Обратная задача для уравнения гиперболического типа с краевым условием, содержащим производную второго порядка

Андреянова О.А., Щеглов А.Ю.

МГУ, Москва, Россия; МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай

shcheg@cs.msu.ru

Исследуются разрешимость прямой задачи и единственность решения обратной задачи для модели малых поперечных колебаний конечной струны, на один конец которой действует сила тяжести тела с изменяющейся массой. Дополнительной информацией для решения обратной задачи является известное решение прямой задачи при заданном фиксированном значении пространственного аргумента. Модель описывает колебания бура в глубокой скважине с неклассическим граничным режимом. Схожая модель и обратная задача для неё исследовались в случаях классических краевых условий [1] и неклассического краевого условия другого вида [2]. Здесь в рамках обратной задачи определения требуют функция в неклассическом краевом условии и функциональный множитель в правой части уравнения колебаний. Доказана теорема единственности решения обратной задачи. Для прямой задачи установлены условия её однозначной разрешимости в виде, упрощающем исследование обратной задачи. Предложен алгоритм поэтапного раздельного восстановления искомых в рамках обратной задачи функций на основе метода последовательных приближений.

Прямая задача имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x)h(t), \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{1}$$

$$-\gamma(t)u_x(x,t)\big|_{x=0} = g - u_{tt}(x,t)\big|_{x=0}, \quad u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $\Pi_T = \big\{(x,t) : \, 0 < x < l, \, 0 < t \leqslant T\big\}$.

В рамках обратной задачи при заданных значениях $a > 0$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, и b, l таких, что $0 < b \leqslant l < aT$, и при известных функциях $\varphi(x)$, $h(t)$, $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, дополнительно задана функция

$$p(t) = u(b,t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $u(x,t)$ – решение прямой задачи. Требуется восстановить функцию $f(s)$ и принимающую положительные значения функцию $\gamma(\tau)$ при $s \in [0,l]$, $\tau \in [0,\widehat{T}]$, где $\widehat{T} = T - (b/a)$, и затем на множестве $\Lambda_{b,T} = \big\{(x,t) : \, \max\{0, b - (T-t)a\} \leqslant x \leqslant l, \, 0 \leqslant t \leqslant T\big\}$ получить решение $u(x,t)$ прямой задачи так, чтобы найденные функции $f(s)$, $\gamma(t)$, $u(x,t)$ удовлетворяли уравнению (1) на множестве $\Lambda_{b,T}$, левому условию (2) при $t \in [0,\widehat{T}]$, правому условию (2), условию (3) при $t \in [0,T]$ и условию (4).

Дифференциальные уравнения, составляющие обратную задачу редуцируются к системе линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода и алгебраического уравнения. Анализ получаемой системы позволяет сформировать условия единственности решения обратной задачи, а также предложить итерационный алгоритм приближённого решения обратной задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Список литературы

1. *Shcheglov A. Yu., Andreyanova O. A.* The inverse problem for the nonhomogeneous oscillation equation on a half-line with a boundary condition of the third kind // Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau. 2022. V. 33. No. 1. P. 9–23.
2. *Andreyanova O. A., Shcheglov A. Yu.* Reconstruction of two functions in the model of vibrations of a string one end of which is placed in a moving medium // Computational Mathematics and Mathematical Physics, Pleiades Publ. 2023. V. 63. No. 5. P. 808–820.