Некоторые обратные задачи для серии моделей динамики популяций с возрастным структурированием

Щеглов А.Ю., Нетесов С.В.

МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай; МГУ, Москва, Россия

shcheg@cs.msu.ru

Исследованные в докладе обратные задачи сформированы на основе нескольких моделей. Линейная модель известна благодаря [1] как «квазистабильная»:

$$\begin{cases} u_x(x,t)+u_t(x,t) = -(b(x)+\eta(t))\,u(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,T], \\ u(0,t)= 2\int_0^l b(\xi)u(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T]; \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l]. \end{cases}$$

В этой модели клеточной популяции рождение пар особей нулевого возраста ($x=0$) связано с делением клетки, а смертность – с двумя коэффициентами $b(x)$ и $\eta(t)$.

Другая модель получила ([2], p.73) название «открытой» из-за эмиграционного и иммиграционного потоков:

$$\begin{cases} u_x(x,t)+u_t(x,t)+\mu(x)u(x,t) = m(x)\eta(t)-e(x)u(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,T], \\ u(0,t)=\int_0^l \beta(\xi)u(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T]; \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l]. \end{cases}$$

Ещё одна, нелинейная модель ([2], § 5.4, p. 153–155), ([3],p. 160) учитывает влияние перенаселения популяции:

$$\begin{cases} u_x(x,t)+u_t(x,t)+\mu_0(x)\eta(t)u(x,t)= -\mu_1(x)\Psi(S(t))u(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,T], \\ u(0,t)=\Phi(S(t))\int_0^l \beta(\xi)u(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l]; \quad S(t)=\int_0^l \gamma(\xi)u(\xi,t)\,d\xi, \quad t\in[0,T]. \end{cases}$$

Здесь функция $u(x,t)$ задаёт число особей возраста x (их плотность) в популяции в момент t; функции $\mu_0(x)\eta(t)$ и $\mu_1(x)$ характеризуют интенсивность смертности особей возраста x в момент времени t, естественной и от перенаселения, соответственно; функции $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - плотности рождаемости и активности по возрасту x; функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ характеризуют влияние численности всей популяции на рождаемость и смертность через интегральную характеристику $S(t)$ общей численности популяции.

В рамках решения обратной задачи для последней модели две функции $\eta(x)$, $u(x,t)$ могут быть восстановлены в виде

$$\eta(t)\in C[0,T], \quad \eta(t)\geqslant 0 \quad \forall t\in[0,T], \qquad u(x,t)\in C^1([0,l]\times[0,T]),$$

по заданному значению $x^*\in(0,l]$ и известным функциям $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, $\mu_0(x)$, $\mu_1(x)$, $\Psi(s)$, $\Phi(s)$, $g(t)$ таким, что

$$g(t)=u(x^*,t), \qquad t\in[0,l].$$

Дифференциальные уравнения, входящие в обратные задачи, редуцируются к системе интегральных уравнений. Анализ получаемой системы позволяет сформировать условия единственности решения обратных задач, а также предложить итерационные алгоритмы численного решения обратных задач.

Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Список литературы

1. *Coale A.J.* The growth and structure of human populations. Princeton: Princeton University Press, 1972.
2. *Iannelli M., Milner F.* The basic approach to age-structured population dynamics. Berlin: Springer, 2017.
3. *Inaba H.* Age-structured population dynamics in demography and epidemiology. N-Y.: Springer, 2017.