = \{x \in Q : x > 0\}$, $Q^- = \{x \in Q : x < 0\}$.
Решение уравнения ищется из пространства Гельдера $H^{p,p/3}_{x\ t}(Q^{\pm})$, $p = 3l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \ x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \ x < 0, \tag{2}$$

и условиям склеивания:

$$\sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t) \quad (k = 0, 1, 2). \tag{3}$$

Лемма. Пусть выполняются условия

$$\sigma_0\sigma_2 \geq \sigma_1^2 > 0, \quad \sigma_0\sigma_1 > 0. \tag{4}$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет не более одного решения в пространстве ограниченных функций.

Существование решения. Прежде чем приступить к доказательству существования решения поставленной задачи, приведем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5}$$

фундаментальное и элементарное решения Л. Каттабрига. Эти решения для уравнения (5) имеют вид

$$U_i(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(t-\tau)^{1/3}} f_i\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\right), & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau, \end{cases} \tag{6}$$

где функции $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ называются функциями Эйри и являются линейно-независимыми решениями дифференциального уравнения

$$z''(\eta) + \frac{\eta}{3} z(\eta) = 0. \tag{7}$$

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L \equiv \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) \tag{8}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид:

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(-x), \ x > 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0,t) = (-1)^k \sigma_k \frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0,t) \quad (k = 0, 1, 2). \tag{10}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U_0(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\, d\xi,$$
$$\omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U_0(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\, d\xi, \tag{11}$$

являются решениями уравнений (8), удовлетворяющими условиям (9) в $\mathbb{R}$.

Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (8):

$$
\begin{aligned}
u^1(x,t) &= \int\limits_0^t U_0(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \\
&+ \int\limits_0^t U_1(x,t;0,\tau)\alpha_1(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t), \\
u^2(x,t) &= \int\limits_t^T U_0(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t).
\end{aligned} \tag{12}
$$

В силу общих результатов плотности α_0, α_1, β_0 должны принадлежать пространству H^q $(q = l - 1 + \frac{\gamma+1}{3})$, причем

$$\alpha_0^{(s)}(0) = \alpha_1^{(s)}(0) = \beta_0^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l-1. \tag{13}$$

Из условий склеивания (10) получим систему интегральных уравнений с операторами Абеля относительно α_0, α_1, β_0:

$$\begin{cases} f_0(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau + \omega_1(0,t) = \\ = \sigma_0 f_0(0)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau + \sigma_0\omega_2(0,t), \\ f_0'(0)\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)-\sqrt{3}\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau + \\ +\sigma_1 f_0'(0)\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau + \omega_{1x}(0,t) + \sigma_1\omega_{2x}(0,t) = 0, \\ -\frac{2\pi}{3}\alpha_0(t) + \omega_{1xx} = -\sigma_2\frac{\pi}{3}\beta_0(t) + \sigma_2\omega_{2xx}. \end{cases} \tag{14}$$

Из уравнений (14) при помощи формул обращения оператора Абеля получим эквивалентные системы сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)+\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\beta_0(t)- \\ -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{\tau}{t}\right)^{2/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{2/3}}\,d\tau, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0(t)-\sqrt{3}\alpha_1(t))+\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\beta_0(t)+ \\ +\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/3}\frac{\beta_0(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/3}}\,d\tau, \\ 2\alpha_0(t)-\sigma_2\beta_0(t)=\Phi_2(t). \end{cases} \tag{15}$$

При выполнении условий

$$\begin{cases} -\frac{\sigma_0}{\pi}\int_0^T \frac{\beta_0^{(s)}(\tau)}{\tau^{\frac{1}{3}}}\,d\tau = \Phi_0^{(s)}(0), \\ \frac{\sigma_1}{\pi}\int_0^T \frac{\beta_0^{(s)}(\tau)}{\tau^{\frac{2}{3}}}\,d\tau = \Phi_1^{(s)}(0), \\ \sigma_2\beta_0^{(s)}(0) = -\Phi_2^{(s)}(0), \\ -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\bar\beta_0^{(s)}(\tau)}{\tau^{\frac{4}{3}}}\,d\tau = -\frac{9\sigma_0}{2\pi}\beta_0^{(s)}(0)\frac{1}{T^{\frac{1}{3}}} + 3\Phi_0^{(s+1)}(0), \\ s = 0, 1, \ldots, l-1, \end{cases} \tag{16}$$

$\bar\beta_0^{(s)}(t) = \beta_0^{(s)}(t) - \beta_0^{(s)}(0)\frac{T-t}{T}$.

получим систему

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0^{(l-1)}(t)+\sqrt{3}\alpha_1^{(l-1)}(t))+\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0^{(l-1)}(t)- \\ -\frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^T(\frac{t}{\tau})^{4/3}\frac{\bar{\beta}_0^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_0^{l-1}(t), \\ \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_0^{(l-1)}(t)-\sqrt{3}\alpha_1^{(l-1)}(t))+\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\bar{\beta}_0^{(l-1)}(t)+ \\ +\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^T(\frac{t}{\tau})^{2/3}\frac{\bar{\beta}_0^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\overline{F}_1^{l-1}(t), \\ \\ 2\alpha_0^{(l-1)}(t)-\sigma_2\bar{\beta}_0^{(l-1)}0(t)=\overline{F}_2^{l-1}(t). \end{array}\right. \tag{17}$$

Исключив $\alpha_0^{(l-1)}(t)$, $\alpha_1^{(l-1)}(t)$ из системы (17), имеем

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}\,\bar{\beta}_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = Q(t), \tag{18}$$

$$\bar{\beta}_0(t) = \bar{\beta}_0^{(l-1)}(t), \tag{19}$$

где

$$K(t,\tau) = \sigma_1 t^{\frac{2}{3}} K_1(t,\tau) + \left(\tfrac{t}{\tau}\right)^{\frac{4}{3}} \tfrac{\sigma_1 - \sigma_0}{\tau - t},$$

$$K_1(t,\tau) = \tfrac{\tau^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{3}}}{\tau^{\frac{4}{3}}(\tau^{\frac{2}{3}} + \tau^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}})},$$

$$Q(t) = \overline{F}_0^{\,l-1}(t) + \overline{F}_1^{\,l-1}(t) - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{F}_2^{\,l-1}(t).$$

1 случай. Если $\sigma_0 = \sigma_1$, то находимся в условиях работы автора (2015), ядро уравнения (18) преобразуем в следующем виде

$$t^{\frac{2}{3}} K_1(t,\tau) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1+\gamma}{3}} \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}, \quad \varphi(x) = x^{\frac{1-\gamma}{3}} \frac{1-x^{\frac{2}{3}}}{1-x}.$$

Полагая в (18) $\beta_1(t) = \bar{\beta}_0(t) \cdot t^{-\frac{1+\gamma}{3}}$, $Q_1(t) = Q(t) \cdot t^{-\frac{1+\gamma}{3}}$, имеем

$$\frac{2(\sigma_0+\sigma_2)}{\sqrt{3}}\beta_1(t) + \frac{\sigma_0}{\pi}\int\limits_0^T \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{\beta_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = Q_1(t). \tag{20}$$

Интегральное уравнение (20) является уравнением с ядром, однородным степени -1 (Л.Г. Михайлов).

Вводя новые независимые переменные $t = Te^{-y}$, $\tau = Te^{-x}$ и обозначая

$$\beta_2(y) = \beta_1(Te^{-y}), \quad Q_2(y) = Q_1(Te^{-y}),$$

$$h(x) = \varphi(e^{-x}) = e^{(1-\beta)x} \cdot K_2(1, e^x),$$

$$K_2(t,\tau) = \tau^{\frac{2}{3}} K_1(t,\tau), \quad \beta = \frac{1-\gamma}{3}$$

получим интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{2(\sigma_0 + \sigma_2)}{\sqrt{3}} \beta_2(y) + \frac{\sigma_0}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} h(y-x)\beta_2(x)\,dx = Q_2(y), \tag{21}$$

$$0 < y < +\infty.$$

Нетрудно проверить выполнение условия интегрируемости

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} |K_2(1,u)| u^{-\beta}\, du = 2\sqrt{3}\pi \frac{\sin(\beta + \frac{1}{3})\pi}{\sin(3\beta\pi)}$$

при $0 < \beta < \frac{1}{3}$.
Уравнение

$$\beta_1(t) + \lambda \int\limits_{0}^{T} \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{\beta_1(\tau)}{\tau}\, d\tau = Q_1(t). \tag{22}$$

однозначно разрешимо при $\lambda \in N_\lambda = (-\infty; \frac{1}{2\sqrt{3}\pi})$, для (20) имеем $\lambda_0 = -\frac{\sqrt{3}\sigma_0}{2(\sigma_0+\sigma_2)\pi} \in N_\lambda$ при выполнении (4).

В пространствах Гельдера исследование уравнений вида (20) можно найти в работах А.П. Содатова, на который теория уравнений Винера-Хопфа (21) не переносится прямо. Фредгольмовость интегрального оператора (20) следует из из условия:

$$B(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}\,\sigma_0}{2(\sigma_0+\sigma_2)\pi} \int\limits_0^\infty \varphi(t) t^{q-ix}\, dt$$

нигде на действительной оси в нуль не обращается $\forall q \in \mathbb{R}$, которое легко проверяется. В самом деле, условие $B(x) \neq 0$ эквивалентно условию

$$\mathrm{th}(\pi x) \cdot \mathrm{tg}(\pi p) \neq \mathrm{th}(3\pi x) \cdot \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}(p-1)), \quad p = 3q - \gamma + 3.$$

Из уравнения (18) следует, что для того, чтобы $\beta_0(T) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\sigma_0}{\pi} \int\limits_0^T K_1(T, \tau)\tau^{\frac{2}{3}}\beta_3(\tau)\, d\tau = \frac{Q(T)}{T^{\frac{2}{3}}}. \tag{23}$$

При выполнении условия (23) придем к следующему уравнению:

$$\frac{2(\sigma_0 + \sigma_2)}{\sqrt{3}}\beta_3(t) + \frac{\sigma_0}{\pi} \int\limits_0^T K_3(t, \tau)\beta_3(\tau)\, d\tau = Q_3(t). \tag{24}$$

Подставляя найденные значения функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ в условия (16), (23) получим $3l+1$ условий разрешимости поставленной задачи (1)–(3) в пространстве $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q)$. Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 3l+1. \tag{25}$$

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 3l + \gamma)$, $0 < \gamma < 1$, выполнены условия (4) и $\sigma_0 = \sigma_1$. Тогда при выполнении $3l + 1$ условий (25) существует единственное решение уравнения (1) в Q из пространства $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Замечание 1. Выполнение условий (4) можно заменить неравенством $|\sigma_2| \geq |\sigma_1| > 0$.

2 случай.

Если $\sigma_0 \neq \sigma_1$, то уравнение (18) имеет вид

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}\,\bar{\beta}_0(t) + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{4}{3}}\,\frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = Q_4(t). \qquad (26)$$

Сингулярное уравнение (26) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_4(t) = \bar{\beta}_0(t) t^{-\frac{4}{3}}$. Найдем решения $\beta_4(t)$, неограниченное при $t = 0$, допускающие особенность порядка меньше единицы и ограниченные при $t = T$. Введем обозначения $A = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}$, $B = \sigma_1 - \sigma_0$, $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{A}{B} \right|$. Тогда в указанном классе каноническая функция равна

$$\chi(z) = (z - T)^{\frac{1}{2} + \theta} z^{-\frac{1}{2} - \theta}$$

в случае одного знака чисел A и B и равна

$$\chi(z) = (z - T)^{\frac{1}{2} - \theta} z^{-\frac{1}{2} + \theta}$$

в случае разных знаков чисел A и B, индекс $\varkappa = 0$.

Решение сингулярного уравнения (26) в случае $AB > 0$ имеет вид

$$\bar{\beta}_0(t) = \frac{A}{B^2+A^2} Q_4(t) - \frac{B}{\pi(B^2+A^2)} (T-t)^{\frac{1}{2}+\theta} t^{\frac{5}{6}-\theta} \int\limits_0^T \frac{Q_4(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{1}{2}+\theta} \tau^{\frac{5}{6}-\theta} (\tau-t)} d\tau, \tag{27}$$

а в случае $AB < 0$ имеет вид

$$\bar{\beta}_0(t) = \frac{A}{B^2+A^2} Q_4(t) - \frac{B}{\pi(B^2+A^2)} (T-t)^{\frac{1}{2}-\theta} t^{\frac{5}{6}+\theta} \int\limits_0^T \frac{Q_4(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{1}{2}-\theta} \tau^{\frac{5}{6}+\theta} (\tau-t)} d\tau. \tag{28}$$

Подставляя найденные значения функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ в условия (16), получим $3l$ условия разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q)$. Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 3l. \tag{29}$$

Введем обозначения

$$A = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad B = \sigma_1 - \sigma_0, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{A}{B} \right|.$$

Теорема 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $(p = 3l + \gamma)$, $0 < \gamma < 1$, выполнены условия (4), $\sigma_0 + \sigma_2 < 0$ и $AB > 0$. Тогда при выполнении $3l$ условий (29) существует единственное решение уравнения (1) в Q, удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства:

1) $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, если $0 < \gamma < \frac{1}{2} + 3\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/3}(Q^{\pm})$, $q = 3l + \frac{1}{2} + 3\theta$, если $\frac{1}{2} + 3\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/3}(Q^{\pm})$, если $\gamma = \frac{1}{2} + 3\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Введем обозначение

$$\Psi(t) = \frac{(t-c)^\mu}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\, d\tau \equiv (t-c)^\mu F(t), \tag{30}$$

где

$$\psi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(c) \in H^\lambda(L)$$

вблизи c, включая c.

Теорема 1 (Н.И. Мусхелишвили). Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши

$$\Psi(t) = (t-c)^\mu \int\limits_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^\mu(\tau-t)}\, d\tau \tag{31}$$

удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c с показателем $\min\{\lambda, \mu\}$ при $\lambda \neq \mu$ и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda = \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 2′. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $(p = 3 + \gamma)$, $0 < \gamma < 1$, выполнены условия (4), $\sigma_0 + \sigma_2 > 0$ и $AB > 0$. Тогда при выполнении $3l$ условий (29) существует единственное решение уравнения (1) в Q, удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства:

1) $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, если $0 < \gamma < \frac{3}{2} - 3\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/3}$, $q = 3l + \frac{3}{2} - 3\theta$, если $\frac{3}{2} - 3\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\quad t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/3}$, если $\gamma = \frac{3}{2} - 3\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $(p = 3 + \gamma)$, $0 < \gamma < 1$, выполнены условия (4), $\sigma_0 + \sigma_2 < 0$ и $AB < 0$. Тогда при выполнении $3l$ условий (29) существует единственное решение уравнения (1) в Q, удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства:

1) $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, если $0 < \gamma < \frac{1}{2} - 3\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/3}(Q^{\pm})$, $q = 3l + \frac{1}{2} - 3\theta$, если $\frac{1}{2} - 3\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\quad t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/3}(Q^{\pm})$, если $\gamma = \frac{1}{2} - 3\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Замечание 2. В теореме 2 показаны, что при $p - [p] \geq \frac{1}{2} + 3\theta$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных φ_1, φ_2. Аналогично, в теореме $2'$ гладкость решения не повышается при $p - [p] \geq \frac{3}{2} - 3\theta$ и в теореме 3 — при $p - [p] \geq \frac{1}{2} - 3\theta$. Таким образом, гладкость решения существенно зависит от нецелого показателя Гельдера и от весовых коэффициентов условий склеивания.

2. Фредгольмовость сингулярного уравнения

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор (18):

$$(N\varphi)(t_0) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}\varphi(t_0) +$$

$$\frac{\sigma_1}{\pi}\int_0^T \frac{t_0^{2/3}(t_0^{1/3} + t^{1/3})}{t^{4/3}(t_0^{2/3} + t_0^{1/3}t^{1/3} + t^{2/3})}\varphi(t)dt + \tag{32}$$

$$+\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\pi}\int_0^T \left(\frac{t_0}{t}\right)^{4/3} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad 0 < t_0 < T.$$

Уравнение (32) можно переписать так:

$$(N\varphi)(t_0) = \sigma\varphi(t_0) + \int_0^T h\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} + \int_0^T g\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad (33)$$

где

$$h(t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\pi}\frac{t^{4/3}}{1-t},$$

$$g(t) = \frac{\sigma_1}{\pi}\frac{t^{2/3}(t^{1/3}+1)}{t^{2/3}+t^{1/3}+1} = \frac{\sigma_1}{\pi}\left(\frac{t^{2/3}}{1-t} - \frac{t^{4/3}}{1-t}\right),$$

$$\sigma = (\sqrt{3})^{-1}(\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2).$$

По отношению к сингулярному оператору Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad 0 < t_0 < T,$$

исходное выражение оператора N можно переписать таким образом

$$N = \sigma + i\sigma_1(\rho K\rho^{-1}) - i\sigma_0(\rho^2 K\rho^{-2}), \tag{34}$$

где ρ означает оператор умножения на весовую функцию $\rho(t) = t^{2/3}$.

Оператор N будем рассматривать в двупараметрических семействах весовых пространств $C^{\mu}_{\lambda}([0,T];0,T)$ и $L^{p}_{\lambda}([0,T];0,T)$, где $0<\mu<1$, $p>1$ и λ означает пару λ_0,λ_1 вещественных чисел. Эти пространства определяются, соответственно, нормами

$$|\varphi| = \sup_{0<t<T} |\varphi(t)| + \sup_{0<t_1<t_2<T} \frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\mu}},$$

где $\psi(t) = t^{\mu-\lambda_0}(T-t)^{\mu-\lambda_1}\varphi(t)$, и

$$|\varphi| = \left(\int_0^T t^{-p\lambda_0-1}(T-t)^{-p\lambda_1-1}|\varphi(t)|^p\right)^{1/p},$$

относительно которых они банаховы.

Известно, что при $-1 < \lambda_0 < 0$ сингулярный оператор Коши K ограничен в пространствах C^{μ}_{λ} и L^{p}_{λ} (Солдатов А.П. 1991). По отношению к первому пространству этот факт установлен Р.В. Дудучава, а ко второму пространству – Б. В. Хведелидзе Следовательно, оператор N ограничен в этих пространствах при

$$1/3 < \lambda_0 < 2/3, \quad -1 < \lambda_1 < 0. \tag{2}$$

Возникает вопрос о фредгольмовости этого оператора в указанных пространствах и формуле его индекса.

3. Обратная задача для уравнения третьего порядка

Задачи определения коэффициентов уравнений и систем в частных производных по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение [Романов В.Г., Кабанихин С.И.]. В теории обратных задач тепло- и массопереноса часто возникают проблемы восстановления плотностей неизвестных внешних источников. При этом считают, что имеет место зависимость неизвестной правой части от временной переменной, и рассматриваемые обратные задачи формулируют как проблемы управления [Калинина Е.А., Алексеев Г.В.].

Исследованию обратных задач для параболических уравнений высокого порядка посвящены работы [Прилепко И.А., Иванчов М.]. Заметим что, если прямые пространственно нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка хорошо изучены (см., например, работы Кожанова А.И.), то обратные задачи для таких уравнений изучены сравнительно мало. Отметим работы, в которых неизвестный параметр зависит от временной переменной рассматривались в случаях параболических [Телешева Е.А.], гиперболических уравнений [Павлов С.С.].

Рассматривается обратная задача нахождения вместе с решением внешних источников воздействия для уравнений третьего порядка по временной переменной для уравнения третьего порядка при задании точечных условий переопределения, в частности, рассматриваются случаи восстановления плотностей от одного, а также от двух источников. Доказано существование и единственность решения коэффициентной обратной задачи для уравнения третьего порядка с финальными условиями переопределения.

Спасибо за внимание !