

# ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Международная конференция,  
посвященная 80-летию со дня рождения  
академика Михаила Михайловича Лаврентьева

Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012 г.

## ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

---

## INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

The International Conference  
dedicated to the 80th anniversary of the birthday of  
Academician Mikhail Mikhailovich Lavrent'ev

Novosibirsk, Russia, 5–12 August 2012

## ABSTRACTS

Сибирское научное издательство  
Новосибирск  
2012

### **Международный программный комитет**

В. Г. Романов — председатель, С. И. Кабанихин, М. М. Лаврентьев (мл.), М. А. Шишленин — заместители председателя, В. А. Дедок — ученый секретарь, О. М. Алифанов, Д. С. Аниконов, Ю. Е. Аниконов, Б. Д. Аннин, М. И. Белишев, Ю. Я. Белов, В. В. Васин, А. М. Денисов, Г. Н. Ерохин, В. А. Ильин, Х. Х. Имомназаров, А. Л. Карчевский, А. И. Кожанов, В. А. Левин, П. С. Мартышко, Б. Г. Михайленко, В. А. Морозов, Л. А. Назарова, А. И. Прилепко, В. В. Пухначев, С. И. Смагин, М. В. Федорук, М. В. Фокин, В. М. Фомин, В. А. Чеверда, Ю. И. Шокин, М. И. Эпов, А. Г. Ягола, G. Alessandrini, H. T. Banks, M. A. Bektemessov, G. Chavent, D. Colton, H. W. Engl, A. Hasanov (Hasanoglu), A. D. Iskenderov, Y. Iso, M. V. Klibanov, R. Kress, K. Kunisch, A. Lorenzi, G. Nakamura, Z. Nashed, F. Natterer, L. Päiväranta, V. I. Priimenko, G. Uhlmann, Y. Wang, V. G. Yakhno, M. Yamamoto, J. Zou

### **Организационный комитет**

В. Г. Романов — председатель, С. И. Кабанихин, М. М. Лаврентьев (мл.), М. А. Шишленин — заместители председателя, В. А. Дедок — ученый секретарь, Д. С. Аниконов, Т. В. Бугуева, А. Ф. Воронин, А. И. Кожанов, Л. А. Назарова, Т. Ю. Моргунова, М. С. Хайретдинов

### **Редколлегия**

член-корр. РАН В. Г. Романов, член-корр. РАН С. И. Кабанихин, Д. С. Аниконов, А. И. Кожанов, Л. А. Назарова, М. С. Хайретдинов, М. А. Шишленин

---

### **International Program Committee**

G. Alessandrini, D. S. Anikonov, Yu. E. Anikonov, B. D. Annin, H. T. Banks, M. A. Bektemessov, M. I. Belishev, Yu. Ya. Belov, G. Chavent, V. A. Cheverda, D. Colton, V. A. Dedok (Scientific Secretary), A. M. Denisov, H. W. Engl, M. I. Eпов, G. N. Erokhin, M. V. Fedoruk, M. V. Fokin, V. M. Fomin, A. Hasanov (Hasanoglu), V. A. Il'in, Kh. Kh. Imomnazarov, A. D. Iskenderov, Y. Iso, S. I. Kabanikhin (Deputy Chair), A. L. Karchevsky, M. V. Klibanov, A. I. Kozhanov, R. Kress, K. Kunisch, M. M. Lavrent'ev (jr.) (Deputy Chair), V. A. Levin, A. Lorenzi, P. S. Martishko, B. G. Mikhailenko, V. A. Morozov, G. Nakamura, Z. Nashed, F. Natterer, L. A. Nazarova, L. Paivarinta, A. I. Prilepko, V. I. Priimenko, V. V. Pukhnachev, V. G. Romanov (Chair), M. A. Shishlenin (Deputy Chair), Yu. I. Shokin, S. I. Smagin, G. Uhlmann, V. V. Vasin, Y. Wang, A. G. Yagola, V. G. Yakhno, M. Yamamoto, J. Zou

### **Organizing Committee**

Chair — V. G. Romanov, Deputy Chairs — S. I. Kabanikhin, M. M. Lavrent'ev (jr.), M. A. Shishlenin, Scientific Secretary — V. A. Dedok, D. S. Anikonov, T. V. Bugueva, A. F. Voronin, A. I. Kozhanov, L. A. Nazarova, T. Yu. Morgunova, M. S. Khairetdinov

### **Editorial Board**

D. S. Anikonov, S. I. Kabanikhin, M. S. Khairetdinov, A. I. Kozhanov, L. A. Nazarova, V. G. Romanov, M. A. Shishlenin

## **Организаторы конференции**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН  
Институт вычислительных технологий СО РАН  
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН  
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН  
Новосибирский государственный университет  
Красноярский федеральный университет

## **Спонсоры**

Российский фонд фундаментальных исследований  
(гранты 12-01-06060-г, 12-01-06821-моб.г)  
Intel  
Schlumberger  
Лаборатория нелинейных волновых процессов Новосибирского государственного университета под руководством академика РАН В. Е. Захарова

---

## **Organizers of the Conference**

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS  
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS  
Institute of Computational Technologies SB RAS  
Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS  
Novosibirsk State University  
Krasnoyarsk Federal University

## **Sponsors**

Russian Foundation for Basic Research  
(grants 12-01-06060-г, 12-01-06821-моб.г)  
Intel  
Schlumberger  
Laboratory of nonlinear wave processes at Novosibirsk State University that is headed by the Academician of the Russian Academy of Sciences Vladimir Zakharov

# Содержание

---

## ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<b>Алифанов О. М.</b> Обратные задачи в теплофизических исследованиях .....	27
<b>Anikonov D. S.</b> Underdetermination in inverse problems .....	28
<b>Аниконов Ю. Е.</b> Некоторые вопросы теории и приложений обратных и некорректных задач ..	29
<b>Belishev M. I.</b> The boundary control method in 2007–2012.....	30
<b>Белоносов В. С.</b> Модифицированный метод Крылова-Боголюбова и его приложения.....	31
<b>Bukhgeym A. L.</b> Inverse problems and integral geometry .....	33
<b>Vasin V. V.</b> Nonlinear inverse problems: regularization and iterative approximation.....	34
<b>Голушко С. К.</b> Прямые и обратные задачи в механике однородных и неоднородных упругих тел.....	36
<b>Ikehata M., Itou H.</b> On reconstruction of a cavity in a linearised viscoelastic body from transient boundary data.....	37
<b>Iskenderov A. D., Yaqubov G. Y., Musayeva M. A.</b> Identification problem for the Schrodinger equation .....	38
<b>Lorenzi A.</b> Ill-posed problems for differential and integro-differential equations and related identification problems.....	39
<b>Kabanikhin S. I.</b> Combined inverse problems of mathematical physics .....	40
<b>Klibanov M. V.</b> Algorithms with the approximate global converse property for coefficient inverse problems with both syntetic and experimental data.....	41
<b>Кожанов А. И.</b> Прямые и обратные задачи для уравнений соболевского типа .....	42
<b>Nakamura G.</b> Reconstruction schemes for diffusion equations.....	43

<b>Назарова Л. А., Назаров Л. А.</b> Обратные задачи геомеханики для реологических моделей массивов горных пород .....	44
<b>Novikov R. G.</b> New global stability estimates for the Gel'fand-Calderon inverse problem.....	45
<b>Пененко В. В.</b> Вариационные принципы для решения прямых и обратных задач гидротермодинамики и химии атмосферы с оценкой неопределенностей .....	46
<b>Пикалов В. В.</b> Обратные задачи оптики: достижения и проблемы.....	48
<b>Радкевич Е. В.</b> О глобальных решениях задачи Коши для дискретных кинетических уравнений.....	49
<b>Sabelfeld K. K.</b> Stochastic methods for solving some ill-posed and inverse problems .....	50
<b>Sebu C., Schilcher K., Spiesberger H.</b> Conductivity reconstructions using real data from a new planar electrical impedance device .....	51
<b>Солдатов А. П.</b> Обобщенные потенциалы системы Ламе плоской анизотропной упругости ...	52
<b>Tani A.</b> Initial boundary value problem of Hasegawa-Wakatani equations with vanishing resistivity.....	54
<b>Yagola A. G.</b> Multidimensional ill-posed problems .....	55
<b>Yamamoto M.</b> Uniqueness results by partial Cauchy data for 2-dimensional elliptic systems ....	56
<b>Hasanoglu (Hasanov) A.</b> New coefficient identification problems with nonlocal measured output data arising in electrochemistry and water treatment .....	57
<b>Wang Y. F.</b> Data regularization and inversion using sparse optimization .....	58

СЕКЦИЯ 1  
ТЕОРИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

<b>Аблабеков Б. С.</b> Карлемановские оценки и обратные задачи для псевдопараболических уравнений .....	60
<b>Abylkairov U. U., Khompysh Kh.</b> Inverse problem for the equations of motion of the Kelvin-Voight fluids .....	61
<b>Alomari O., Dubovski P. B.</b> Integral kernel recovery in the coagulation-fragmentation kinetics.....	62
<b>Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Иманбердиев К. Б., Рамазанов М. И.</b> Об одной обратной задаче для уравнения теплопроводности.....	63
<b>Аникин С. А.</b> Об одном алгоритме восстановления нормального входа динамической системы .....	64

<b>Аттаев А. Х.</b> Задача граничного управления для уравнения колебания струны с вырождающейся нагрузкой .....	66
<b>Ахундов А. Я., Гасанова А. И.</b> Определение коэффициента параболического уравнения в случае задачи с нелинейным граничным условием .....	67
<b>Belishev M. I., Pestov A. L.</b> Characterization of inverse dynamical data for two velocity system .....	68
<b>Белов Ю. Я., Сорокин Р. В.</b> О задачах идентификации входных данных систем уравнений в частных производных составного типа .....	70
<b>Белов Ю. Я., Фроленков И. В.</b> О задаче идентификации функции источника для уравнений типа Бюргерса .....	71
<b>Бондаренко А. Н., Дедок В. А.</b> Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на графах и на прямой .....	72
<b>Бондаренко А. Н., Иващенко Д. С.</b> Связь между решениями обратных задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени и уравнения гиперболического типа .....	74
<b>Bugueva T. V.</b> Multidimensional inverse problem for isotropic elasticity system in a cylindrical domain .....	76
<b>Golubyatnikov V. P.</b> Direct and inverse problems of gene networks modeling .....	78
<b>Горбунов В. К.</b> Обратная задача теории потребительского спроса .....	80
<b>Demchenko M. N.</b> The dynamical inverse problem for the Maxwell system in time-optimal setup ...	82
<b>Ерохин Г. Н.</b> Обратные задачи микросейсмического мониторинга нефтегазовых месторождений .....	83
<b>Кабанихин С. И., Бобоев К. С.</b> Обратная задача Лэмба в случае линейно зависящих скоростей .....	84
<b>Костин А. Б.</b> Об одном критерии корректности в обратной задаче для параболического уравнения с нелокальным условием наблюдения .....	85
<b>Кригер Е. Н., Фроленков И. В.</b> О стабилизации решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения .....	87
<b>Lyubanova A. Sh.</b> The identification of an unknown coefficient in a main term of a pseudoparabolic equation .....	89
<b>Maergoiz L. S., Zavyalov M. N.</b> An inverse problem in the class of rational functions of one variable .....	90
<b>Меражов И. З.</b> Некоторые прямые и обратные задачи электромагнитоупругости .....	91
<b>Миренков В. Е.</b> О некоторых переопределенных задачах .....	92

<b>Nazarov A. L.</b> An inverse problem for the system of integro-differential equations of electrodynamics with a wave dispersion .....	93
<b>Нещадим М. В.</b> Групповой анализ и формулы в обратных задачах математической физики ..	95
<b>Оразов И.</b> Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам .....	96
<b>Pestov L. N.</b> Determining a speed of sound and absorption by the BC-method .....	97
<b>Полынцева С. В.</b> Об одной задаче идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения .....	98
<b>Priimenko V. I., Vishnevskii M. P.</b> Direct and inverse problems of nonlinear electromagnetoelasticity .....	100
<b>Прохоров И. В.</b> О задаче гидролокации морского дна .....	101
<b>Романенко Г. В., Фроленков И. В.</b> О представлении решения обратной задачи для системы двумерных параболических уравнений .....	103
<b>Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.</b> Обратная задача для уравнений смешанного типа с нелокальным граничным условием .....	105
<b>Садовой Г. С.</b> Об одном подходе к постановке и решению обратных задач естествознания ..	106
<b>Седипков А. А.</b> Обратная спектральная задача для операторов Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами .....	107
<b>Спичак Г. А., Шипина Т. Н.</b> Задачи идентификации коэффициентов в одной нелинейной системе уравнений параболического типа .....	108
<b>Хайдаров А.</b> О задаче определения источника для гиперболических уравнений .....	109
<b>Черепанова О. Н., Шишкина О. А.</b> Гиперболическая аппроксимация нелинейного интегродифференциального уравнения .....	110
<b>Чурбанов Д. В.</b> Метод восстановления нелинейного коэффициента в задаче популяционной динамики и некоторые его свойства .....	111

## СЕКЦИЯ 2

## ТЕОРИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

<b>Абдукаримов А., Шамсутдинова Н. Ш.</b> Внутренние задачи для дифференциальных уравнений .....	113
<b>Агеев А. Л., Антонова Т. В.</b> О локализации линий разрыва функции двух переменных .....	114
<b>Арбузов Э. В.</b> Об оценке интегральных операторов типа Фурье-Рисса .....	115

<b>Асанов А., Каденова З. А.</b> Единственность и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными .....	117
<b>Asanov A., Saparova G.</b> One class system of non-lined integral equation of Fredholm of first type .....	118
<b>Ashirbaeva A. Zh.</b> One class system of non-lined integral equation of Fredholm of first type .....	119
<b>Балакина Е. Ю.</b> Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии .....	120
<b>Begmatov A. H.</b> On an operator Volterra equation of first kind .....	121
<b>Бегматов Акр. Х., Очилов З. Х.</b> Задача обращения лучевого преобразования с неполными данными в $n$ -мерном пространстве .....	122
<b>Бегматов А. Х., Очилов З. Х., Бурхонов Ш. М.</b> Отображения Даламбера для одного класса несимметричных областей .....	123
<b>Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.</b> Восстановление функции по ее интегралам на семействе “двусторонних” кривых .....	124
<b>Бегматов А. Х., Уринбоев Ф. Ш.</b> Слабо некорректная задача интегральной геометрии в полосе .....	125
<b>Бондаренко М. А.</b> Нелинейный анализ однородности временных рядов Вольфа .....	126
<b>Бредихина А. Б., Танана В. П.</b> О решении одной обратной задачи физики твердого тела .....	127
<b>Вдовин М. В.</b> Дифференциальная $R$ -задача Коши и $l$ -корректность .....	128
<b>Воронин А. Ф.</b> Обращение оператора свертки в $L_1$ .....	130
<b>Жураев Д. А.</b> Регуляризованное решение задачи Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами, факторизуемым оператором Гельмгольца в трехмерной ограниченной области .....	131
<b>Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А.</b> О решении одного класса нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода .....	133
<b>Ишанкулов Т. И., Мардонов Ж. А.</b> О продолжение Лапласова поля .....	134
<b>Ишанкулов Т., Хатамов И.</b> Аналитическое продолжение функции в область функции, заданной на дуге границы этой области .....	135
<b>Kazantsev S. G., Schuster Th.</b> Generalization of Grangeat’s formula to vector fields .....	136
<b>Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А., Жидков А. А.</b> Двойственные методы для некоторых классов прямых и обратных задач электромагнитной теории .....	138



<b>Кальменов Т. Ш.</b> Спектральное разложение и решение задачи Коши для бигармонического уравнения в кольце .....	139
<b>Камалтдинова Т. С., Танана В. П.</b> Сравнение по точности линейного и нелинейного методов проекционной регуляризации .....	140
<b>Колесникова Н. Ю., Танана В. П.</b> Об оптимальном методе решения обратной задачи тепловой диагностики ....	141
<b>Леонов А. С.</b> Глобально и локально экстраоптимальные регуляризирующие алгоритмы .....	142
<b>Makhmudov K. O.</b> The Cauchy problem for classical Maxwell's equation .....	144
<b>Makhmudov O. I.</b> Cauchy problem for elliptic systems in the space $\mathbb{R}^m$ .....	145
<b>Морозов В. А., Назимов А. Б., Собиров М. К.</b> Регуляризация сдвигом периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений .....	146
<b>Муратбеков М. Б., Серикбаев Ж. А.</b> О резольвенте одного класса дифференциальных операторов высокого порядка с операторными коэффициентами .....	147
<b>Нийёзов И. Э., Махмудов О. И.</b> Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в $\mathbb{R}^m$ ....	148
<b>Sattorov E. N., Ermamatova M. E.</b> Cauchy problem for generalized Cauchy–Riemann system with quaternion parameter .....	149
<b>Serikbayev A. U., Nadyrbekova A. S.</b> The inverse problems of remote optics .....	151
<b>Sidorov D. N.</b> Solution to the Volterra equations of the 1st kind with piecewise continuous kernels in the space of Sobolev-Schwartz distributions .....	152
<b>Темирболат С. Е.</b> Условно-корректные задачи для эллиптических систем с вещественными переменными .....	153
<b>Турсунов Ф. Р., Маликов З.</b> Регуляризация задача Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области .....	154
<b>Фаязов К. С., Абдуллаева З. Ш.</b> Задача с внутренними и граничными данными для дифференциально-операторного уравнения $n$ -го порядка .....	155
<b>Фаязов К. С., Хажиев И. О.</b> Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанно-составного типа третьего порядка .....	156
<b>Shlapunov A. A.</b> On the Cauchy problem for elliptic complexes in spaces of distributions .....	157
<b>Эгамбердиев О. М.</b> Многоточечная задача для абстрактного поликалорического уравнения .....	159
<b>Ярмухамедов С. А.</b> Формула Грина-Соммиана в бесконечной области .....	160

СЕКЦИЯ 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

<b>Абдуллин А. И.</b> Определение фильтрационных и теплофизических параметров пластов по результатам термогидродинамических исследований горизонтальных скважин . . . . .	162
<b>Агеев А. Л., Костоусов В. Б., Игумнов Г. А.</b> Реализация алгоритма синтеза антенны многоканального ГБО с компенсацией траекторных неустойчивостей . . . . .	163
<b>Акимова Е. Н., Васин В. В., Мартышко П. С.</b> Методы решения структурных обратных задач грави-магнитометрии . . . . .	164
<b>Апарцин А. С.</b> Теория и численные методы решения полиномиальных уравнений Вольтерра . . . . .	166
<b>Апарцин А. С., Расторгуева Е. В.</b> Об одном классе интегральных моделей развивающихся систем . . . . .	167
<b>Асфандиярова Ю. С.</b> Об одном численном методе решения обратной задачи теории измерений . . . . .	168
<b>El Badia A., Nara T.</b> Inverse dipole source problem for time-harmonic Maxwell’s equations: Algebraic algorithm and Hölder stability . . . . .	170
<b>Баканов Г. Б.</b> Исследование дискретных аналогов задач интегральной геометрии . . . . .	171
<b>Баландин А. Л.</b> Метод совместного обращения 3D скалярного и векторного лучевых преобразований . . . . .	172
<b>Безродных С. И., Власов В. И.</b> Исследование обратной задачи для уравнения Грэда-Шафранова и метод ее решения . . . . .	173
<b>Bogdanov V. V., Karsten W. V., Miroschnichenko V. L., Volkov Yu. S.</b> Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium according to seismic profiling data . . . . .	174
<b>Боков А. В.</b> Метод конечномерных аппроксимаций в решении обратной задачи потенциала . . . . .	176
<b>Булатов М. В., Будникова О. С.</b> Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений . . . . .	177
<b>Важенцева Н. В., Лихачев А. В.</b> Исследование нового алгоритма трехмерной томографии по неполным данным . . . . .	178
<b>Ватульян А. О.</b> Итерационные схемы решения обратных коэффициентных задач в механике деформируемого твердого тела . . . . .	179
<b>Ватульян А. О., Козин С. В., Ляпин А. А.</b> Реконструкция различных характеристик неоднородного пороупругого стержня . . . . .	180
<b>Вахитов И. С.</b> Оценки устойчивости в задаче идентификации старшего коэффициента уравнения конвекции-диффузии-реакции . . . . .	181

<b>Вдовин А. Ю., Рублева С. С.</b> К вопросу восстановления неизвестного воздействия в нелинейной динамической системе .....	182
<b>Войтишек А. В.</b> Рандомизация как основа построения эффективных алгоритмов численного решения сложных многомерных задач .....	183
<b>Воскобойников Ю. Е.</b> Оценивание момента останова итерационного вейвлет-алгоритма деконволюции .....	185
<b>Гаврилов С. В., Денисов А. М.</b> Итерационный метод решения задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости .....	186
<b>Gongsheng Li</b> The optimal perturbation regularization algorithm for function reconstruction in the diffusion equation .....	187
<b>Грибанова Е. И.</b> Конечномерная аппроксимация задачи реконструкции распределенного управления в гиперболических системах .....	189
<b>Данилин А. Н.</b> Численное моделирование линеаризованной обратной динамической задачи для теории упругости .....	190
<b>Дементьева Е. В., Каропова Е. Д.</b> Параллельная реализация задачи о граничной функции для уравнений мелкой воды .....	191
<b>Денисов А. М., Захаров Е. В., Калинин А. В., Калинин В. В.</b> Исследование влияния неоднородности среды на численное решение обратной задачи электрокардиографии .....	192
<b>Деревцов Е. Ю., Светов И. Е.</b> Формулы обращения в интегральной геометрии тензорных полей на плоскости .....	193
<b>Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Шпакова Ю. В.</b> Решение обратных задач микромеханики композиционных материалов .....	195
<b>Егоршин А. О.</b> Аппроксимация: три обратные задачи в одной вариационной .....	196
<b>Елеуов А. А., Урмашев Б. А.</b> Об одном метод восстановления пяти диагональных симметричных матриц по спектральным данным .....	198
<b>Искаков К. Т., Оралбекова Ж. О.</b> Результаты экспериментальных исследований по идентификации состояния подповерхностных покрытий .....	199
<b>Kazantsev D., Hutton B. F., Ourselin S., Arridge S. R.</b> Bregmanized forward-backward splitting with anatomically weighted higher order total variation regularization for 3D emission tomography .....	200
<b>Казанцев И. Г.</b> Использование комптоновского рассеяния в эмиссионной томографии .....	202
<b>Касенов С. Е.</b> Численное решение обратной задачи для уравнения акустики .....	204
<b>Каширин А. А., Смагин С. И.</b> Об исследовании и численном решении трехмерных стационарных задач дифракции на спектре интегральных операторов .....	205

<b>Короткий А. И., Цепелев И. А.</b> Численное моделирование ретроспективной задачи для модели, описываемой уравнением Навье-Стокса с неньютоновской реологией .....	206
<b>Кремер И. А.</b> Регуляризованная форма “grad-div” задачи с ограничением в гильбертовом пространстве $H(\text{div})$ .....	208
<b>Криворотько О. И.</b> Задача восстановления данных Коши в волновом уравнении .....	209
<b>Куликов И. М., Тутуков А. В.</b> Численные методы решения некорректных задач астрофизики .....	210
<b>Латыпов И. И.</b> Обратная задача в модели “власть — общество” .....	211
<b>Лукинов В. Л.</b> Методы Монте-Карло основанные на аналитическом продолжении резольвенты для уравнений эллиптического типа .....	212
<b>Маркелова Т. В., Снытников В. Н.</b> Метод решения одной некорректной задачи планетообразования .....	213
<b>Маркова Е. В.</b> Численное решение одного класса уравнений Вольтерра I рода .....	214
<b>Марчук Ан. Г.</b> Восстановление рельефа океанического дна по временам прихода цунами в узлы сетки .....	215
<b>Мастрюков А. Ф.</b> Обратная задача на основе метода Лагерра .....	216
<b>Милейко А. Л., Солодкий С. Г.</b> О решении жестко некорректных задач итерированным методом Тихонова с применением принципа равновесия .....	217
<b>Михайлова Д. О.</b> Восстановление управлений в параболических системах динамическим методом .....	218
<b>Пененко А. В.</b> Анализ чувствительности обратной коэффициентной задачи теплопроводности .....	220
<b>Пяткин В. П., Салов Г. И.</b> О применении алгоритма стохастической аппроксимации в гильбертовом пространстве к интегральному уравнению Фредгольма, возникающему в задачах обнаружения объектов на зашумленных изображениях .....	221
<b>Рысбайулы Б., Ажибекова А. С.</b> Расчет коэффициента вязкости нефти при упругом способе добычи нефти ...	223
<b>Rysbaiuly B., Bekarystankyzy A.</b> An approximate method for calculating the temperature of the underground pipeline, considering the freezing of the crushed soil .....	224
<b>Светов И. Е.</b> Сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии .....	225
<b>Светов И. Е., Деревцов Е. Ю., Волков Ю. С., Шустер Т.</b> Численное решение задачи двумерной векторной томографии в рефрагирующей среде с использованием $B$ -сплайнов .....	227

<b>Седайкина В. А.</b> Численное решение задачи компьютерной томографии в рефрагирующей среде	228
<b>Сережникова Т. И.</b> О проксимальном алгоритме с адаптацией для повышения точности численных решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода	229
<b>Сидлер И. В.</b> Численное решение задачи идентификации уравнений Вольтерра в моделях развивающихся систем В. М. Глушкова	230
<b>Сизиков В. С.</b> Численное решение сингулярных интегральных уравнений обобщенным методом квадратур	231
<b>Скорик Г. Г., Грибанов К. Г., Рокотян Н. В.</b> Восстановление высотных профилей относительного содержания HDO в атмосфере по ИК спектрам, регистрируемым на Уральской атмосферной Фурье станции в Коуровке	233
<b>Собачкина Н. Л.</b> Эволюция возмущений движения бинарных смесей с плоской границей раздела	235
<b>Солодуша С. В.</b> Численное моделирование нелинейной динамики квадратичными полиномами Вольтерра	236
<b>Соппа М. С.</b> Математическое моделирование рассеивателей с заданными свойствами при E- и H- поляризациях	238
<b>Стародубцева Ю. В.</b> Численное моделирование обратной граничной задачи стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости	239
<b>Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.</b> Применение теории оптимального управления к задачам динамической реконструкции	240
<b>Табаринцева Е. В., Камалтдинова Т. С.</b> Выбор параметра регуляризации в методе квазиобращения	241
<b>Тамасян Г. Ш., Долгополик М. В.</b> Точные штрафные функции в задачах математической физики	242
<b>Uchaikin V. V.</b> Variational interpolation as a method for solving inverse problem: numerical experiments	243
<b>Филатова В. М.</b> Численное восстановление коэффициента поглощения в обратной задаче для волнового уравнения методом граничного управления	244
<b>Хасанов Т.</b> Обратные задачи поляризационной оптики	245
<b>Хужаеров Б. Х., Холияров Э. Ч., Эломов Ф. З.</b> Обратная граничная задача для нелинейно упругого режима фильтрации одномерной жидкости в пористой среде	246
<b>Чанышев А. И., Абдулин И. М., Даниловский К. Н.</b> Построение аналитических и численных решений в задаче Коши в геомеханике	247

<b>Чанышев А. И., Даниловский К. Н.</b> Построение аналитических и численных решений в задаче Коши для уравнения Лапласа. Пример Адамара.....	248
<b>Чиглинцева А. С., Русинов А. А., Тазетдинов Б. И.</b> Миграция газового пузыря в условиях Мирового океана.....	249
<b>Чистяков П. А.</b> Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах.....	250
<b>Чубатов А. А., Кармазин В. Н.</b> Идентификация ядра интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода.....	251
<b>Чупахин А. П., Черевко А. А., Хе А. К., Телегина Н. Ю., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Панарин В. А., Баранов В. И., Воробцова Н. Н.</b> Гемодинамика аномалий сосудов головного мозга.....	253
<b>Шерина Е. С., Старченко А. В.</b> Численный метод определения коэффициентов электрической проводимости при решении обратной задачи электроимпедансной томографии.....	254
<b>Shishlenin M. A.</b> Inverse problem for 2D Helmholtz equation.....	256
<b>Юркин М. А., Гилев К. В., Строкотов Д. И., Москаленский А. Е., Конохова А. И., Мальцев В. П.</b> Решение обратной задачи светорассеяния для определения морфологических характеристик биологических частиц с помощью сканирующего проточного цитометра.....	257
<b>Якункин Н. И.</b> Особенности численного решения осесимметричных задач физики плазмы методом частиц-в-ячейках.....	258
<b>Япарова Н. М.</b> Использование метода проекционной регуляризации для решения обратной задачи тепловой диагностики.....	259

#### СЕКЦИЯ 4

#### ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ

<b>Аксенов В. В.</b> Об определении источника главного геомагнитного поля по данным мировой магнитной съемки.....	261
<b>Voronina T. A.</b> Tsunami waveform inversion by the truncated SVD approach and its application to the 2011 Tohoku event.....	262
<b>Гласко Ю. В.</b> Несколько обратных задач геофизики.....	263
<b>Демидов Г. В., Мартынов В. Н., Михайленко Б. Г.</b> Метод решения эволюционных задач, использующий пошаговое преобразование Лагерра.....	264
<b>Duchkov A. A., Duchkov A. D., Karchevsky A. L.</b> Estimation of deep heat flow and heat properties of sediments from long-term temperature monitoring.....	265

<b>Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.</b> Теорема о сферическом среднем для статической системы пористоупругости	266
<b>Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х., Коробов П. В.</b> Дополнительные законы сохранения для уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением	267
<b>Зотов Л. В.</b> Восстановление чандлеровского возбуждения полюса методом корректирующей фильтрации	268
<b>Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А.</b> Решение прямой динамической задачи сейсмоки для совмещенной модели вязкоупругой и пористой среды с диссипацией энергии	269
<b>Имомназаров Х. Х., Янгибоев З. Ш.</b> Об одном способе регуляризации в одномерных обратных динамических задачах для уравнений пористых сред	270
<b>Кочнев В. А.</b> Кинематико-гравитационная модель генерации магнитного поля планет	271
<b>Козодеров В. В., Кондранин Т. В., Сушкевич Т. А., Дмитриев Е. В.</b> Распознавание объектов поверхности суши при обработке самолетных аэрогиперспектральных изображений	273
<b>Кризский В. Н., Яматов Р. Р., Бикбаева А. Р., Лутфуллин Р. Н.</b> Математическое моделирование геофизических полей в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах	275
<b>Лабутин И. Б., Суродина И. В.</b> Решение прямых задач бокового каротажного зондирования на графических процессорах	276
<b>Макаренко Н. И.</b> Прямая и обратная задача теории внутренних волн	277
<b>Меграбов А. Г.</b> Законы сохранения в дифференциальной геометрии кривых и в кинематической сейсмике (для уравнения эйконала)	278
<b>Михайленко Б. Г., Михайлов А. А.</b> Решение прямой задачи моделирования распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели “Земля — атмосфера” при наличии ветра	279
<b>Морозов П. Е.</b> Исследование скважин с вертикальной трещиной гидроразрыва методом фильтрационных волн давления	280
<b>Неведрова Н. Н., Санчаа А. М.</b> Применение прямых и обратных задач для интерпретации полевых данных геоэлектрики	282
<b>Сердюков А. С., Айзенберг А. М.</b> Параксиальное разделение переменных в двумерном уравнении Гельмгольца с переменным волновым числом в биейконалах координатах	283
<b>Soboleva O. N., Kurochkina E. P.</b> Averaging of Maxwell’s equations with multiscale isotropic random conductivity and permittivity	284

<b>Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Максакова С. В.</b> Прямые и обратные задачи аэрокосмического дистанционного зондирования атмосферы и поверхности Земли методами гиперспектрометрии и поляриметрии.....	285
<b>Ухинов С. А., Чимаева А. С.</b> Исследование влияния ошибок измерений на восстановление матрицы рассеяния.....	286
<b>Фомин Б. А., Фалалеева В. А.</b> Line-by-Line модель переноса излучения в атмосфере с учетом поляризации методом Монте-Карло.....	287
<b>Хайретдинов М. С.</b> Совмещенные методы обработки сейсмических данных в решении обратных задач.....	288
<b>Шимелевич М. И., Оборнев Е. А.</b> Аппроксимационный подход к решению обратной задачи геоэлектрики с использованием нейронных сетей.....	289
<b>Шупикова А. А., Казанский А. В.</b> Верификация стримлетной модели.....	290

#### СЕКЦИЯ 5

#### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

<b>Аксенова Е. И.</b> Проекционно-разностная схема для эволюционного уравнения Стокса в цилиндре с малым отверстием.....	292
<b>Alekseev G. V., Romanov V. G.</b> Analysis of inverse problems for the equations of anisotropic acoustics.....	293
<b>Алексеев Г. В., Терешко Д. А.</b> Численный анализ обратных задач для уравнений тепловой конвекции.....	295
<b>Амирханова Г. А., Ахметжанов М. А., Гречко С. М., Жумалина А. С., Махамбетова М. Д.</b> Оптимальность математических моделей электроэнергетических систем без регулятора.....	297
<b>Беляев Ю. Н.</b> Симметрические многочлены в расчетах матрицы переноса упругих деформаций.....	298
<b>Бризицкий Р. В.</b> Обратные задачи для уравнений Максвелла в гармоническом режиме.....	300
<b>Бурнышева Т. В., Штейнбрехер О. А.</b> Численный подход в решении обратной задачи по определению нагрузки приложенной к составной оболочке сложной структуры.....	301
<b>Clayer M., Fares M., Peron V., Tordeux S.</b> Eigenvalue solver based on an integral equation formulation.....	302
<b>Васильев А. В., Васильев В. Б.</b> Дискретный сингулярный интеграл в полупространстве.....	303
<b>Вихтенко Э. М., Намм Р. В.</b> Решение контактной задачи с трением методом множителей Лагранжа.....	304
<b>Захаров Ю. Н., Иванов К. С.</b> Нестационарные решения системы уравнений Навье-Стокса.....	305



<b>Калимолдаев М. Н.</b> Оптимальность математических моделей динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством .....	306
<b>Коврижных Л. М.</b> К обратной задаче о крутильных колебаниях в судовых энергетических установках .....	307
<b>Коробицын В. А.</b> Управление завихренностью в численных моделях сплошной среды .....	308
<b>Кудайкулов А. К., Ташенова Ж. М., Жумадилаева А. К.</b> Вычислительный алгоритм и метод решения установившихся нелинейных задач термоупругости .....	309
<b>Kumar S., Singh C.</b> Numerical solution for the analysis of steady flow of power-law MHD fluid .....	310
<b>Lavrentiev M. M., Jr., Romanenko A. A.</b> Real time tsunami data inversion .....	311
<b>Lavrenteva O. M., Smagin I., Zabarankin M., Nir A.</b> Boundary integral simulations of deformation of viscous and viscoplastic drops in linear flow .....	313
<b>Лазарева Г. Г., Берендеев Е. А., Иванов А. В., Емелев И. С., Шваб И. В.</b> Метод моделирования динамики плазменных электронов в ловушке с инверсными магнитными пробками и мультипольными магнитными стенками .....	314
<b>Лазарева Г. Г., Корнеев В. Д., Бабичев А. В., Васкевич В. Л., Вшивков В. А.</b> Численная модель динамики мантийных течений в приближении слабосжимаемой жидкости .....	315
<b>Лежнев В. Г., Марковский А. Н.</b> Алгоритм 3D вихря в обтекающем потоке .....	316
<b>Максимова Н. Н., Намм Р. В.</b> Реализация квазиньютоновских методов при решении вариационных задач механики .....	317
<b>Мамонтов Е. В.</b> Об устойчивости простого решения уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере .....	318
<b>Надкриничный Л. В.</b> Расчет волнообразования, связанного с бегущим разломом дна, с использованием упрощенной TVD схемы .....	319
<b>Нестеров С. А.</b> Об особенностях постановки и решения коэффициентной обратной задачи термоупругости для неоднородных тел .....	320
<b>Носачева А. И.</b> Применение гипотез поперечных сечений при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы .....	321
<b>Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х.</b> Численное моделирование динамики в двухжидкостных реологических средах с двумя давлениями .....	323
<b>Романский С. О., Суляндзига П. Б.</b> Численное моделирование развития маломасштабного атмосферного вихря ..	324

<b>Савельев Л. Я.</b> Марковская модель развития трещины.....	325
<b>Сатыбаев А. Дж., Калдыбаева Г. А.</b> Численное решение одномерных прямой и обратной задач термоупругости ..	326
<b>Сильченко П. Н., Кудрявцев И. В.</b> О проблеме решения системы дифференциальных уравнений динамического состояния волноводов при запуске космических аппаратов связи .....	327
<b>Смирнов С. В.</b> Расчет сейшевых колебаний на треугольной сетке.....	329
<b>Снытников Н. В.</b> Параллельный алгоритм декомпозиции области для решения задач звездной динамики на гибридных суперкомпьютерах.....	331
<b>Соболева О. В.</b> Теоретическое исследование коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции.....	332
<b>Сулейменов Т., Бектурганов Н. С., Кабдылова Д. Д.</b> О компьютерной модели течения и распределения температурного поля расплава по линии непрерывного литья Саусвайер.....	334
<b>Тында А. Н., Романов А. Е.</b> Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений реологических моделей вязкоупругой среды.....	335
<b>Yakhno V. G.</b> Computation of the time-dependent fundamental solutions for equations of elastodynamics in anisotropic quasi-crystalline materials .....	336
<b>Цой П. А.</b> О построении связи между механическими характеристиками долерита в условиях одноосного сжатия и растяжения.....	337

#### СЕКЦИЯ 6

#### НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<b>Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П.</b> Об одной краевой задаче для многомерной вырождающейся системы Бицадзе-Янушаускаса.....	339
<b>Алсыкова А. А.</b> Начально-краевые задачи с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений составного типа.....	340
<b>Аннин Б. Д., Бельмецев Н. Ф., Чиркунов Ю. А.</b> Групповое расслоение уравнений трансверсальноизотропной упругости.....	341
<b>Антипин В. И.</b> Исследование разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа.....	342
<b>Апаков Ю. П.</b> Об одной спектральной задаче для вязко-трансзвукового уравнения.....	343
<b>Байзаев С., Воситова Д. А.</b> О многообразии решений одного класса систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными.....	344

<b>Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T.</b> On a boundary-value problem with integral gluing condition for parabolic-hyperbolic equation with fractional differential operator .....	345
<b>Богатырева Ф. Т.</b> Внутреннекраевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Джрбашьяна-Нерсесяна .....	347
<b>Бондарь Л. Н.</b> О разрешимости полигармонического уравнения с младшими членами в полупространстве .....	348
<b>Bondarenko A. N., Gunkin A. Y.</b> Fabio method correction in particular case .....	350
<b>Бондаренко А. Н., Иванов В. В.</b> Мультифрактальный анализ с использованием метода максимумов модулей вейвлет-преобразования .....	351
<b>Вайнштейн И. И.</b> Модельные задачи для нелинейного аналога уравнения Лаврентьева-Бицадзе .....	352
<b>Волчков Ю. М., Богульский И. О.</b> Неклассические теории оболочек и численная реализация .....	353
<b>Гадзова Л. Х.</b> Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами .....	354
<b>Гадоев М. Г.</b> О спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов .....	355
<b>Гималтдинова А. А.</b> О единственности решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с комплексным параметром с двумя линиями изменения типа .....	356
<b>Горбенко Н. И.</b> Мультисимплектические схемы для двухволнового уравнения Накорякова-Покусаева-Шрейбера .....	357
<b>Grebenev V. N., Oberlack M.</b> Nonlocal parabolic equation from isotropic turbulence .....	358
<b>Давыдов П. Н.</b> О существовании и единственности решения нелинейного уравнения Дзекцера .....	359
<b>Демиденко Г. В.</b> Метод решения одной биологической задачи большой размерности .....	360
<b>Джамалов С. З.</b> О корректности об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве .....	362
<b>Дженалиев М. Т., Космакова М. Т., Рамазанов М. И.</b> Об одной граничной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности .....	363
<b>Дильман В. Л., Ерошкина Т. В.</b> Два подхода к исследованию математической модели напряженного состояния неоднородного круглого сплошного стержня .....	364
<b>Dubovski P. V.</b> A natural spaces approach to the uniqueness problem .....	366

<b>Егоров И. Е., Тихонова И. М.</b> О скорости сходимости стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа.....	367
<b>Ефимова М. В.</b> Задача об однонаправленном движении двухслойной системы под действием термоконцентрационных сил .....	368
<b>Замышляева А. А., Бычков Е. В.</b> Исследование модели продольных колебаний в молекуле ДНК .....	369
<b>Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н.</b> Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска-Лява на графе .....	370
<b>Зикиров О. С.</b> О некоторых задачах для уравнений составного типа.....	371
<b>Ибрагимова Н. А.</b> Решение второй краевой задачи для $B$ -полигармонического уравнения методом потенциалов.....	372
<b>Иванова Н. Д.</b> Эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа с переопределением на ядре оператора при производной .....	374
<b>Иргашев Б. Ю.</b> Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка..	376
<b>Исломов Б. И.</b> Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения .....	377
<b>Исломов Б. И., Хомидов К. А.</b> Нелокальная краевая задачи для уравнения гиперболического типа в специальной области .....	378
<b>Исхоков С. А.</b> О существовании и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений с вырождением	379
<b>Кадырбеков Т., Кадырбеков Х.</b> Выпучивание вязкоупругих цилиндрических оболочек при динамическом нагружении .....	380
<b>Калиев И. А., Валишина О. И., Шухардин А. А.</b> Граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических неубывающих по времени областях.....	381
<b>Карачик В. В.</b> Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре .....	382
<b>Кибирев В. В.</b> Об одной задаче наклонной производной для гармонических функций.....	383
<b>Коврижкин В. В.</b> Задача Дирихле для уравнения Трикоми.....	384
<b>Колтуновский О. А.</b> Радиально-симметричное решение обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения в случае финального переопределения.....	385
<b>Кононенко Л. И.</b> Прямая и обратная задачи для сингулярной системы в математической модели химической кинетики .....	386

<b>Коркина И. О., Чуешева Н. А.</b> Начально-краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка .....	387
<b>Koshanov B. D.</b> Necessary and sufficient conditions of solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equations in a sphere.....	388
<b>Лукина Г. А.</b> Краевые задачи с нелокальными условиями для ультрапараболических уравнений .....	389
<b>Ляхов Л. Н., Попова О. И.</b> Преобразование Радона-Киприянова весовых сферических функций .....	390
<b>Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А.</b> Сингулярные псевдодифференциальные операторы Фурье-Бесселя в весовых функциональных классах Соболева-Киприянова $H_\gamma^s$ .....	391
<b>Мамадалиев Н. К., Гаипов Я. М.</b> Видоизмененная задача Коши для гиперболического уравнения второго рода с комплексным параметром.....	392
<b>Мамадалиев Н. К., Юлдашев З. У.</b> Об одной задаче Геллерстедта для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.....	393
<b>Марков В. Г.</b> О некоторых свойствах незнакоопределенных операторов Штурма-Лиувилля	395
<b>Масаева О. Х.</b> К вопросу о единственности решения задачи Дирихле для нагруженного дифференциального уравнения .....	396
<b>Медведев С. Б.</b> Геометрические аппроксимации для атмосферных моделей .....	397
<b>Мелишева Е. П.</b> Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области.....	398
<b>Мирсабуров М., Курбанов К.</b> Задача с условием Франкля на характеристике для одного класса уравнения смешанного типа .....	399
<b>Нахушев А. М.</b> Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка.....	401
<b>Нахушева В. А.</b> Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа в характеристическом многоугольнике .....	403
<b>Неустроева Н. В.</b> Краевая задача для оболочки с условиями типа неравенств на границе .....	405
<b>Николаев Н. Н.</b> О разрешимости обратных задач для неклассического уравнения третьего порядка .....	406
<b>Николаев О. Ю.</b> О разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом поглощения .....	407

<b>Омельченко Е. А.</b> Краевая задача для вырожденного уравнения с запаздыванием.....	408
<b>Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б.</b> Краевые задачи для некоторых неклассических систем уравнений .....	409
<b>Павленко В. Н., Федяшев М. С.</b> Периодические решения параболического уравнения с разрывной нелинейностью линейного роста .....	411
<b>Павлов С. С.</b> Разрешимость нелинейных обратных задач для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением .....	412
<b>Панов А. В.</b> Ядро основных алгебр Ли системы уравнений механики двухфазной среды в трехмерном случае .....	413
<b>Панов Е. Ю.</b> О периодических энтропийных суб- и суперрешениях скалярных законов сохранения.....	414
<b>Пинигина Н. Р.</b> Первая краевая задача для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа .....	415
<b>Плеханова М. В.</b> Жесткое управление полулинейными уравнениями соболевского типа.....	417
<b>Popivanov N., Popov T., Scherer R.</b> Semi-Fredholm solvability or exponential growth for Protter problems.....	418
<b>Попов Н. С.</b> О разрешимости краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка с нелокальными граничными условиями интегрального вида.....	420
<b>Попов С. В., Антипин В. И.</b> О некоторых свойствах решений для уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени .....	421
<b>Попова Т. С.</b> Задача о равновесии вязкоупругого тела с жестким включением.....	422
<b>Потапова С. В.</b> Краевые задачи для псевдогиперболических уравнений переменного направления времени .....	423
<b>Прокопьев А. В.</b> Нелинейные обратные задачи для эллипτικο-параболического уравнения....	424
<b>Прудников В. Я.</b> Минимизация функционалов на замкнутом множестве.....	425
<b>Пулькина Л. С.</b> Краевые задачи с нелокальными условиями для уравнений высокого порядка	426
<b>Пятков С. Г.</b> О некоторых обратных задачах для системы уравнений теплопереноса.	427
<b>Раджабов Н. Р.</b> Граничные задачи для одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения с граничной особой линией.....	428
<b>Репин О. А., Кумыкова С. К.</b> Задача с дробными производными для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения .....	429

<b>Рузиев М. Х.</b> Задача с условиями, заданными на внутренней характеристике и на линии вырождения, для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами .....	430
<b>Сайганова С. А.</b> О разрешимости задачи для уравнения смешанного типа с операторами М. Сайго в краевом условии .....	432
<b>Sakabekov A.</b> Existence of the global solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonlinear Boltzmann's moment system equations in second approximation .....	433
<b>Сафаров Д. С.</b> Двокопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка .....	434
<b>Сафиуллова Р. Р.</b> Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка .....	435
<b>Сгибнев М. С.</b> Поведение на бесконечности решения дифференциально-разностного уравнения .....	436
<b>Сидоров Н. А.</b> О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях нерегулярных значений векторного параметра .....	437
<b>Синявский А. С.</b> Контактные краевые задачи для итерированных параболических уравнений высокого порядка .....	438
<b>Ситник С. М.</b> Новые краевые задачи с $K$ -следом для решений с существенными особенностями в работах В. В. Катрахова .....	439
<b>Сотволдиева Г. Т.</b> О задаче Стефана для нагруженного уравнения теплопроводности .....	440
<b>Спиридонова Н. Р.</b> Исследование гладких решений задачи Трикоми в неограниченной области ..	441
<b>Степанова И. В.</b> О симметриях и точных решениях уравнений термодиффузии .....	442
<b>Тарасова Г. И.</b> Вариационная задача Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений, вырождающихся на многообразии произвольной размерности .....	443
<b>Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н.</b> Об одной задаче со свободной границей типа Флорина с интегральным условием .....	444
<b>Телков М. Г., Наимов А. Н.</b> О начально-краевой задаче процесса нагрева неоднородной среды .....	445
<b>Тихонова И. М.</b> Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка .....	446
<b>Удалова Г. Ю.</b> Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области .....	447

<b>Урбанович Т. М.</b> Характеристическое сингулярное интегральное уравнение на гладком замкнутом контуре в исключительном случае с произвольными порядками нулей...	448
<b>Урев М. В.</b> Существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи для системы Максвелла при новых импедансных граничных условиях с памятью .....	449
<b>Уткина Е. А.</b> О некорректности постановки задачи Дирихле для одного псевдопараболического уравнения .....	450
<b>Фалалеев М. В.</b> Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения .....	451
<b>Фаязова З. К.</b> Граничное управление процессом теплообмена в пространстве .....	452
<b>Федоров В. Е., Борель Л. В.</b> О разрешимости одного класса нагруженных уравнений соболевского типа ..	453
<b>Федоров В. Е., Стахеева О. А.</b> Линейные уравнения с памятью, не разрешенные относительно производной по времени .....	454
<b>Федоров Ф. М.</b> Основы теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений ....	456
<b>Феоктистова А. А.</b> О модуле гладкости, порожденном смешанной обобщенной конечной разностью .....	457
<b>Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Идрисов Р. Г.</b> Асимптотический метод решения задач сопряжения для уравнений параболического типа .....	458
<b>Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Идрисов Р. Г.</b> Фундаментальный оператор асимптотического разложения задачи сопряжения .....	459
<b>Фроленков И. В., Белов Ю. Я.</b> О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши .....	460
<b>Халилов Ш. Б.</b> К теории краевых задач для многомерных эллиптических систем .....	461
<b>Ханхасаев В. Н.</b> Алгоритм численного решения гипербола-параболического уравнения .....	462
<b>Хашимов А. Р.</b> Об одном свойстве решений второй краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа .....	463
<b>Хлуднев А. М.</b> Управление формой и структурой в задачах теории упругости .....	464
<b>Холиков Д. К.</b> Об одном нагруженном уравнении в частных производных третьего порядка	465
<b>Хриптун М. Д.</b> Производящие функции для обобщенных функций Бесселя с некоторыми интегральными преобразованиями .....	466



<b>Хуштова Ф. Г.</b> Краевая задача в полосе для уравнения параболического типа с дробной производной по времени .....	467
<b>Цыбиков Б. Н.</b> Об одной обратной задаче для параболических систем уравнений .....	468
<b>Шадрина А. И.</b> Пространственно нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени .....	469
<b>Ширяева Л. К.</b> О законе распределения студентизированного отклонения выброса .....	470
<b>Шубин В. В.</b> Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывными коэффициентами .....	471
<b>Якушев И. А.</b> Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве .....	472
<b>ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОКЛАДЫ</b>	
<b>Antontsev S.</b> On the wave equations with $p(x, t)$ -Laplacian and with viscous damping: existence and blow-up .....	474
<b>Denisova N., Tretyakov P., Tupikin A.</b> Emission tomography of flames .....	475
<b>Немирович-Данченко М. М.</b> Численное моделирование сейсмических полей в трещиноватых средах .....	476
<b>Филатов В. В., Светозерский О. Ю.</b> Теорема Такенса и обратные задачи геолого-геофизического прогноза .....	477
<b>Хачай О. А., Хачай А. Ю.</b> Моделирование распространения электромагнитного и сейсмического полей в слоистой среде с иерархическими включениями .....	479

# Пленарные доклады

---

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Алифанов О. М.

*Московский авиационный институт, Москва, Россия*

Рассматривается теория и практика решения обратных задач тепломассообмена применительно к широкому спектру исследований и разработок в космической и аэрокосмической технике. В основу положен метод итерационной регуляризации, регуляризирующие градиентные алгоритмы и оптимальное планирование экспериментов. Анализируются различные постановки обратных задач для систем с распределенными и сосредоточенными параметрами и общие вопросы их структурной и параметрической идентификации. Научно-технические приложения, представленные в докладе, включают следующие задачи и объекты.

Экспериментальное исследование теплообмена на поверхности тела.

Диагностика и моделирование теплопередачи в сверхзвуковых и гиперзвуковых трубах.

Управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты.

Диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках.

Идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях.

Моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов.

Исследование композиционных материалов.

Натурные испытания систем теплозащиты и терморегулирования ЛА.

Дистанционное контактное зондирование теплофизических свойств грунтов небесных тел.

Экспериментально-вычислительные комплексы для исследования теплозащитных свойств теплотехнических материалов.

## UNDERDETERMINATION IN INVERSE PROBLEMS

Anikonov D. S.

*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 4, Novosibirsk 630090, Russia;  
anik@math.nsc.ru*

It is considered a complex relationship between known and unknown data. Similar situation appears when a complex mathematical model is researched without information given before. The main idea in the approach consists in separation a simple part from the complex expression and determination of a part of unknown information at least. Other parts of unknown information may be analyzed further (or never, if it is unimportant or too difficult). First this approach was used for one inverse problem for the transport equation and further was developed for other equations of mathematical physics. Generally speaking the pointed separation can be realized by various methods on the base of different properties of different parts of the given relationship. Mainly in the examples in this paper this procedure is provided by separation bounded and unbounded parts from the given relationship.

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 10-01-00384.

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

**Аниконов Ю. Е.**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия; anikon@math.ru*

В докладе предполагается привести способы и результаты исследований последних лет по обратным и некорректным задачам. К ним относятся аналитические представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений и их использование в теории и приложениях обратных задач, некорректные обратные задачи с переменным параметром и другие.

## THE BOUNDARY CONTROL METHOD IN 2007–2012

**Belishev M. I.**

*Saint-Petersburg department of the Steklov mathematical institute,  
Russian Academy of Sciences, Fontanka, 27, Saint-Petersburg, 191023 Russia;  
belishev@pdmi.ras.ru*

The talk is a survey of main results in the boundary control method on the last five years.

**DN-map on differential forms.** The Dirichlet-to-Neumann operator on differential forms on a compact orientable 3-dimensional Riemannian manifold is introduced. The explicit formulas, which express the Betti numbers of the manifold via the DN-operator, are derived. It is shown that the cohomology structure is also determined by the DN-operator up to isomorphism (V. A. Sharafutdinov [1]). Now these results are developed and generalized in a few directions.

**Algebras and functional models.** The deep interrelations between inverse problems and  $C^*$ -algebras are found out. By an algebraic trend in the BC-method, to recover a Riemannian manifold from its boundary inverse data is to find the spectrum (set of irreducible representations) of a relevant algebra, which is determined by the data. Such a look relates inverse problems with commutative and noncommutative geometry [2]. One more viewpoint is that to recover a manifold is to construct a canonical functional model of the operator, which governs a dynamical evolution on the manifold [3].

**3-dim acoustical scattering.** The notion of  $s$ -points is introduced. These points appear in the space as a result of controllability lack of a dynamical system governed by the acoustical wave equation. Subtle relations of the  $s$ -points with the discrete spectrum of the Schrödinger operator, factorization of the  $S$ -matrix, and jet degeneration of  $q$ -harmonic polynomials are established (A. F. Vakulenko [4]).

**Inverse problem of electrodynamics.** Time-optimal determination of the parameters  $\varepsilon$  and  $\mu$  of the Maxwell dynamical system via the boundary measurements is obtained (M. N. Demchenko [5]). The time-optimal procedure of reconstruction of a Riemannian manifold via electro-dynamical inverse data is elaborated.

**Numerical testing.** Impressive and encouraging progress in numerical realization of the BC-algorithms is demonstrated in reconstruction of 2- and 3-dimensional variable density (Pestov et al [6]). A version of the BC-method by L. N. Pestov, which is relevant to the recovery of dissipation, is also successfully tested in numerical experiment.

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No 11-01-00407A and NSh-4210.2010.1.

### REFERENCES

1. **Belishev M. I., Sharafutdinov V. A.** Dirichlet to Neumann operator on differential forms // Bull. Sci. Math. 2008. V. 132, N 2. P. 128–145.
2. **Belishev M. I.** Geometrization of rings as a method for solving inverse problems // Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics / Ed. V. Isakov. Springer, 2008. P. 5–24.
3. **Belishev M. I.** A unitary invariant of semi-bounded operator in reconstruction of manifolds // J. Operator Theory. 2012 (to appear).
4. **Belishev M. I., Vakulenko A. F.**  $s$ -points in three-dimensional acoustical scattering // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42, N 6. P. 2703–2720.
5. **Demchenko M. N.** Dynamical three-dimensional inverse problem for the Maxwell system // Algebra Anal. 2011. V. 23, N 6. P. 31–78 (in Russian).
6. **Pestov L., Bolgova V., Kazarina O.** Numerical recovering of a density by the BC-method // Inv. Problems Imaging. 2010. N 4. P. 703–712.

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Белонос В. С.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. акад. Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
bvs@math.nsc.ru*

Рассматривается вопрос о применении асимптотического метода Крылова — Боголюбова [1] к изучению уравнения  $u_t = \varepsilon f(t, u)$ , где  $u(t)$  — функция со значениями в банаховом пространстве,  $f$  — непрерывный по  $(t, u)$  нелинейный оператор,  $\varepsilon$  — малый параметр. Напомним, что в основе метода лежит идея о разложении решений на плавный медленный дрейф и малые быстрые осцилляции: ищется такая замена переменных  $u = \Phi(t, v; \varepsilon) \equiv v + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \varphi_k(t, v)$ , чтобы  $\varphi_k(t, v)$  были ограничены при  $t \rightarrow \infty$ , а исходное уравнение с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^n$  приобрело вид  $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k f_k(v)$ . Функция  $v$  приближенно описывает медленный дрейф, на который “накладываются” быстрые осцилляции, задаваемые отображением  $\Phi$ .

Существующие обоснования этого метода обусловлены жесткими ограничениями [2]. Оператор  $f$  обычно считается периодическим или почти периодическим по  $t$ , а ряд дополнительных требований связан с преодолением известной проблемы “малых знаменателей” [3]. Мы предлагаем другую интерпретацию: в уравнении для  $v$  допускаются не только автономные, но также медленно осциллирующие функции  $f_k(t, v)$  (степень осцилляций всякой функции  $g(t)$  характеризуется ее спектром  $\sigma(g)$ , то есть носителем преобразования Фурье  $F[g]$ , понимаемого в смысле теории распределений). Кроме того, в формуле для  $\Phi$  вместо  $\varepsilon$  выбирается другой произвольный малый параметр  $\delta$ , характеризующий масштаб пространственных искажений при замене переменных. Такой подход позволяет вообще освободиться от каких-либо ограничений, за исключением требований к гладкости функции  $f$ .

Установлено [4], что если  $f(t, u)$  имеет непрерывные и ограниченные производные  $D_u^m f$  порядков  $m \leq n + 1$ , то для любого  $\alpha > 0$  найдется замена переменных  $u = v + \sum_{k=1}^n \delta^k \varphi_k(t, v; \varepsilon, \delta)$ , приводящая исходное уравнение к виду  $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k f_k(t, v; \varepsilon, \delta)$  с точностью до слагаемых порядка  $\delta^n$ . Все функции  $f_k$  и  $\varphi_k$ , а также их производные  $D_v f_k$  и  $D_v \varphi_k$  непрерывны и ограничены, причем  $\sigma(f_k) \subset \{\lambda : |\lambda| < 2\alpha\varepsilon/\delta\}$ ,  $\sigma(\varphi_k) \subset \{\lambda : |\lambda| > \alpha\varepsilon/\delta\}$ . На любом промежутке  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$  норма разности между точным и приближенным решениями оценивается сверху величиной  $C(T)\delta^n$ .

Предложенная модификация использована при построении теории нелинейного резонанса для абстрактных гиперболических уравнений  $\dot{u} = -A^2 u + \varepsilon[B(\omega t)u + Q(u, u)]$  в гильбертовом пространстве. Здесь  $A$  — неограниченный линейный самосопряженный оператор,  $B(\tau)$  —  $2\pi$ -периодический по  $\tau$  линейный ограниченный оператор, а  $Q(u, v)$  — билинейная эрмитова форма. Показано, что амплитуда колебаний решения  $u(t)$  на интервалах времени порядка  $1/\varepsilon$  в любом фиксированном шаре  $\|u\| \leq r$  приближенно описывается конечномерной динамической системой, зависящей от начальных значений  $u(0)$  и  $\dot{u}(0)$ . Эту систему можно найти модифицированным методом Крылова — Боголюбова. В итоге удается объяснить качественную картину пульсации амплитуд при нелинейном резонансе, а также предложить алгоритм приближенного вычисления решений исходного уравнения.

Работа поддержана СО РАН (интеграционный проект № 30).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
2. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Наука, 1974.
3. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
4. **Белоносов В. С.** Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 3. С. 3–22.



## INVERSE PROBLEMS AND INTEGRAL GEOMETRY

**Bukhgeym A. L.**

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia  
Wichita State University, USA; bukhteym@math.wichita.edu*

In this report we describe the development of the main ideas, methods, and results of M. M. Lavrent'ev and his school from the mid 50-es to present days.

## NONLINEAR INVERSE PROBLEMS: REGULARIZATION AND ITERATIVE APPROXIMATION

**Vasin V. V.**

*Ural Federal University, Lenin Avenue, 51, Ekaterinburg, 620000 Russia;*  
vasin@imm.uran.ru

We consider inverse problems in the form of nonlinear irregular operator equations of the first kind

$$A(u) = f, \quad (1)$$

where the Frechet differentiable operator  $A$  acts on a pair of Hilbert spaces  $U, F$ . The inverse operator  $A^{-1}$  (or  $A'(u)^{-1}$ ) is discontinuous in a neighborhood of an exact solution  $z$  that implies ill-posedness (irregularity) of problem (1). To guarantee the strong convergence of an iterative method to a solution,  $z$  we usually need either to require rigorous structural conditions on the operator  $A$  or to use an additional a priori information on the desired solution  $z$ . It turns out, one can overcome some of these difficulties if preliminary to pass from (1) to the regularized equation

$$A'(u)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha(u - u^*) = 0. \quad (2)$$

For solving equation (2), we apply the Levenberg–Marquardt method (LMM) and its modified variant:

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^k)^*A'(u^k) + \bar{\alpha}]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^*)] \equiv T(u^k), \quad (3)$$

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^0)^*A'(u^0) + \bar{\alpha}]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u^k - u^*)] \equiv T_0(u^k). \quad (4)$$

**Theorem.** *Let the following conditions be fulfilled:*

$$\begin{aligned} \|A'(u)\| &\leq N_1, \quad \|A'(u_1) - A'(u_2)\| \leq N_2\|u_1 - u_2\|, \\ u, u_i &\in U, \quad z - u^* = A'(z)v, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\| &\leq \delta\|u^0 - u_\alpha\| \leq r, \quad r = \alpha/3N_1, \quad \delta \leq \alpha/6N_2, \quad \|v\| \leq 1/12N_2, \\ (\|u^0 - u_\alpha\| &\leq r, \quad r = \alpha/12N_1, \quad \delta \leq \alpha/6N_2, \quad \|v\| \leq 1/12N_2). \end{aligned}$$

Then for the LMM (the modified LMM) the following estimate is valid:

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k\|u^0 - u_\alpha\|, \quad (6)$$

where  $\alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $q = 1 - \alpha/2\bar{\alpha}$  ( $q = 1 - 7\alpha/24\bar{\alpha}$ ); moreover, if  $\alpha(\delta) = c\delta$  and  $k(\delta) = \ln(\rho\delta/r)/\ln(q)$ , then the following optimal in order estimate is true:

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{k(\delta)} - z\| \leq 2\rho\delta^{1/2}, \quad \rho = (1 + \|v\|)/[c(1 - N_2\|v\|)]^{1/2}, \quad \delta < (r/\rho)^2.$$

**Remark 1.** If (5) are true only for  $u, u_i \in Q$ , then for the process  $u^{k+1} = P_Q T(u^k)$  estimate (6) holds; here,  $Q$  is a convex closed subset, and  $T$  is the step operator of method (3) or (4).

**Remark 2.** Special variants of iterative methods (3) and (4) were successfully applied to solving the inverse problems of thermic sounding atmosphere [1] and geophysics [2].

The research is supported in Ural Federal University by grant of the Government of Russian Federation (the agreement 11.G 34.31.0064); also, it is partly supported by the Ural Branch of RAS (project 12-II-15-2019) and the Russian Foundation for Basic Research (project 12-01-00106).

#### REFERENCES

1. **Vasin V. V., Griбанov K. G., Zakharov V. I.** Inverse problem of thermal sounding atmosphere // Sib. Electron. Math. Rep. 2008. V. 5. P. 518–523.
2. **Vasin V. V., Perestoronina G. Ya.** The Levenberg–Marquardt method and its modified variant for solving nonlinear equations with applications to the inverse gravimetry problem // Trudy Inst. Mat. Mech. UrO PAN. 2011. V. 17, N 2. P. 53–61.

## **ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ**

**Голушко С. К.**

*КТИ ВТ СО РАН, Новосибирск, Россия*

Поставлены и решены новые краевые задачи расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) однородных и неоднородных слоисто-волоконистых упругих тел. Дан сравнительный анализ расчетных значений НДС и уровня нагрузок начального разрушения тонкостенных упругих тел при использовании классической и ряда уточненных теорий пластин и оболочек в геометрически линейной и нелинейной постановках. Показано существенное влияние структурных и механических параметров композиционного материала на поведение упругих конструкций.

Представлен оригинальный метод решения обратных задач рационального проектирования слоисто-волоконистых упругих тел, имеющих форму пластин и оболочек. Исследована разрешимость переопределенных систем дифференциальных уравнений, описывающих рациональное поведение таких конструкций при использовании критериев безмоментности напряженного состояния, равнопрочности или равнонапряженности армирующих волокон. Показана эффективность композитных конструкций с найденными рациональными параметрами.

**ON RECONSTRUCTION OF A CAVITY  
IN A LINEARISED VISCOELASTIC BODY  
FROM TRANSIENT BOUNDARY DATA**

**Ikehata M., Itou H.**

*Department of Mathematics, Graduate School of Engineering,  
Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan;  
ikehata@math.sci.gunma-u.ac.jp, h-itou@gunma-u.ac.jp*

In this talk, we consider a reconstruction problem of a cavity in a linearised viscoelasticity by means of the enclosure method proposed by Ikehata in 1999 (cf. [1–3] and references therein) for dynamical observation data on the boundary of the body. The problem is a mathematical model of typical inverse problems in scattering of viscoelastic waves. At the same time, the method to solve this inverse problem may have possibility of application in non-destructive evaluation in Engineering.

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^3$ , represented as an isotropic, homogeneous, linearised viscoelasticity. Let  $D$  be an open set of  $\Omega$  such that  $\overline{D} \subset \Omega$  and  $\Omega \setminus \overline{D}$  is connected.  $D$  is a mathematical model of an unknown *cavity* embedded in  $\Omega$ . Let  $T$  be an arbitrary positive number. We denote by  $\mathbf{n} = (n_i)_{i=1,2,3}$  the unit outward normal vector field on  $\partial(\Omega \setminus \overline{D})$ .

Now we adopt the Kelvin–Voigt model, also called the Voigt model in  $\Omega \setminus \overline{D}$ , and then the corresponding initial boundary value problem for the displacement vector  $\mathbf{u} = (u_i(\mathbf{x}, t))_{i=1,2,3}$  is as follows:

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \mathbf{u} - A(\zeta, \eta) \partial_t \mathbf{u} - A(\kappa, \mu) \mathbf{u} = 0, & \text{in } (\Omega \setminus \overline{D}) \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{in } \Omega \setminus \overline{D}, \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\partial_t \mathbf{u})) \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial D \times (0, T), \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\partial_t \mathbf{u})) \mathbf{n} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), & \text{on } \partial \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

Here  $\rho > 0$  is the (constant) density,  $\mu$  is a shearing strain and  $\kappa$  is a modulus of compression satisfying  $\mu > 0$  and  $\kappa > 0$ ,  $\zeta$  and  $\eta$  are the two viscosities assumed to be positive constants,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  and  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\partial_t \mathbf{u})$  are the elastic stress tensor and the dissipative stress tensor, respectively, and  $A(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u} := \xi_2 \Delta \mathbf{u} + (\xi_1 + \xi_2/3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ .

**Inverse Problem.** Fix  $T < \infty$ . Extract information about the location and shape of unknown cavity  $D$  from a set of boundary data  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{f}}$  and  $\mathbf{f}$  on  $\partial \Omega \times (0, T)$ .

For this problem we establish two types of formulae extracting information of the unknown cavity. One type aims at extracting the *depth* with a *single set* of the boundary data. Another type aims at extracting three kinds of information: the *support function*, the *distance* from an outer point of the body, *minimum radius* of the open ball including the cavity centered at a point, with *infinitely many* sets of the boundary data. In both formulae, observation time can be taken arbitrary.

The first author was partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (N 21540162) of Japan Society for the Promotion of Science. The second author was partly supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (N 23740101) of Japan Society for the Promotion of Science.

REFERENCES

1. **Ikehata M.** Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data // Inverse Problems. 1999. V. 15, N 5. P. 1231–1241.
2. **Ikehata M., Itou H.** Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data // Inverse Problems. 2009. V. 25, N 10. 105005.
3. **Ikehata M., Kawashita M.** On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval // Inverse Problems. 2010. V. 26, N 9. 095004.

## IDENTIFICATION PROBLEM FOR THE SCHRODINGER EQUATION

**Iskenderov A. D., Yaqubov G. Y., Musayeva M. A.**

*Lenkaran State University; office@lsu.edu.az*

The identification problem of determining the unknown coefficients of the Schrodinger equation is studied, correctness of direct and identification problems are investigated and necessary condition for the solution is found. For simplicity the basic presentation is given for case of one-dimensional nonlinear Schrodinger equation with boundary observation.

---

**ILL-POSED PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL  
AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS  
AND RELATED IDENTIFICATION PROBLEMS**

**Lorenzi A.**

*Università degli Studi di Milano,  
Dept. of Mathematics “F. Enriques”, via Saldini 50, Milano, 20133 Italy;  
alfredo.lorenzi@unimi.it*

The talk will be concerned with a few ill-posed problems related to evolution equations with no initial condition(s), but endowed with a *global* Dirichlet condition, i.e. on the whole of the lateral boundary  $(0, T) \times \partial\Omega$ , and (in general) with a *local* Neumann condition, i.e. on  $(0, T) \times \Gamma$ ,  $\Gamma$  being *any open* subset of  $\partial\Omega$ .

The basic questions to be answered will be uniqueness of the solution and its continuous dependence in usual Sobolev spaces. The fundamental tool will consist of Carleman estimates.

For such problems, involving both differential and integro-differential equations, some identification problems will be dealt with, concerning uniqueness of the solution and its continuous dependence. Such identification problems will be concerned with recovering both constants and functions. In some cases these problems can be reduced to non-standard and non-causal strongly ill-posed integrodifferential problems.

## COMBINED INVERSE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

**Kabanikhin S. I.**

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia;*  
kabanikhin@sscc.ru

The main problem in numerical solving of inverse and ill-posed problems  $A(q) = f$  is deficiency of information concerning the desired solution, both from the practical and from the mathematical points of view. In practice we usually try to identify objects which are not accessible for direct measurement (astronomy, medicine, geophysics). In mathematics the compact operator  $A$  transforms the compact set  $M$  from the space  $Q$  to  $A(M)$  from the space  $F$  with (sometimes) huge loss of information, namely, the epsilon-entropy of  $M$  is much less than epsilon-entropy of  $A(M)$ . There are several ways to improve inverse problem in a sense of the quantity and quality of information about the inverse problem solution. First, one can involve *a priori* information concerning the inverse problem solution  $q$  and/or data  $f$  and operator  $A$  (smoothness, monotonicity, source-wise representation, etc). Second, one can use more adequate (but complicate) models considering coupled inverse problems (thermo-acoustics, piezoelectricity, thermo-elasticity and so on). We will describe and analyze both ways and, moreover, demonstrate several rather new possibilities, such as extracting more information from the usual data (time-domain, spectral, frequency domain) and considering different processes for investigation the same object (combined acoustic and electromagnetic sounding). Combining all mentioned approaches we use terminology “combined” keeping in mind that in practice specialists always deal with combined inverse problems. For example when trying to find the right location for the possible borehole one should take into account and combine all results from seismics, geoelectrics, magnetometry and so on, and, if any, current achievements of electro-elasticity, thermo-elasticity and coupled seismic-gravimetry inverse problems. Therefore it seems to be rather interesting from mathematical point of view to understand new possibilities of combined approach.

The work was supported by RFBR (grant 12-01-00773) and by Federal Target Program “Scientific and educational personnel of innovation Russia” for 2009–2013 (government contract N 14.740.11.0350).

### REFERENCES

1. **Kabanikhin S. I.** Inverse and ill-posed problems. Theory and applications. Berlin: De Gruyter, 2011.



---

**ALGORITHMS WITH THE APPROXIMATE  
GLOBAL CONVERSE PROPERTY  
FOR COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS  
WITH BOTH SYNTETIC AND EXPERIMENTAL DATA**

**Klibanov M. V.**

*University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC, 28223 USA;*  
mklibanv@uncc.edu

Multidimensional Coefficient Inverse Problems (MCIPs) with single measurement data are the most suitable ones from the measurement standpoint: engineers prefer single measurement to multiple measurements. Traditionally in the group of Mikhail Mikhailovich Lavrentiev the single measurement case was preferable. On the other hand, these problems are **enormously challenging** ones from both analytical and numerical standpoints. As to the numerical aspect, our main goal in the past five years has been to develop such numerical methods which would deliver good approximations for exact solutions without any advanced knowledge of this solution [1].

However, because of **extreme difficulties** of achieving this goal, it became necessary to work within the framework of a certain approximate mathematical model. This model in turn should be verified on numerical studies of both synthetic and experimental data. If results of this verification are good ones, then this model is proclaimed as a suitable one. Roughly speaking, this concept is called “approximate global convergence”. As to our specific approximation, it amounts to the truncation of an asymptotic series with respect to the positive parameter of the Laplace transform of the solution of a hyperbolic PDE. Both analytical and numerical results will be presented. Results for the most challenging case of blind experimental data are the most interesting ones.

We have also discovered that whenever a non-local algorithm for an MCIP works indeed, an approximate mathematical model is used. In other words, this is a common state of the art in the field.

In addition, we will present a comparative study on experimental data of the performance of the classical Krein integral equation with our method. We note that there is no rigorous guarantee of the uniqueness of the Krein integral equation for noisy data. Neither there is no guarantee of the stability of the solution of this equation with respect to the noise in the data. Therefore, when solving it numerically, one is using an approximate mathematical model.

Also, stability results for thermoacoustic tomography with an arbitrary elliptic operator will be presented. This is a new result since currently stability estimates are known only if some restrictive conditions are imposed on the principal part of the elliptic operator.

The author was supported by US Army Research Laboratory and US Army Research Office grant W911NF-11-1-0399.

REFERENCES

1. **Beilina L., Klibanov M. V.** Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.

## ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Кожанов А. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
kozhanov@math.nsc.ru*

В докладе излагаются результаты о разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений соболевского типа

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k(t) A_k D_t^{m-k} u = f(x, t) \quad \left( D_t^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \right) \quad (1)$$

с эллиптико-параболическими операторами  $A_k$ ,  $k = \overline{0, m}$ , действующими по пространственным переменным, при  $A_0 \neq \gamma I$  (уравнения (1), в частности, включают в себя уравнения, называемые псевдогиперболическими и псевдопараболическими). В некоторых случаях уравнения (1) рассматриваются в случае  $\alpha_0(t) \equiv 1$ , в других же — в случае, когда коэффициент  $\alpha_0(t)$  может обращаться в нуль и при этом иметь различный знак в различных точках интервала  $(0, T)$  изменения переменной  $t$ .

Основной целью при исследовании краевых задач для уравнений (1) является доказательство существования регулярных или почти регулярных решений (т. е. решений, имеющих все производные, входящие в уравнение). Важную роль в доказательстве играет аналог второго основного неравенства для эллиптических операторов полученный автором для операторов с неотрицательной характеристической формой.

Наряду с краевыми задачами для уравнений (1) рассматриваются некоторые нелокальные задачи и некоторые задачи сопряжения.

Следующим объектом исследований автора, о котором будем идти речь в докладе, являются обратные коэффициентные задачи для уравнений (1). Будут рассмотрены некоторые линейные и нелинейные обратные задачи в основном для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. Для таких задач автором доказаны теоремы существования и единственности в классе регулярных решений.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг., государственный контракт № 16.740.11.0127.

## RECONSTRUCTION SCHEMES FOR DIFFUSION EQUATIONS

**Nakamura G.**

In this talk reconstruction schemes for active thermography and time resolved diffusive optical tomography to identify unknown inclusions and their physical properties are given. The measured data are Neumann to Dirichlet map and Robin to Neuman map, respectively. By defining some indicator functions via the measured data with some inputs, the identifications are done by looking at the behavior of the indicator functions. The underlying analysis is the short time asymptotic of fundamental solution of diffusion equations with discontinuous coefficients. Moreover a linear sampling type reconstruction scheme will be also given.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕХАНИКИ ДЛЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД

Назарова Л. А., Назаров Л. А.

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
Красный проспект, 54, Новосибирск, 630091 Россия;  
larisa@nisd.nsc.ru, naz@nisd.nsc.ru*

Рассмотрены обратные коэффициентные задачи по определению параметров уравнений состояния сплошных сред, возникающие при моделировании процессов эволюции геомеханических полей в массивах горных пород при отработке месторождений полезных ископаемых. Описание необратимого деформирования пород выполнено в рамках вязкоупругой и упругопластической моделей, а разрушение — с использованием критерия накопления повреждений. Численная реализация моделей осуществлялась с использованием оригинальных 2D и 3D кодов метода конечных элементов.

Разработана методика нахождения констант определяющих уравнений, базирующаяся на решении обратных задач по данным натурных замеров изменения во времени размеров подземных полостей в процессе эксплуатации месторождений. Характерная особенность введенных целевых функций существование нескольких расположенных на одной прямой локальных минимумов. Это позволило создать эффективный алгоритм решения обратных задач, комбинирующий методы градиентного спуска и прямого поиска. В качестве приложения для различных реологических моделей решены задачи оценки длительной прочности целиков различного назначения (несущих элементов технологии отработки месторождений полезных ископаемых) и последовательности их разрушения.

Предложен способ определения деформационных и прочностных параметров складчатого массива на месторождениях с пологими пластами. Показано, что решение обратной задачи можно найти в два этапа, соответствующих упругой и упругопластической стадиям деформирования закладки. При этом для нахождения модуля Юнга и коэффициента Пуассона необходимо вводить две целевых функции. Численные эксперименты позволили оценить число пунктов измерений для достижения приемлемой точности решения.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-05-00843) и Visby Program.

---

## NEW GLOBAL STABILITY ESTIMATES FOR THE GEL'FAND–CALDERON INVERSE PROBLEM

**Novikov R. G.**

*CNRS, Centre de Mathématique Appliquées,  
Ecole Polytechnique, France  
IEPT, Russian Academy of Sciences, Russia*

We consider the Gel'fand–Calderon inverse problem. This problem arises in different tomographies and, in particular, in ultrasonic tomography and in electrical impedance tomography. We present new global stability estimates and instability estimates for this problem. This talk is based, in particular, on results of recent works [1–5].

### REFERENCES

1. **Novikov R. G.** New global stability estimates for the Gel'fand–Calderon inverse problem // *Inverse Problems*. 2011. V. 27. 015001.
2. **Novikov R. G., Santacesaria M.** A global stability estimate for the Gel'fand–Calderon inverse problem in two dimensions // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2010. V. 18. P. 765–785.
3. **Isaev M. I., Novikov R. G.** Stability estimates for determination of potential from the impedance boundary map // E-print arXiv. 2012. 1112.3728.
4. **Isaev M. I.** Exponentially instability in the Gel'fand inverse problem on the energy intervals // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2011. V. 19. P. 453–473.
5. **Santacesaria M.** New global stability estimates for the Calderon problem in two dimensions // E-print arXiv. 2011. 1110.0335.

## ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ И ХИМИИ АТМОСФЕРЫ С ОЦЕНКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Пененко В. В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
penenko@sscc.ru*

Вариационные принципы представляют собой универсальный и многофункциональный инструмент для исследования сложных природных и технических систем методами математического моделирования. В настоящем докладе излагаются концепция и результаты работ по развитию вариационного подхода для решения взаимосвязанных задач экологии и климата на базе совместного использования математических моделей гидротермодинамики и химии атмосферы и данных наблюдений о реальном поведении исследуемых процессов. Для этих целей применяются комбинированные методы решения прямых и обратных задач с учетом неопределенностей в моделях и данных измерений.

Специфика рассматриваемого класса задач состоит в том, что в моделях учитывается широкий класс различных по физическому содержанию процессов, многомасштабных по пространству и времени, с высокой степенью изменчивости. Мы объединяем описание всего этого комплекса процессов в интегральном тождестве вариационного принципа с использованием сопряженных функций и сопряженных задач. В качестве критерия для объединения и согласованного учета всех участвующих объектов принимается функционал уравнения баланса полной энергии системы. Для получения количественных оценок неопределенностей вариационный принцип формулируется со слабыми ограничениями.

В постановках прямых и обратных задач прогнозирования и планирования, усвоения данных наблюдений, оценок экологических рисков и т.д. вводится совокупность целевых функционалов, определенных на множествах функций состояния, параметров моделей и источников внешних воздействий. При анализе целевых функционалов в рамках вариационного принципа математические модели процессов выступают в роли ограничений и связей между функциями состояния, параметрами моделей и источниками. Все эти связи включаются в расширенные вариационные функционалы с помощью сопряженных функций.

Для оценок этих функционалов организуется стратегия оптимального прогнозирования. Под оптимальностью понимается выполнение условий стационарности дискретных аналогов расширенных целевых функционалов к вариациям сопряженных функций, функций состояния и функций неопределенностей. Эти условия для каждого целевого функционала приводят к соответствующим системам основных и сопряженных уравнений. Дискретизация всех функционалов осуществляется с применением методов декомпозиции, расщепления и аппарата глобальных и локальных сопряженных задач.

При таком подходе сопряженные задачи и функции неопределенностей замыкают на себя все внутренние степени свободы в дискретном представлении моделей, а вариации целевых функционалов с помощью соотношений чувствительности и функций чувствительности непосредственно связываются с вариациями объектов, представляющих внешние степени свободы и источники. На базе соотношений чувствительности строятся операторы чувствительности и уравнения обратных связей для решения обратных задач по оценке искомых объектов. В результате получает-

ся замкнутая технология прямого/обратного моделирования, состоящая из согласованных между собой алгоритмов реализации основных элементов: прямых и сопряженных задач; уравнений обратных связей и алгоритмов расчета функций чувствительности, наблюдаемости, риска; функций неопределенностей при решении задач с усвоением данных наблюдений.

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований 4 Президиума РАН и 3 ОМН РАН, РФФИ (грант 11-01-00187), а также Интеграционными проектами СО РАН (8,35).

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ: ДОСТИЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ

Пикалов В. В.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090 Россия;  
pickalov@itam.nsc.ru*

В работе проведен обзор ряда обратных задач оптики, играющих важное значение в современных прикладных исследованиях. К таковым можно отнести, в первую очередь, задачи устранения аппаратных искажений при регистрации оптических сигналов. Часть таких задач сводятся к решению интегральных уравнений типа свертки, как одномерных, так и двумерных. В частности, такие уравнения возникают при решении проблем устранения смаза при регистрации быстро протекающих процессов в оптических исследованиях.

Интересные задачи возникают в проблеме сверхразрешения, когда из набора сдвинутых изображений с низким разрешением конструируется одно изображение с повышенным разрешением.

В задачах диагностики газовых и плазменных потоков часто появляются такие обратные задачи, как дифференцирование зашумленных сигналов и изображений, а также инверсии интегральных уравнений типа преобразования Радона и лучевого преобразования.

В обзоре рассматриваются характерные постановки соответствующих задач, проводится сравнительный анализ сложившихся методов их решения [1, 2]. На примере задач эмиссионной томографии плазмы подчеркнута роль итерационных алгоритмов решения соответствующих обратных задач, учитывающих априорную физическую информацию в условиях неполноты экспериментальных измерений.

Рассмотрен ряд нерешенных актуальных задач в оптике, например, учет дифракционных эффектов при переходе от микро- к наноразмерам в современной оптической микроскопии, как просвечивающей, так и отражающей. Обсуждаются трудности, возникающие в задаче извлечения фазовой информации из амплитудных измерений, как в постановках обычной интерферометрии, так и в современной цифровой голографии.

Работа частично поддержана СО РАН (интеграционный проект 14).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко В. М., Оришич А. М., Павлов А. А., Пикалов В. В. Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте. Новосибирск: НГУ, 2009.
2. Derevtsov E. Yu., Pickalov V. V. Reconstruction of vector fields and their singularities by ray transforms // Numer. Analysis Appl. 2011. V. 4, N 1. P. 21–35.



## О ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Радкевич Е. В.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия; evrad07@gmail.com*

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц тем или иным образом взаимодействующих между собой. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами, энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, в [1] рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана и приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных взаимодействий (модели типа Бродуэлла [2])

$$\partial_t n_j + (\omega_{ix} \partial_x + \omega_{iy} \partial_y + \omega_{iz} \partial_z) n_j = \sum_{k,l,j; k \neq i, l \neq i, j \neq i} \sigma_{kl}^{ij} (n_k n_l - n_i n_j),$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Для дискретных уравнений кинетики [3] (размерности  $d = 1, 2, 3$ ) доказано существование глобального решения, получено разложение его по гладкости, исследовано влияние осцилляций, порождаемых оператором взаимодействия.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Султангазин У. М.** О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. 1971. Т. 25, № 3. С. 3–51.
2. **Broadwell Т. Е.** Study of rarified shear flow by the discrete velocity method // J. Fluid Mech. 1964. V. 19, N 3.
3. **Радкевич Е. В.** О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений // Пробл. мат. анализа. 2011. Вып. 62. С. 109–151 [J. Math. Sci. 2012. V. 181, N 2. P. 232–280].

## STOCHASTIC METHODS FOR SOLVING SOME ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS

**Sabelfeld K. K.**

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
Acad. Lavrenrieva ave., 6, Novosibirsk 630090, Russia;  
pppetrov@sscc.ru*

In this talk we present some new stochastic methods for solving large ill-conditioned systems with noise related to some ill-posed and inverse problems of mathematical physics. In particular we develop stochastic boundary methods based on the Method of Fundamental Solutions (MFS) and suggest ways to improve the accuracy. Among the techniques we use are the randomized SVD and random projection methods which enable us to drastically reduce the dimension. In the random projection algorithm we develop a new Johnson–Lindenstrauss transformation based method and give some applications in the study of elastic properties of polymers. When dealing with noisy data we formulate a new approach based on the kernel technique related to the correlation function of the solution. This method is applied to solve some inverse problems of elastostatics. The basics of the stochastic approach can be found in [1, 2].

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 12-01-00635-p.

### REFERENCES

1. **Sabelfeld K. K.** Expansion of random boundary excitations for some elliptic PDEs // Monte Carlo Methods and Applications. 2007. V. 13. P. 403–451.
2. **Sabelfeld K. K.** Monte Carlo methods in boundary value problems. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1991.

# CONDUCTIVITY RECONSTRUCTIONS USING REAL DATA FROM A NEW PLANAR ELECTRICAL IMPEDANCE DEVICE

**Sebu C., Schilcher K., Spiesberger H.**

<sup>1</sup>*Department of Mechanical Engineering and Mathematical Sciences,  
Oxford Brookes University, Wheatley Campus, Oxford OX33 1HX, United Kingdom;  
csebu@brookes.ac.uk*

<sup>2</sup>*Institut für Physik, Johannes-Gutenberg-Universität, D-55099 Mainz, Germany;  
schilche@uni-mainz.de, spiesber@uni-mainz.de*

Electrical Impedance Tomography (EIT) is a non-invasive, low cost technology which can be used as a method of industrial, geophysical and medical imaging [1]. We present results of reconstructions using real data from a new planar electrical impedance tomography device designed for breast cancer detection at the University of Mainz, Germany. The prototype, similar to those described in [2-4], consists of a planar sensing head of circular geometry. There are 12 large outer electrodes arranged on a ring of radius  $R \simeq 48$  mm where the external currents are injected, and a set of 54 point-like high-impedance inner electrodes where the induced potentials are measured. Since most of breast tumours are situated at shallow depths, a map of the conductivity at the surface provides enough information on the existence and location of tumours.

Let  $\Omega = \{\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x}\| < R\}$ , and  $\sigma$  be an isotropic conductivity distribution in  $\Omega$ . If there are no internal current sources in  $\Omega$ , for an applied current density  $j \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  the electric potential  $\Phi \in H^1(\Omega)$  satisfies the following elliptic partial differential equation

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

subject to Neumann boundary conditions

$$j = \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \text{such that } \int_{\partial\Omega} j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (2)$$

The boundary value problem (1), (2) has a unique solution  $\Phi$  up to an additive constant, which we could fix by choosing the ground either as

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \text{or } \Phi(\mathbf{x}_0) = \Phi_0 = \text{const}, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega. \quad (3)$$

The inverse problem under consideration can be formulated mathematically as follows: find the conductivity function  $\sigma$  in  $\Omega$  satisfying (1)–(3) from the measurement operator

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{L}^2(\Omega) \\ j & \longmapsto & \Phi, \end{array} \quad (4)$$

where  $\mathcal{L}_{\diamond}^2(\partial\Omega) = \{g \in L^2(\partial\Omega): \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}$ .

## REFERENCES

1. **Borcea L.** Electrical impedance tomography // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. R99–R136.
2. **Laver-Moskovitz O.** T-Scan: A new imaging method for breast cancer detection without X-ray // Chicago: RSNA Presentation, 1996.
3. **Cherepenin V., Karpov A., Korjenevsky A., Kornienko V., Mazaletskaya A., Mazourov D., Meister D.** A 3D electrical impedance tomography (EIT) system for breast cancer detection // Physiol. Meas. 2001. V. 22, N 9. P. 9–18.
4. **Mueller J. L., Isaacson D., Newell J. C.** A reconstruction algorithm for electrical impedance tomography data collected on rectangular electrode arrays // IEEE Tans. Biomed. Eng. 1999. V. 46, N 11. P. 1379–1386.

## ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СИСТЕМЫ ЛАМЕ ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

Солдатов А. П.

Белгородский национальный исследовательский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015 Россия; soldatov48@gmail.com,  
soldatov@bsu.edu.ru

Рассмотрим в области  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , ограниченной ляпуновским контуром  $\Gamma$ , сильно эллиптическую систему Ламе

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

для вектора смещений  $u = (u_1, u_2)$  с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение  $\det[a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2] = 0$  этой системы в верхней полуплоскости имеет два корня  $\nu_1, \nu_2$ . В зависимости от двух возможных случаев  $\nu_1 \neq \nu_2$  и  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  положим, соответственно,

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Как установлено в [1], найдется такая обратимая матрица  $b \in \mathbb{C}^{l \times l}$ , что  $a_0 b + a_1 b J + a_2 b J^2 = 0$  и блочная матрица  $B$  с элементами  $B_{11} = \bar{B}_{12} = b$ ,  $B_{21} = \bar{B}_{22} = b J$  обратима. При этом любая другая матрица  $b_1$  с теми же свойствами связана с  $b$  соотношением  $b_1 = b d$  с некоторой обратимой матрицей  $d$ , коммутирующей с  $J$ . В частности, однородная степени нуль матрица — функция  $H(\xi) = \text{Im}[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}]$  не зависит от выбора  $b$ .

Классические потенциалы двойного слоя, как известно [2], строятся по фундаментальной матрице системы (1). Введем обобщенный потенциал двойного слоя, который представляет собой интеграл

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} Q(t, t - z) \varphi(t) |dt|, \quad z \in D, \quad (2)$$

с ядром  $Q(t, \xi) = |\xi|^{-2} [n(t)\xi] H(\xi)$ , где  $n(t)\xi = n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2$  и  $n$  означает единичную внешнюю нормаль. Для любой вектор-функции  $\varphi \in C(\Gamma)$  он определяет функцию  $u \in C(\bar{D})$ , удовлетворяющей системе Ламе в области  $D$ .

С помощью этого потенциала в работе установлена редукция задачи Дирихле в классе  $C(\bar{D})$  к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на  $\Gamma$ . В частности, задача Дирихле является фредгольмовой и в этом классе. Аналогичные результаты справедливы по отношению к задаче Неймана, краевое условие которой можно проинтегрировать и записать в форме задачи Дирихле для сопряженной вектор-функции  $v$ . Заметим, что частные производные этой функции служат столбцами тензора напряжений  $\sigma$ . Для функции  $v$  потенциал двойного слоя определяется аналогично (2) с той разницей, что матрица  $b$  заменяется на  $c = a_{21}b + a_{22}bJ$ . Матрицы  $b, c$  вычисляются явно [3], так что соответствующие явные формулы можно дать (после достаточно громоздких вычислений) и для ядер  $Q$ .

Особенно простые выражения получаются в случае ортотропной среды, которая определяется условием  $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ . В этом случае потенциал (2) и аналогичный потенциал для  $v$  можно записать в форме

$$u(z) = \frac{\rho_0 k}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_1(\xi) \varphi(t) |dt|, \quad v(z) = \frac{\rho_0}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{n(t)\xi}{|\omega(\xi)|^2} G_2(\xi) \varphi(t) |dt|,$$

где следует положить  $\xi = t - z$  и приняты обозначения  $\omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1 \xi_2)(\xi_1 + \nu_2 \xi_2)$ ,

$$G_1(\xi) = \begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2 \xi_1^2 + \alpha_3 \xi_2^2) & (\alpha_3 + \alpha_4) \xi_1 \xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3 + \alpha_4) \xi_1 \xi_2 & \alpha_3 \xi_1^2 + \alpha_1 \xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad G_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \rho^2 \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 \xi_2 & \rho^2 \xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$k = \frac{1}{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}, \quad \rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2 \alpha_3}.$$

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракты № П693 и № 02.740.11.0613).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Солдатов А. П.** О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39, № 5. С. 674–686.
2. **Купрадзе В. Д.** Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
3. **Soldatov A. P.** To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags. 2010. V. 30, N 2 P. 107–117.

**INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF  
HASEGAWA–WAKATANI EQUATIONS  
WITH VANISHING RESISTIVITY**

**Tani A.**

*Department of Mathematics, Keio University, Hiyoshi, Yokohama, 223-8522 Japan;  
tani@math.keo.ac.jp*

We are concerned with the drift wave turbulence in a strong magnetic field. We prove two results:

one is the existence and uniqueness of a strong solution on some time interval to the initial boundary value problem for the model equations of drift wave turbulence with zero resistivity;

another is the convergence of the solution of Hasegawa–Wakatani equations established in [1] to the solution of the problem studied at the first stage as the resistivity tends to zero on some time interval.

REFERENCES

1. **Kondo S., Tani A.** Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. P. 925–943.
2. **Kondo S., Tani A.** On the Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity // Proc. Japan Acad. 2011. V. 87. P. 156–161.
3. **Kondo S., Tani A.** Initial boundary value problem of Hasegawa–Wakatani equations with vanishing resistivity // Adv. Math. Sci. Appl. 2011. V. 21. P. 223–253.

## MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS

Yagola A. G.

*Lomonosov Moscow State University,  
Vorobyovy gory, Moscow, 119991 Russia;  
yagola@physics.msu.ru*

It is very important now to develop methods of solving multidimensional ill-posed problems using regularization procedures and parallel computers. The main purpose of the talk is to show how 2D and 3D Fredholm integral equations of the 1st kind can be effectively solved.

We will consider ill-posed problems on compact sets of convex functions [2] and functions convex along lines parallel to coordinate axes [3].

Recovery of magnetic target parameters from magnetic sensor measurements has attracted wide interests and found many practical applications. However, difficulties present in identifying the permanent magnetization due to the complications of magnetization distributions over the ship body, and errors and noises of measurement data degrade the accuracy and quality of the parameter identification. In this paper, we use a two step sequential solutions to solve the inversion problem. In the first step, a numerical model is built and used to determine the induced magnetization of the ship. In the second step, we solve a type of continuous magnetization inversion problem by solving 2D and 3D Fredholm integral equations of the 1st kind. We use parallel computing which allows solve the inverse problem with high accuracy. Tikhonov regularization has been applied in solving the inversion problems. The proposed methods have been validated using simulation data with added noises [4, 6].

2D and 3D inverse problems also could be found in tomography [3] and electron microscopy [5]. We will demonstrate examples of applied problems and discuss methods of numerical solving.

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No 11-01-00040-a and 12-01-91153-NSFC-a.

## REFERENCES

1. **Titarenko V., Yagola A.** Linear ill-posed problems on sets of convex functions on two-dimensional sets // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2006. V. 14, N 7. P. 735–750.
2. **Titarenko V., Yagola A.** Solution of ill-posed problems on sets of functions convex along all lines parallel to coordinate axes // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2008. V. 16, N 8. P. 805–824.
3. **Titarenko S., Withers Ph. J., Yagola A.** An analytic formula for ring artefact suppression in X-ray tomography // *Appl. Math. Lett.* 2010. V. 23, N 12. P. 1489–1495.
4. **Lukyanenko D. V., Yagola A., Evdokimova N. A.** Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2011. V. 18, N 9. P. 1013–1029.
5. **Koshev N. A., Orlikovsky N. A., Rau E. I., Yagola A. G.** Solution of the inverse problem of restoring the signals from an electronic microscope in the backscattered electron mode on the class of bounded variation functions // *Numer. Methods and Programming*. 2011. V. 12. P. 362–367 (in Russian).
6. **Lukyanenko D. V., Yagola A. G.** Application of multiprocessor systems for solving inverse problems leading to Fredholm integral equations of the first kind // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences*. 2012. V. 18, N 1. P. 222–234 (in Russian).

**UNIQUENESS RESULTS  
BY PARTIAL CAUCHY DATA  
FOR 2-DIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEMS**

**Yamamoto M.**

*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo,  
Komaba Meguro Tokyo 153, Japan;  
myama@ms.u-tokyo.ac.jp*

I will present our recent results on the uniqueness in determining coefficients in various 2-dimensional elliptic systems by all the set of Cauchy data with Dirichlet data supported on arbitrary subboundary  $\Gamma$  and Neumann data on  $\Gamma$ . I will discuss not only linear equations but also nonlinear elliptic systems including stationary Navier–Stokes equations to prove the uniqueness for coefficients and nonlinear terms. The classical Dirichlet-to-Neumann map corresponds to a special case where  $\Gamma$  is the whole boundary. Our uniqueness results do not require inputs of Dirichlet data or observations of Neumann data on the whole boundary and are the best possible uniqueness results in two dimensions within some smoothness assumptions.



# NEW COEFFICIENT IDENTIFICATION PROBLEMS WITH NONLOCAL MEASURED OUTPUT DATA ARISING IN ELECTROCHEMISTRY AND WATER TREATMENT

Hasanoglu (Hasanov) A.

*Department of Mathematics and Computer Sciences,  
Izmir University, Turkey; alemdar.hasanoglu@izmir.edu.tr*

Coefficient identification problems (CIPs) with nonlocal measured output data (integral type measurements) are the most suitable ones recent years from the measurement standpoint: engineers prefer integral type measurements instead of single ones.

This study deals with *coefficient identification problems* (CIP), with *nonlocal measured output data*, arising in the simulation of nonlinear ion transfer in electrochemistry (CIP1), and in modelling of sludge particles settling in the water treatment plant (settler) (CIP2).

## 1. Identification of the migration coefficient in the nonlinear ion transport

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = (D(u)u_x)_x + q'(t)h(u)_x, \quad (x, t) \in \Omega_T := (0, \infty) \times (0, T]; \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty); \quad u(0, t) = 0, \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall t \in (0, \infty); \\ \int_0^\infty u(x, t) dx = q(t), \end{array} \right.$$

where  $q(t) > 0$  is the scaled total charge,  $D(u) = [z_0 + (z_r - z_0)u]/[z_0 + (z_r k - z_0)u]$  and  $h(u) = ku/[z_0 + (z_r k - z_0)u]$  are the diffusion and migration coefficients,  $k = D_r/D_0$  is the diffusivity ratio, and the integers  $z_0$  and  $z_r$  are the valences of the reduced and oxidized species, respectively.

## 2. Identification of the sludge concentration in a settler

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = (D(u)u_x)_x + \nu(t)(c(x)u)_x, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \\ u(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in (x, t) \in \mathbb{R}; \\ \int_0^\infty u(x, t) dt = c(x). \end{array} \right.$$

Here  $c(x) > 0$  denotes the sludge concentration measured during the time  $t \in \mathbb{R}_+$ , by total amount of the density  $u(x, t) > 0$  of sludge particles having spent time  $t \in \mathbb{R}_+$  in a settler at point  $x \in \mathbb{R}$ . The function  $\nu(t)$  is the “average settling velocity”. The variable  $t > 0$  represents the “age” of sludge particles.

We propose several original approaches for theoretical as well as numerical study of the identification problems (CIP1) and (CIP2). In addition, we will present a comparative study of the time variable and the space variable nonlocal measured output data.

The research has been supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) through the project Mr 108T332.

## REFERENCES

1. Cohn S., Pfabe K., Redepenning J. Existence of a similarity solution of the nonlinear ion transport problem // Math. Mod. Methods Appl. Sci. 1999. V. 3. P. 445–458.
2. Hasanov A., Pektas B., Kadiroglu U. An analysis of nonlinear ion transport problem including arbitrary valences of oxidized and reduced species // J. Math. Chemistry. 2010. V. 47, N 4. P. 1248–1262.
3. Pektas B. Modeling and computer simulation of the identification problem related to the sludge concentration in a settler // Math. Computer Modelling. 2009. V. 49. P. 843–855.

## DATA REGULARIZATION AND INVERSION USING SPARSE OPTIMIZATION

Wang Y. F.

*Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences,  
P. O. Box 9825, Beijing, 100029 China; yfwang@mail.iggcas.ac.cn*

In seismic exploration, the process of acquisition records the continuous wavefield which is generated by the source. In order to restore the seismic data correctly, the acquisition should satisfy the *Nyquist/Shannon* sampling theorem, i.e., the sampling frequency should be at least twice of the maximum frequency of original signal. In seismic acquisition, because of the influence of obstacles at land surface, rivers, bad receivers, noise, acquisition aperture, restriction of topography and investment, the obtained data usually does not satisfy the sampling theorem. A direct effect of the limitations of acquisition is the sub-sampled data will generate aliasing in the frequency domain; therefore, it may affect the subsequent processing such as filtering, de-noising, AVO (amplitude versus offset) analysis, multiple eliminating and migration imaging [1–3].

In order to remove the influence of sub-sampled data, the seismic data regularization technique is often used. Let us denote by  $m$  the original seismic wavefield,  $d$  the sampled data, and  $L$  the sampling operator, the data regularization can be written as [4]

$$Lm = d. \quad (1)$$

Our purpose is to restore  $m$  from the sampled data  $d$ . Since  $d$  is usually incomplete and  $L$  is an underdetermined operator, this indicates that there are infinite solutions satisfying the seismic imaging equation (1). Hence, seismic data regularization is an ill-posed inverse problem.

In this study, we develop some sparse optimization methods for the wavefield reconstruction problem. We consider some transform techniques and sampling techniques and solve the problem by constructing different kinds of regularization models and study sparse optimization methods for solving the regularization model. The  $l_p$ - $l_q$  model with  $p = 2$  and  $q = 0, 1$  is fully studied. The projected gradient descent method, alternating directions method and an approximate  $l_1$ -norm constrained trust region method are developed to solve the optimization problem. Numerical results demonstrate that the developed approaches are robust in solving the ill-posed data regularization problem and can greatly improve the quality of wavefield recovery.

The author was partly supported by the National Natural Science Foundation of China under grant number 40974075 and Knowledge Innovation Programs of Chinese Academy of Sciences KZCX2-YW-QN107.

### REFERENCES

1. **Wang Y. F.** Sparse optimization methods for seismic wavefields recovery // Proc. Inst. Math. Mechanics (Yekaterinburg). 2012. V. 18, N 1 (in press).
2. **Wang Y. F., Yang C. C., Cao J. J.** On Tikhonov regularization and compressive sensing for seismic signal processing // Math. Models Methods Appl. Sci. 2012. V. 22, N 2. P. 1150008-1–1150008-24.
3. **Wang Y. F., Cao J. J., Yang C. C.** Recovery of seismic wavefields based on compressive sensing by an  $l_1$ -norm constrained trust region method and the piecewise random sub-sampling // Geophysical J. Intern. 2011. V. 187. P. 199–213.
4. **Wang Y. F., Stepanova I. E., Titarenko V. N., Yagola A. G.** Inverse problems in geophysics and solution methods. Beijing: Higher Education Press, 2011.

# Секция 1

---

## Теория обратных задач

## КАРЛЕМАНОВСКИЕ ОЦЕНКИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аблабеков Б. С.

*Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова;*  
ablabeikov\_63@mail.ru

Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  — открытое множество вещественных переменных  $x, t$  и  $L$  — дифференциальный оператор вида

$$L = k(x) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \quad (1)$$

в котором  $k(x) \in C^4(\bar{\Omega})$ ,  $k(x) \geq 0$ ,  $k_x \geq 0$ .

Для вещественной функции  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  и числа  $\lambda \geq 0$  введем семейство весовых  $L_2$  норм

$$\|u\|_\lambda = \int_{\Omega} e^{2\lambda\varphi(x,t)} |u(x,t)|^2 dx dt, \quad (2)$$

Причем  $\|u\|_0 = \|u\|$ .

Справедлива

**Теорема 1.** Пусть функция  $k(x)$  удовлетворяет перечисленным выше условиям и для всех  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ . Весовая функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_{xt} = 0, \quad \varphi_{xxx} = 0, \quad |\varphi_x| \geq 0, \quad \varphi_{tt} \geq 1. \quad (3)$$

Тогда существуют такие числа  $\lambda_0, C$ , что для всех  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  имеет место оценка

$$\lambda^3 \|u\|_\lambda^2 + \lambda^3 (\|u_x\|_\lambda^2 + \|u_t\|_\lambda^2) + \lambda (\|u_{xt}\|_\lambda^2 + \|u_{xx}\|_\lambda^2) \leq C \|Lu\|_{\lambda^3}^3,$$

которая должна выполняться для всех  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  и всех  $\lambda \geq \lambda_0$  с некоторой постоянной  $C > 0$ , не зависящей от  $\lambda$  и  $u$ .

Далее рассматриваются обратные задачи, когда области определения искомой функции и задаваемой информации не совпадают. Для этих задач, используя метод карлемановских оценок доказываются соответствующие теоремы единственности.

**INVERSE PROBLEM  
FOR THE EQUATIONS OF MOTION  
OF THE KELVIN–VOIGHT FLUIDS**

**Abylkairov U. U., Khompysh Kh.**

*Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan;*  
konat\_k@mail.ru

We consider the following inverse problem for equations describing the motion of a Kelvin–Voight fluids [1] in a bounded cylinder  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ ,  $\Omega$  is a bounded domain in  $R^m$ ,  $m = 2, 3$  with smooth boundary  $\partial\Omega \in C^2$ :

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \chi\Delta\mathbf{v}_t + \nabla p = f(t)\mathbf{g}(x, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}(x, t)\mathbf{u}(x, t) + \chi\nabla\mathbf{v}(x, t)\nabla\mathbf{u}(x, t)) dx = e(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where  $\mathbf{v}_0(x)$ ,  $\mathbf{u}(x, t)$ ,  $e(t)$  and  $\mathbf{g}(x, t)$  are given functions.

**Theorem.** Let the following conditions are satisfied:

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega)), \quad e(t) \in W_2^1(0, T), \quad \mathbf{g}(x, t) \in C(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(x, t)\mathbf{g}(x, t) dx \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{v}_0 \in W_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega).$$

Then there exists a unique weak solution  $(\mathbf{v}, f)$  of the inverse problem (1)–(4), such that:

$$(\mathbf{v}, f) \in L_{\infty}(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega)) \cup L_2(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega)) \times L^2(0, T).$$

REFERENCES

1. **Oskolkov A. P.** The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 1973. V. 38. P. 98–136.

## INTEGRAL KERNEL RECOVERY IN THE COAGULATION–FRAGMENTATION KINETICS

**Alomari O., Dubovski P. B.**

*Stevens Institute of Technology, USA*

We consider the initial value problem for the fragmentation equation

$$\partial_t u(x, t) = 2 \int_x^\infty F(y - x, x) u(y, t) dy - \int_0^x F(x - y, y) u(y, t) dy. \quad (1)$$

We propose an iterative algorithm to recover the integral kernel  $F(x, y)$  if it is close to a constant. The algorithm is based on a system of four steps: the direct and adjoint equations, averaging, and control equation. We linearize the problem by transforming the problem to the inverse problem for the right-hand side of the equation with a modified linear operator. We assume that the only available information is partial observation of the solution at two time instants.

To attack the non-uniqueness problem we develop the notion of natural functional space generated by the problem, and show that the computational solution belongs to the natural space and, thus, possesses the uniqueness property. While minimizing the variational functional, we arrive at the control equation and optimize its coefficients leading to the fastest computations. To finalize the algorithm and form the computational loop we apply and investigate an averaging step to avoid the dependence of the computational results on time. All theoretical and analytical results are supported by computations which demonstrate the validity of our approaches.

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Амангалиева М. М.<sup>1</sup>, Дженалиев М. Т.<sup>1</sup>,  
Иманбердиев К. Б.<sup>1</sup>, Рамазанов М. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики, информатики и механики КН МОН РК,  
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010 Казахстан; muvasharkhan@gmail.com*

<sup>2</sup>*Карагандинский государственный университет  
им. Е. А. Букетова МОН РК; ramamur@mail.ru*

В работе исследуются вопросы разрешимости задачи стабилизации с границы для нагруженного уравнения теплопроводности в заданной ограниченной области  $\Omega \equiv (-\pi/2, \pi/2)$ . Смысл задачи заключается в выборе граничного условия (управления), чтобы решение полученной смешанной краевой задачи стремилось при  $t \rightarrow \infty$  к заданному стационарному решению с предписанной скоростью  $\exp(-\sigma_0 t)$ . При этом требуется, чтобы управление было с обратной связью, т.е. чтобы оно реагировало на непредусмотренные флуктуации системы, подавляя результаты их воздействия на стабилизируемое решение [1, 2].

**Постановка задачи.** Найти такие граничные управления  $u_1(t), u_2(t) \in L_2(0, \infty)$ , чтобы решение  $y(x, t)$  начально-граничной задачи

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + \alpha \cdot y(0, t) = 0, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (1)$$

$$y(-\pi/2, t) = u_1(t), \quad y(\pi/2, t) = u_2(t), \quad y(x, 0) = y_0(x),$$

стремилось к нулю при  $t \rightarrow \infty$  следующим образом:

$$\|y(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq C_0 e^{-\sigma_0 t},$$

где  $Q = \{(x, t): -\pi/2 < x < \pi/2, t > 0\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma_0$  — заданное положительное число,  $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$  — заданная функция. Уравнение (1) называют нагруженным [3].

Отметим, что обратным задачам дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Среди них сделаем ссылку лишь на недавно изданный учебник для студентов ВУЗов [2], который является, по видимому, первым и пока единственным учебником, посвященным обратным и некорректным задачам, и в которой имеется достаточно подробный обзор современного состояния проблематики и ставятся ряд нерешенных задач.

В докладе рассматриваются вопросы разрешимости поставленной задачи и метод ее приближенного решения. Используются результаты работ [1, 3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Фурсиков А. П.** Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 4. С. 115–160.
2. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
3. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** Нагруженные уравнения — как возмущения интегральных уравнений. Алматы: ГЫЛЫМ, 2009.

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ВХОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аникин С. А.

*Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16,  
Екатеринбург, 620990 Россия; asa@imm.uran.ru*

Пусть движение динамической системы на отрезке  $[0, \vartheta]$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы в момент времени  $t \in [0, \vartheta]$ ;  $x^0$  — начальное состояние системы;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — входное воздействие на систему (управление, возмущение и т. д.). Элемент  $w = (x^0, u(\cdot)) \in W = \mathbb{R}^n \times L_2^m[0, \vartheta]$  будем называть входом системы (1). Предполагается, что система доступна наблюдению и уравнение наблюдения имеет вид

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (2)$$

где  $y(\cdot) \in L_2^p[0, \vartheta]$  — выход системы (идеально наблюдаемый сигнал). Будем говорить, что вход  $w = (x^0, u(\cdot))$  совместим с выходом  $y(\cdot)$ , если при почти всех  $t \in [0, \vartheta]$  имеют место равенства (1), (2). Через  $W_*(y(\cdot))$  обозначим множество всех входов, совместимых с выходом  $y(\cdot)$ . Нормальным входом, совместимым с выходом  $y(\cdot)$ , назовем вход  $w_* \in W_*(y(\cdot))$  такой, что

$$\|w_*\|_W = \min \{\|w\|_W : w \in W_*(y(\cdot))\}.$$

Рассматривается задача восстановления нормального входа  $w_* \in W_*(y(\cdot))$  по результатам наблюдения выхода  $y(\cdot)$  [1]. Уравнение наблюдения (2) преобразуем к совокупности уравнений (см. [2])

$$y_i(t) = C_i(t)x(t) + D_i(t)u(t), \quad i = 0, \dots, k,$$

где  $y_0(t) = y(t)$ ,  $C_0(t) = C(t)$ ,  $D_0(t) = D(t)$  и  $(i+1)$ -е уравнение получается из  $i$ -го путем умножения слева на матрицу  $E - D_i(t)D_i^+(t)$  и дифференцирования по  $t$  в силу системы (1) обеих частей этого уравнения. Здесь  $E$  — единичная матрица соответствующей размерности,  $D_i^+(t)$  — матрица, псевдообратная (по Муру–Пенроузу) к матрице  $D_i(t)$ . Такой подход при некоторых дополнительных предположениях, с одной стороны, позволяет с помощью стандартных процедур автоматического управления [3] получить явный вид нормального входа, совместимого с выходом  $y(\cdot)$ ; с другой — обеспечивает возможность разработки устойчивых процедур восстановления нормального входа на основе устойчивых методов вычисления значений неограниченных операторов [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00672) и в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев М. И., Куржанский А. Б. Обратные задачи динамики управляемых систем. Механика и научно-технический прогресс / Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.



2. **Аникин С. А.** Об оценке погрешности метода регуляризации А.Н.Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37, № 9. С. 1056–1067.
3. **Ройтенберг Я. Н.** Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
4. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач ее приложения. М.: Наука, 1978.

## ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ

Аттаев А. Х.

*Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации  
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,  
ул. Шортанова, 89-А, Нальчик, 360000 Россия; attaev.anatoly@ya.ru*

Рассматриваются колебания одномерной упругой струны  $l$ , которые описываются уравнением вида

$$u_{xx} - u_{tt} = \lambda(x)u_{tt}(x_0, t) \quad (1)$$

в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ , где  $\lambda(x) = ax + b$ ,  $a, b, l, T, x_0$  — произвольные действительные числа,  $0 < x_0 < l$ .

Задача состоит в том, чтобы найти такие управления  $\mu(t) = u(0, t)$  и  $\nu(t) = u(l, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , которые переводили бы струну из произвольного начального состояния  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$  в заданное финальное состояние  $u(x, T) = \varphi_1(x)$ ,  $u_t(x, T) = \psi_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Рассматривая  $\lambda(x)$  как элемент управления, зависящий от двух параметров  $a$  и  $b$ , показывается, что сформулированную задачу можно эквивалентным образом редуцировать к некоторым, ранее исследованным и не исследованным, задачам граничного управления процессом колебаний, описываемым уравнением  $u_{xx} - u_{tt} = 0$ . В случае  $\lambda = 0$  эта задача рассматривалась рядом авторов, однако, принципиально новый подход к ее решению был предложен в [1]. В случае  $\lambda = \text{const}$  и  $l = 2x_0$  исследование этой задачи изложено в работе [2].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // ДУ. 1999. Т. 35, № 5. С. 692–704.
2. Attaev A. X. Задача граничного управления для существенно нагруженного уравнения колебания струны // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН. 2011. Т. 13, № 1. С. 33–38.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Ахундов А. Я., Гасанова А. И.

*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,  
ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку, AZ 1141;  
adalatakhund@mail.ru, aynur.hasanova73@yahoo.com*

Рассматривается обратная задача об определении пары функций  $\{u(x, t), c(x)\}$  из условий

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = D \times (0; T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{D} = D \cup \partial D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(x, t, u), \quad (x, t) \in S = \partial D \times [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^T u(x, t) dt = h(x), \quad x \in \bar{D}, \quad 0 < T. \quad (4)$$

Здесь  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x, t, p)$ ,  $h(x)$  — заданные функции;  $\partial u / \partial \nu$  — внутренняя конормальная производная.

Пусть  $\{u_i(x, t), c_i(x)\}$  — решение задачи (1)–(4) соответствующее данным  $f_i(x, t)$ ,  $\varphi_i(x)$ ,  $\psi_i(x, t, u_i)$ ,  $h_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ .

**Теорема.** Пусть:

1<sup>0</sup>.  $f_i(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$ ;  $\varphi_i(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ ;  $\psi_i(x, t, p) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times R_1)$ , существует такое  $m_1 > 0$ , что для любых  $(x, t) \in \bar{\Omega}$  и  $p_1, p_2 \in R_1$ :  $|\psi_i(x, t, p_1) - \psi_i(x, t, p_2)| \leq m_1 |p_1 - p_2|$ ;  $h_i(x) \in C^\alpha(0, T)$ .

2<sup>0</sup>. Существуют решения  $\{u_i(x, t), c_i(x)\}$ ,  $i = 1, 2$ , задачи (1)–(4) и они принадлежат множеству

$$K_\alpha = \{(u, c) \mid u(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}), c(x) \in C^\alpha(\bar{D})\}.$$

Тогда существует такое  $T^* > 0$  что при  $(x, t) \in \bar{D} \times [0, T^*]$  решение задачи (1)–(4) единственно и верна оценка устойчивости:

$$\|u_1 - u_2\|_0 + \|c_1 - c_2\|_0 \leq m_2 [\|f_1 - f_2\|_0 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_2 + \|\psi_1 - \psi_2\|_0 + \|h_1 - h_2\|_1], \quad (5)$$

где  $m_2 > 0$  зависит от данных задачи (1)–(4) и множества  $K_\alpha$ .

## CHARACTERIZATION OF INVERSE DYNAMICAL DATA FOR TWO VELOCITY SYSTEM

Belishev M. I., Pestov A. L.

<sup>1</sup>*St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Science, Fontanka, 27, St. Petersburg, 191023 Russia; belishev@pdmi.ras.ru*

<sup>2</sup>*Chebyshev Laboratory at St. Petersburg University, 14th Line, 29B, Vasilyevsky Island, St. Petersburg, 199178 Russia; pestov@pdmi.ras.ru*

A dynamical system of the form

$$\rho u_{tt} - (\Gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

is under consideration. Here  $\rho$ ,  $\Gamma$ ,  $A$ , and  $B$  are  $C^\infty$ -smooth  $2 \times 2$ -matrix-valued functions of  $x \geq 0$ ;  $\rho = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$  and  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$  are diagonal matrices with positive elements. The self-adjointness conditions are assumed to be held. For a boundary control  $f \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ , the relevant generalized solution  $u = u^f(x, t)$  is well defined [3].

There are two wave modes propagating with the velocities  $c_i = \sqrt{\rho_i^{-1}\gamma_i}$  ( $i = 1, 2$ ) and interacting with each other. We deal with the case of *separated velocities*:  $0 < c_2(x) < c_1(x) \leq \text{const}$ ,  $x \geq 0$ . With the system (1), (2) considered on the time interval  $[0, 2T]$ , one associates a *response operator*  $R^{2T}$ , which acts in  $L_2([0, 2T]; \mathbb{R}^2)$  on smooth controls  $f$  provided  $f(0) = 0$  by  $(R^{2T}f)(t) := \Gamma(0)u_x^f(0, t)$ .

**Lemma.** *The representation*

$$(R^{2T}f)(t) = -\nu \frac{df}{dt}(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T \quad (4)$$

is valid, where  $\nu = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$  and  $\omega$  are the constant matrices,  $r = r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$  is a *reply matrix-function*. Moreover, the matrices satisfy the following conditions:

- 1)  $\nu_2 > \nu_1 > 0$ ,  $\omega_{12} = -\alpha\omega_{21}$  with  $\alpha > 1$ ;
- 2)  $r \in C^\infty([0, 2T]; \mathbb{R}^2)$ ,  $r^\sharp(t) = r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$ ;
- 3) an operator  $C^T$ , which acts in  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  by

$$(C^T f)(t) := \nu f(t) + \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

is positive definite, i.e.  $(C^T f, f)_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)} > 0$  for all  $f \neq 0$ .

An inverse problem is: given  $R^{2T}$ , to determine the coefficients  $\rho$ ,  $\Gamma$ ,  $A$ ,  $B$  on a relevant interval (see [1, 2]).

**Theorem.** *The conditions 1–3 are necessary and sufficient for the operator of the form (4) to be a response operator for some dynamical system (1)–(3) with separated velocities.*

For the given response operator, the solution of the inverse problem is not unique. We describe the character of this non-uniqueness and provide the procedure, which recovers the concrete  $\rho$ ,  $\Gamma$ ,  $A$ ,  $B$  on  $[0, x(T)]$ .

The work was partially supported by the RFBR grant No 11-01-00407-a and NSh-4210.2010.1.

REFERENCES

1. **Belishev M. I.** Boundary control method in dynamical inverse problems — An introductory course by M. I. Belishev // Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. CISM Courses and Lectures. V. 529 / Eds G. M. L. Gladwell, A. Morassi. Wien: Springer, 2011. P. 85–150.
2. **Belishev M. I., Ivanov S. A.** Characterization of data of the dynamical inverse problem for a two-velocity system // J. Math. Sci. 2002. V. 109, N 5. P. 1814–1834.
3. **Belishev M. I., Pestov A. L.** Forward dynamical problem for the Timoshenko beam // J. Math. Sci. 2010. V. 167, N 5. P. 603–621.

## О ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ ДАННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОСТАВНОГО ТИПА

Белов Ю. Я., Сорокин Р. В.

*Сибирский федеральный университет, просп. Свободный, 79,  
Красноярск, 660041 Россия; belov@lan.krasu.ru, rsor@mail.ru*

### Полуэволюционные системы уравнений

В работе рассмотрены задачи идентификации функции источника для одномерных систем двух уравнений в частных производных второго порядка, одно из которых является параболическим, второе — эллиптическим. Исследованы задача Коши, первая и вторая краевая задача. Исходные задачи аппроксимируются задачами, в которых эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр  $\varepsilon > 0$  при производной по времени. Доказаны разрешимость аппроксимирующих задач и исходных задач в классах достаточно гладких функций.

Решения задач для полуэволюционных систем находятся как пределы  $w$  решений  $\tilde{w}^\varepsilon$  соответствующих краевых задач для эволюционных систем при стремлении параметра  $\varepsilon$  к нулю. Разрешимость исследуемых задач при  $\varepsilon \gg 0$  при условии периодичности по пространственной переменной, достаточной гладкости и выполнения условий согласования входных данных задачи доказана “в целом” методом слабой аппроксимации [1]. Периодичность решений  $\tilde{w}^\varepsilon$  доказывается расщеплением исходных задач на ряд задач, компоненты которых являются периодическими по  $x$  и равномерно сходятся при стремлении параметра расщепления к нулю к периодическим по  $x$  функциям  $\tilde{w}$ , являющимся решениями аппроксимирующих задач. Условия периодичности решений  $\tilde{w}^\varepsilon$  позволяют доказать равномерные по  $\varepsilon$  оценки решений  $\tilde{w}^\varepsilon$  в нормах  $C^k(\overline{Q}_T)$ ,  $Q_T = [0, T] \times [0, L]$  и равномерную в  $\overline{Q}_T$  сходимость  $\tilde{w}^\varepsilon$  к  $w$ . Получены оценки скорости сходимости.

### Эволюционные системы уравнений

В полосе  $\Pi_{[0, T]} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$  рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t^1 + a_1(t)u_x^1 + \sum_{k=1}^2 b_{1k}(t, x)u^k = \sum_{i=1}^n c(t, x_i)u_{xx}^1 + c(t, z)u_{zz}^1 + g_1(t, x)f(t, x, z), \\ u_t^2 + a_2(t)u_x^2 + \sum_{k=1}^2 b_{2k}(t, x)u^k = g_2(t, x)h(t, x, z) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными данными  $u^k(0, x, z) = u_0^k(x, z)$ ,  $x \in E_n$ ,  $z \in E_1$ ,  $k = 1, 2$ .

Для системы (1) исследованы задачи идентификации коэффициентов  $a_k(t)$ ,  $k = 1, 2$  (случай двух неизвестных коэффициентов) а также  $b_{kl}(t, x)$ ,  $k, l = 1, 2$  (четыре неизвестных коэффициента). Условия переопределения задаются на гиперплоскостях при фиксированных значениях выделенной пространственной переменной  $z$ . Доказаны существование “в малом” и единственность решения. При доказательстве используется метод слабой аппроксимации [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

## О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА

Белов Ю. Я., Фроленков И. В.

*Институт математики СФУ, просп. Свободный, 79, Красноярск,  
660041 Россия; belov@lan.krasu.ru, igor@frolenkov.ru*

Задача Коши

$$u_t(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2(t, x) = \mu u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \mu = \text{const} > 0 \quad (1)$$

исследовалась И. Бюргерсом [1], Э. Хопфом [2], И. Коулом [3]. Эта задача широко известна в теории турбулентности. Само уравнение (1) часто называют уравнением Бюргерса [4].

В настоящей работе для уравнений типа Бюргерса вида

$$u_t(t, x) = \mu u_{xx}(t, x) + M(t, u(t, x))u_x(t, x) + \lambda(t)f(t, x) \quad (2)$$

исследуется задача определения неизвестного коэффициента при функции источника в случае данных Коши. Уравнение содержит нелинейность достаточно общего вида при младшей производной. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения.

Для уравнения вида

$$u_t(t, x) = \mu u_{xx}(t, x) + a(t)u(t, x)u_x(t, x) + bu + \lambda(t)f(t, x) \quad (3)$$

также исследовано существование и единственность решения в случае первой краевой задачи в классах гладких ограниченных функций.

Ранее в работе [5] была изучена задача определения функции источника для уравнений типа Хопфа в случае задачи Коши. В статье [8] исследовалась задача идентификации функции источника для линейного уравнения. В статье [9] приведены некоторые результаты для полулинейных параболических уравнений с данными Коши. Относительно методов исследования обратных задач математической физики стоит обратить внимание на работы [6, 7].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Burgers I. M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Advances of Mechanics*. 1948. V. 1. P. 171–199.
2. **Hopf E.** The partial differential equation  $u_t + uu_x = u_{xx}$  // *Comm. Pure Appl. Math.* 1950. V. 3. P. 201–230.
3. **Cole I. D.** On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quart. Appl. Math.* 1951. V. 9. P. 226–236.
4. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
5. **Belov Yu. Ya.** Inverse problems for partial differential equations. Utrecht etc.: VSP, 2002.
6. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekkar, 1999.
7. **Романов В. Г.** Устойчивость в обратных задачах. М.: Науч. мир, 2005.
8. **Афиногенова О. А., Белов Ю. Я., Фроленков И. В.** О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения // *Докл. АН*. 2009. Т. 424, № 4. С. 439–441.
9. **Белов Ю. Я., Фроленков И. В.** Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений // *Докл. АН*. 2005. Т. 404, № 5. С. 583–585.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ И НА ПРЯМОЙ

Бондаренко А. Н., Дедок В. А.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
bondarenkoan1953@mail.ru, dedok@math.nsc.ru*

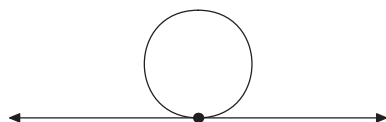
Прямая и обратная задача рассеяния на прямой для уравнения Шредингера является достаточно хорошо изученным объектом. Для пространств большей размерности для потенциалов, локализованных на структурах близких к одномерным, задача рассеяния может быть сведена к задаче рассеяния на геометрическом графе. Сама по себе задача рассеяния для графов интересна не только с теоретической, но и с практической точки зрения в связи с проектированием нанoeлектронных устройств [2]. Работа посвящена вопросу возможности сведения задачи рассеяния на топологически нетривиально устроенном графе к классической одномерной задаче рассеяния на прямой (замене топологически сложной структуры рассеивающим потенциалом).

**Определение.** *Оператором Шредингера*  $H = L + Q$  на некомпактном графе  $G$  будем называть самосопряженный оператор [1], ограничение которого на каждое ребро  $b_j$  действует на функции из области определения по правилу

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x).$$

Матрица рассеяния для оператора Шредингера на *квантовом графе* определяется через асимптотики специального вида решений [3] на полубесконечных ребрах.

В самом простом случае, топологически нетривиально устроенный граф может выглядеть таким образом:



Матрица рассеяния на указанном графе позволяет сформулировать обратную задачу рассеяния уже на прямой. Решение уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, \xi)F(\xi + y) d\xi = 0, \quad x < y$$

даст потенциал, который будет соответствовать уже одномерному рассеянию, но повторяющему свойства псевдоодномерной структуры графа.

В работе решается задача нахождения одномерного потенциала, соответствующего рассеянию на некоторых частных случаях топологически нетривиально устроенных графах, дается вывод о возможности сведения задачи рассеяния на графе к задаче рассеяния на прямой.

Работа проводилась при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № N11-01-00105), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы”.



ЛИТЕРАТУРА

1. **Kottos T., Smilansky U.** Ann. Phys. 1999. V. 274. P. 76–124;
2. **Melnikov Yu. B., Pavlov B. S.** J. Math. Phys. 1995. V. 36, N 6. P. 2813–2825.
3. **Герасименко Н. И., Павлов Б. С.** ТМФ. 1988. Т. 74, № 3. С. 345–359.

## СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ И УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Бондаренко А. Н.<sup>1</sup>, Иващенко Д. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия; bondarenkoan1953@mail.ru  
<sup>2</sup>ООО “Уфимский НТЦ”, ул. Аксакова, 59, Уфа, 450076 Россия;  
stanger.dmitry@gmail.com

Обозначим через  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $n$ -мерный вектор пространства  $\mathbb{R}^n$ , а через  $\Omega$  — ограниченную область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $S$ . Пусть  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — решения в области  $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$  следующих краевых задач:

$$\mathcal{D}_t^{2\beta} u = -Lu, \quad u|_{t=+0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u|_S = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -Lv, \quad v|_{t=+0} = f(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} + v|_S = 0, \quad (2)$$

где  $\mathcal{D}_t^{2\beta}$  — оператор дробного дифференцирования Капуто [1],  $2\beta \in (0, 1)$ , и  $L$  — равномерно эллиптический оператор с коэффициентами, зависящими только от  $x$ . Предположим, что решения задач (1) и (2) удовлетворяют оценкам  $|u(x, t)| \leq C e^{c_0 t}$ ,  $|v(x, t)| \leq C e^{c_0 t}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t > 0$ .

**Теорема.** *Справедливо соотношение:*

$$u(x, t) = \int_0^\infty K(t, \tau) v(x, \tau) d\tau, \quad K(t, \tau) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\beta k + 1 - \beta)} \frac{\tau^k}{t^{\beta k + \beta}}. \quad (3)$$

Рассмотрим для уравнения (1) обратную задачу, заключающуюся в определении некоторого коэффициента  $q(x)$ , входящего в оператор  $L$ , по решению задачи (1), заданному в точках  $M \in S$ :

$$u|_M = g(x, t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Поставим функции  $g(x, t)$  в соответствие функцию  $\tilde{g}(x, t)$ ,  $x \in M$ , как решение уравнения

$$g(x, t) = \int_0^\infty K(t, \tau) \tilde{g}(x, \tau) d\tau, \quad x \in M, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где ядро  $K$  определяется из (3). В работе показано, что функция  $\tilde{g}(x, t)$  для  $x \in M$  находится однозначно из (5). Положим

$$v|_M = \tilde{g}(x, t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Тогда обратная задача (1), (4) эквивалентна обратной задаче (2), (6). Благодаря установленной связи можно перенести целый ряд результатов, полученных в [2, 3] для гиперболических уравнений, на уравнения с дробной производной по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. **Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.** Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
3. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

## MULTIDIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR ISOTROPIC ELASTICITY SYSTEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN

Bugueva T. V.

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptuyug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia;  
Novosibirsk State University, Pirogova Str. 2, Novosibirsk, 630090 Russia;  
bugueva@math.nsc.ru*

Let  $r_0$  be fixed positive constant. In the domain  $\mathcal{D} = \{(r, \varphi, z) \mid r \in (0, r_0], \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$  we consider the Lamé system of differential equations of isotropic elasticity

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (1)$$

with initial and boundary conditions

$$\mathbf{u}|_{t < 0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=r_0} = \mathbf{l} \theta_0(t) e^{-im\varphi} e^{-i\zeta z}. \quad (2)$$

Here  $\sigma_r = \lambda \mathbf{e}_r \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \mathbf{e}_r (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$  is the stress vector acting on an area element with the normal parallel to the axis  $\mathbf{e}_r$ ;  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$  is the displacement vector;  $\rho(r, \varphi, z)$  is the medium density;  $\lambda(r, \varphi, z)$ ,  $\mu(r, \varphi, z)$  are the Lamé parameters,  $r \in (0, r_0]$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{l}$  is the vector  $(1, 0, 0)$  in the cylindrical basis  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ ;  $\theta_0(t)$  is the teta-function. Constants  $m$  and  $\zeta$  in the boundary condition are some parameters.

Let's pass from functions  $\lambda, \mu, \rho$  to the propagation velocity of longitudinal  $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  and transverse  $a = \sqrt{\mu/\rho}$  waves in the medium. The goal of the paper is to find the functions  $c(r, \varphi, z)$ ,  $a(r, \varphi, z)$  and  $\rho(r, \varphi, z)$ . We assume that the functions  $c$ ,  $a$  and  $\rho$  are representable in the form

$$a^2(r, \varphi, z) \approx a_0^2 + a_1(r, \varphi, z), \quad c^2(r, \varphi, z) \approx c_0^2 + c_1(r, \varphi, z), \\ \rho(r, \varphi, z) \approx \rho_0 + \rho_1(r, \varphi, z),$$

where  $a_1(r, \varphi, z)$ ,  $c_1(r, \varphi, z)$ ,  $\rho_1(r, \varphi, z)$  are unknown functions small in comparison with the unknown constants  $a_0$ ,  $c_0$ ,  $\rho_0$ .

From a boundary condition (2) follows, that the solution  $\mathbf{u}(t, r, \varphi, z)$  of the forward problem (1), (2) depends on parameters  $m$  and  $\zeta$ , we will designate it  $\mathbf{u}_{m, \zeta}(t, r, \varphi, z)$ .

Let  $T > 0$  be fixed positive number. As the additional information about solution to forward problem we consider a condition

$$\mathbf{u}_{m, \zeta}|_{r=r_0} = \mathbf{h}_{m, \zeta}(t, \varphi, z), \quad (3)$$

where  $\mathbf{h}_{m, \zeta}(t, \varphi, z)$  is given function for  $t \in [0, T]$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . For a finding of unknown functions  $a_1(r, \varphi, z)$ ,  $c_1(r, \varphi, z)$ ,  $\rho_1(r, \varphi, z)$  and constants  $a_0$ ,  $c_0$ ,  $\rho_0$  it is enough to take  $m = 0$ ,  $\zeta = 0$  and  $m = 1$ ,  $\zeta = 1$ .

The algorithm of a finding of functions  $a_1(r, \varphi, z)$ ,  $c_1(r, \varphi, z)$ ,  $\rho_1(r, \varphi, z)$  and constants  $a_0$ ,  $c_0$ ,  $\rho_0$  is received. The uniqueness theorem is proved and estimates of conditional stability of the inverse problem solution are obtained.

The research of the given inverse problem is based on the results of the papers [1, 2].

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-01-00105-a) and the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (interdisciplinary integration project, 2012, N 14).

#### REFERENCES

1. **Romanov V. G.** Inverse problems of mathematical physics. Utrecht: VSP, 1986.
2. **Bugueva T. V.** Multidimensional inverse problem for isotropic elasticity problem in a sphere // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2007. V. 15, N 9. P. 893–934.

## DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF GENE NETWORKS MODELING

**Golubyatnikov V. P.**

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia; glbtn@math.nsc.ru*

Wide classes of gene networks regulated by negative ( $\mathcal{N}$ ) feedbacks and some simple combinations ( $\mathcal{C}$ ) of positive and negative feedbacks are described usually by nonlinear dynamical systems of (bio)chemical kinetic (see [1–4] and references there):

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}) : \quad \frac{dx_i}{dt} &= \frac{a_i}{b_i + x_{i-1}^{m_i}} - k_i \cdot x_i, & \text{respectively,} \\ (\mathcal{C}) : \quad \frac{dx_i}{dt} &= \frac{a_i \cdot x_{i-1}}{b_i + x_{i-1}^{m_i}} - k_i \cdot x_i, & i = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{1}$$

The variables  $x_i(t)$  denote here concentrations of  $M$  substances in the gene network (proteins, RNA etc), parameters  $\{a_i, b_i, m_i, k_i\}$  are positive. The first summands in (1) describe synthesis of these substances. In the left equation ( $\mathcal{N}$ ) this is monotonically decreasing function called *Hill's function*, in the right equation ( $\mathcal{C}$ ) this summand is unimodal and is called *Glass-Mackey function*. The negative terms correspond to natural degradation of these substances in both cases.

For some multidimensional gene networks models of this type which appear in computational system biology (see [3]), we find conditions of uniqueness of determination of positive parameters  $\{a_i, b_i, m_i, k_i\}$  from discrete measurements  $\{x_i(t_j)\}$  of trajectories of the systems (1).

For dynamical systems of the types (1) and in some more general cases, when the first summands are just monotonically decreasing, or, respectively, just unimodal functions, we construct invariant domains near their stationary points with appropriate topological indices, and invariant sub-manifolds of their phase portraits. These constructions allow to obtain the following analytical results:

1. Sufficient conditions of existence of cycles.
2. Sufficient conditions of stability of some of these cycles.
3. Sufficient conditions of non-uniqueness of cycles in the cases when the gene network is regulated by negative feedbacks only,  $M$  is not a prime number, and the dynamical system (1), ( $\mathcal{N}$ ) is symmetric with respect to cyclic permutations of the variables.

Numerous numerical experiments with the Hill's functions correspond to these theoretical propositions, even in the cases of prime values  $M = 11$ ,  $M = 13$ . Bifurcations of these cycles are studied as well.

Some of these results and elaborated methods of description of phase portraits of similar dynamical systems are already applied in mathematical modeling of natural and artificial gene networks, see for example [3, 4] and the volume, which contains [1].

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 12-01-00074.

### REFERENCES

1. **Likhoshvai V. A., Golubyatnikov V. P., Demidenko G. V., Evdokimov A. A., Fadeev S. I.** Theory of gene networks / Computational systems biology. Novosibirsk: SB RAS, 2008. P. 395–480.

2. **Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.** On the existence and stability of cycles in gene networks with variable feedbacks // Contemporary mathematics. 2011. V. 553. P. 61–74.
3. **Bukharina T. A., Furman D. P., Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V.** Model investigation of central regulatory contour of gene net of *Drosophila melanogaster* macrochaete morphogenesis // Russian J. Development Biology. 2012. V. 43, N 1. P. 49–53.
4. **Golubyatnikov V. P., Mjolsness E., Gaidov Yu. A.** Topological index in the *p-53-Mdm2* circuit // Herald of Vavilov society for genetists and breeding scientists. 2009. V. 13, N 1. P. 160–162.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Горбунов В. К.

*Ульяновский государственный университет,  
ул. Л. Толстого, 42, Ульяновск, 432000 Россия; vkgorbunov@mail.ru*

Современная теория потребительского спроса, являющаяся основой статической экономической теории (называемой “микроэкономикой”), построена для индивидуального потребителя [1]. Реальный интерес, однако, представляет рыночный спрос, т. е. совокупный спрос множества покупателей исследуемых потребительских многопродуктовых рынков и экономик. Адекватное математическое моделирование рыночного спроса определяет успех достижения главной цели микроэкономики — определение конкурентного экономического равновесия, т. е. “правильных” рыночных цен и определяемых ими (вместе с доходами потребителей) количеств продаж. Традиционная схема построения теории спроса заключается в применении одинаковой модели выбора наиболее предпочтительного набора благ на доступном множестве, определяемом ценами и совокупными расходами, как к индивидуальному потребителю, так и к совокупности потребителей данного рынка. Такая схема порождает известные парадоксы агрегирования покупателей, открытые в 1953 г. Горманом (W. Gorman) и в 1972 г. Зонненшейном (H. Sonnenschein). Эти парадоксы говорят о кризисе экономической теории [2].

В докладе будет изложена авторская концепция [3–5] моделирования рыночного спроса как исходного объекта, представляющего статистический ансамбль потребителей. Обратной задачей соответствующей теории является построение коллективной функции полезности по торговой статистике. Метод ее решения основан на непараметрическом анализе спроса, построенном Африатом [6] для индивидуально потребителя. Ключевым моментом здесь является определение положительного решения (если есть) системы линейных неравенств, определяющих значения рационализирующей функции полезности и ее производные на статистическом спросе. Эта система может быть несовместной как в силу неадекватности модели спроса, так и в силу неточностей данных о спросе. Предложен метод ее регуляризации, использующий дополнительную информацию в виде некоторых индексов спроса. Предложенный метод также развит для обобщенной модели спроса [7], построенной на основе нового понятия — векторного поля предпочтений.

Работа была поддержана аналитической ведомственной целевой программой Минобразования РФ “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)”, проект 2.1.3/6763 “Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства”.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic theory. New York: Oxford University Press, 1995.
2. Полтерович В. М. Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. 1998. № 1. С. 46–66.
3. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.
4. Горбунов В. К. Особенности агрегирования потребительского спроса // Журн. экономич. теории. 2009. № 1. С. 85–94.
5. Горбунов В. К. Экономическое равновесие и агрегирование покупателей: реабилитация теоремы Вальда // Журн. экономич. теории. 2011. № 3. С. 130–143.



6. **Afriat S. N.** The construction of utility functions from expenditure data // Intern. Economic Review. 1967. V. 8, N 1. P. 67–77.
7. **Горбунов В. К.** Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Моск. ун-та. Сер. Экономика. 2009. № 1. С. 67–79.

## THE DYNAMICAL INVERSE PROBLEM FOR THE MAXWELL SYSTEM IN TIME-OPTIMAL SETUP

Demchenko M. N.

*Saint-Petersburg Branch of Steklov Mathematical Institute,  
Fontanka 27, Saint Petersburg, 191023 Russia;  
Chebyshev Laboratory, St. Petersburg State University,  
14th Line, 29b, Saint Petersburg, 199178 Russia;  
demchenko@pdmi.ras.ru*

We deal with the dynamical inverse problem for the Maxwell system with smooth scalar coefficients  $\varepsilon, \mu > 0$ . The system considered in a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  with smooth connected boundary has the form

$$\begin{aligned} e_t &= \varepsilon^{-1} \operatorname{curl} h, & h_t &= -\mu^{-1} \operatorname{curl} e && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ e|_{t=0} &= 0, & h|_{t=0} &= 0 && \text{in } \Omega \\ e_\theta &= f &&&& \text{in } \partial\Omega \times [0, T] \end{aligned}$$

where  $(\cdot)_\theta$  is a tangent component of a vector at the boundary,  $e = e^f(x, t)$  and  $h = h^f(x, t)$  are the electric and magnetic components of the solution. With the system one associates the *response operator*

$$R^T : f \mapsto h_\theta^f|_{\partial\Omega \times (0, T)}.$$

Let  $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$  be the velocity of electromagnetic waves. The *time-optimal* setup of the inverse problem is: given  $\{R^{2T}, c|_{\partial\Omega}, \frac{\partial c}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}\}$  to recover the shape of the subdomain  $\Omega^T$ , where

$$\Omega^s = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}_c(x, \partial\Omega) < s\}, \quad s > 0$$

( $\operatorname{dist}_c$  is a distance in the optical metric:  $ds^2 = c^{-2}|dx|^2$ ), and coefficients  $\varepsilon$  and  $\mu$  in the subdomain  $\Omega^T$ . Due to simple kinematic reasons it is necessary to take a response operator with doubled time  $R^{2T}$  to solve an inverse problem in  $\Omega^T$ .

In [1], by the use of the boundary control method, the uniqueness of determination of  $c|_{\Omega^T}$  was established for such  $T$ , that  $\Omega^T$  is covered by regular semigeodesic coordinates (hence,  $T$  is small enough). It means uniqueness of the product  $\varepsilon\mu$ . Our goal is to prove the uniqueness of  $\varepsilon$  and  $\mu$  separately in case of *arbitrary*  $T > 0$ .

The work was supported by the Chebyshev Laboratory (Department of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University) under RF Government grant 11.G34.31.0026 and by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 11-01-00407-a.

### REFERENCES

1. **Belishev M. I., Glasman A. K.** Dynamical inverse problem for the Maxwell system: recovering the velocity in a regular zone (the BC-method) // St.-Petersburg Math. J. 2001. V. 12, N 2. P. 279–316.
2. **Demchenko M. N.** The dynamical 3-dimensional inverse problem for the Maxwell system // Algebra Analiz. 2011. V. 23, N 6. P. 32–79 (in Russian).

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
МИКРОСЕЙСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА  
НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

**Ерохин Г. Н.**

*Институт прикладной информатики и математической геофизики  
БФУ им. И. Канта, просп. Александра Невского, 14,  
Калининград, 236041 Россия; GErokhin@kantiana.ru*

Современное состояние нефтегазовой отрасли характеризуется вступлением все большего числа крупных и уникальных высокодебитных месторождений в позднюю и завершающую стадию разработки, что приводит к значительному снижению добычи и росту обводненности продукции. Вовлечение в разработку сложнопостроенных и глубокозалегающих месторождений с трудноизвлекаемыми запасами является важнейшим резервом повышения эффективности недропользования. В настоящее время основным инструментом повышения нефтеотдачи является осуществление геолого-технических мероприятий (ГТМ), таких как гидравлический разрыв пласта (ГРП), вытеснение нефти и пр. При проведении ГТМ в среде возникают волновые процессы, которые можно зарегистрировать на поверхности Земли или в ближайшей скважине. Полученные таким образом данные являются основой для постановки и решения ряда обратных задач микросейсмического мониторинга нефтегазовых месторождений.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ СКОРОСТЕЙ

Кабанихин С. И.<sup>1</sup>, Бобоев К. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6,  
Новосибирск, 630990 Россия; ksi@mail.ru

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, ул.  
Ленинградская, 113, Новосибирск, 630008 Россия; boboev@mail.ru

В работе рассматривается вопрос об определении плотности  $\rho$  и упругих параметров Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  как функций глубины  $z$  по режиму колебаний границы упругого полупространства  $(z, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ . Обратные задачи теории упругости впервые поставлены и исследованы в спектральной и динамической постановках А. С. Алексеевым [1], В. Г. Романовым [2], А. С. Благовещенским [3], В. Барановым и Г. Кунец [4].

Рассматривается прямая и обратная задачи Лэмба в постановках, изученных ранее Б. Г. Михайленко [5] и В. Г. Романовым [2]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = \lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{u}{r},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = \lambda \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right].$$

С нулевыми начальными условиями

$$u|_{t<0} = 0, \quad \omega|_{t<0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{t<0} = 0,$$

$$\sigma_{zz}|_{t<0} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{t<0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{t<0} = 0$$

и граничными условиями

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -F(r)\delta(t), \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0.$$

Прямая и обратная задачи рассматриваются в предположении линейной зависимости скоростей. Предложен конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задачи сейсмологии // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. Вып. 6, ч. 2. С. 7–53.
2. Романов В. Г. Об одной постановке обратной задачи для симметрических гиперболических систем первого порядка // Мат. заметки. М.: Наука, 1967. С. 9–84.
3. Благовещенский А. С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Тр. Ленингр. ун-та. 1966. Вып. 1. С. 68–81.
4. Baranov V., Kunetz G. Film synthetique avec reflection multiple. Theorie et calcul pratique // Geophys. Prospect. 1960. V. 8. P. 315–325.

**ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОРРЕКТНОСТИ  
В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НАБЛЮДЕНИЯ**

**Костин А. Б.**

*НИЯУ МИФИ, Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Россия; abkostin@yandex.ru*

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ . В цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$  рассматривается задача нахождения пары функций  $\{u(x, t); f(x)\}$  из условий:

$$u_t(x, t) - Lu(x, t) = h(x, t)f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \quad (2)$$

$$\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $h, \mu, \chi$  — заданные функции, причем  $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$ ,  $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ ;  $B\chi(x) = 0$  на  $\Gamma$ ;  $L$  — равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x) \cdot u,$$

с коэффициентами  $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c(x) \in L_{\infty}(\Omega)$ ,  $c(x) \leq 0$  в  $\Omega$ ; скалярная функция  $\mu(t)$  в нелокальном условии (3) имеет ограниченную вариацию на  $[0, T]$  и  $\mu(0) = \mu(0+)$ . Оператор краевых условий  $B$  имеет вид: либо  $Bu = u$  либо  $Bu = \partial u / \partial N + \sigma(x)u$ , где  $N$  — внешняя кономаль,  $\sigma(x) \in C(\Gamma)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  на  $\Gamma$ . В случае  $Bu = \partial u / \partial N$  — второй краевой задачи, для удобства, дополнительно требуем, чтобы  $c(x) \not\equiv 0$  в  $\Omega$ .

**Определение 1.** *Обобщенным решением обратной задачи называется пара функций  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$  и  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям (1)–(2).*

**Определение 2.** *Обратная задача (1)–(3) называется корректной, если для любой функции  $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$  такой, что  $B\chi(x) = 0$  на  $\Gamma$ , существует единственная функция  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , для которой решение  $u(x, t; f)$  прямой задачи (1), (2) удовлетворяет условию (3) и при этом справедлива оценка устойчивости:*

$$\|f\|_{2, \Omega} \leq C \|L\chi\|_{2, \Omega}.$$

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-L_0 v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega; \quad Bv(x) = 0, \quad x \in \Gamma$$

обозначим  $\{e_k(x)\}$  и  $\{\lambda_k\}$ , занумеровав  $\lambda_k$  в порядке возрастания модуля (с учетом кратности) и считая, что  $\|e_k\|_{2, \Omega} = 1$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ . Известно, что  $e_k(x) \in W_2^2(\Omega)$ , все  $\lambda_k > 0$  и  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем система  $\{e_k(x)\}$  образует ОНБ в  $L_2(\Omega)$ . Введем в рассмотрение следующую систему функций

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int_0^T \left( \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} h(x, \tau) d\tau \right) d\mu(t) e_k(x) \equiv \beta_k(x) e_k(x),$$

$$k = 1, 2, \dots$$

**Теорема.** Пусть выполнены все приведенные выше условия. Система функций  $\{\psi_k(x)\}$  образует базис Рисса в  $L_2(\Omega)$  только тогда, когда обратная задача (1)–(3) корректна.

Доказательство проводится методами близкими к [1] где рассматривалась обратная задача с финальным наблюдением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Костин А. Б.** Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 246–256.

## О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кригер Е. Н., Фроленков И. В.

*Институт математики СФУ, просп. Свободный, 79,  
Красноярск, 660041 Россия;  
e\_katherina@mail.ru, kspk\_job@mail.ru*

В полосе  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$  рассматривается задача Коши

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + a(t)u + f(t, x, z)\lambda(t, x, z), \\ u(0, x, z) &= u_0(x, z), \quad t \in (0, T), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Наряду с функцией  $u(t, x, z)$  неизвестной является коэффициент  $\lambda(t, x, z)$ . Известно, что коэффициент  $\lambda(t, x, z)$  представим в виде  $\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$ . Заданы условия переопределения:  $u(t, x, \alpha) = \varphi(t, x)$ ,  $u(t, \beta, z) = \psi(t, z)$ ,  $\alpha, \beta = \text{const}$ . Считаем, что входные данные согласованы, являются достаточно гладкими и ограниченными. Также считаем, что

$$\begin{aligned} |f(t, \beta, z)| &\geq \delta_1 > 0, \quad |f(t, x, \alpha)| \geq \delta_2 > 0, \\ \delta_1, \delta_2 &= \text{const}, \quad t \in [0, T], \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

В классах гладких ограниченных функций доказано существование единственного решения  $u(t, x, z)$ ,  $\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$  задачи (1). Доказательство существования решения прямой задачи проводится методом слабой аппроксимации [1], и в целом повторяет доказательство теорем в работе [2]. Исследовано поведение решения при  $t \rightarrow \infty$ . Доказано, что при условии достаточной малости коэффициента при младшем члене и выполнении соотношения

$$\int_0^{+\infty} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^2} ((1 + |f(\theta, x, z)|) |p(\theta, x, z)|) d\theta \leq C,$$

где  $p(t, x, z)$  — известная функция, зависящая от входных данных, для решения задачи (1) в  $G_{[0,+\infty)}$  справедливо неравенство

$$|u(t, x, z)| + |\lambda(t, x, z)| \leq C.$$

Также доказано, что при условии достаточной малости коэффициента при младшем члене и выполнении условий:

$$|f(t, x, z)| \leq \frac{M_1}{1 + t^r}, \quad |p(t, x, z)| \leq \frac{M_2}{1 + t^s}, \quad M_1, M_2 > 0, \quad r, s > 1,$$

решение задачи в  $G_{[0,+\infty)}$  удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^2} (|u(t, x, z)| + |\lambda(t, x, z)|) = 0.$$

Ранее задачи идентификации коэффициентов параболических уравнений рассматривались в работах [2, 3]. Стабилизация решений обратных задач рассматривалась в работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов Ю. Я., Кантор С. А.** Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.
2. **Фроленков И. В., Кригер Е. Н.** О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении // J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. 2010. V. 3, N 4. P. 556–564.
3. **Афиногенова О. А., Белов Ю. Я., Фроленков И. В.** О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 4. С. 439–441.
4. **Сорокин Р. В.** О стабилизации решения одной обратной задачи для системы составного типа // Вестник Красноярского гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. № 1. С. 167–178.



**THE IDENTIFICATION OF AN UNKNOWN COEFFICIENT  
IN A MAIN TERM  
OF A PSEUDOPARABOLIC EQUATION**

**Lyubanova A. Sh.**

*Siberian Federal University, prosp. Svobodnii, 79, Krasnoyarsk, 660041 Russia;*  
lubanova@mail.ru

In 1960, Barenblatt, Zheltov and Kochina [1] proposed the basic concept in the theory of seepage (filtration) of homogeneous liquids in fissured rocks. A fissured rock is considered as a material consisting of pores and permeable blocks which are generally separated from each other by a system of fissures. Compared to the standard arguments of filtration in a porous medium the significant feature given in [1] lies in the fact that 1) two liquid pressures, both in the pores and in the fissures, are introduced at any point in a space and 2) the transfer of liquids between the fissures and the pores is taken into consideration. Under such an approach the model of the filtration of a liquid in a fissured rock is described by a pseudoparabolic equation of the third order for the pressure in the fissures.

This work is concerned with the inverse problem of finding the unknown coefficient  $\eta = \eta(t)$  in pseudoparabolic equation of filtration

$$(u + \eta(t)Mu)_t + Mu + g(t, x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T,$$

under the initial and boundary data

$$(u + \eta(t)Mu)|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t, x), \quad t \in [0, T],$$

appropriately and the conditions of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \left( \eta(t) \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right)_t + \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right\} \omega(t, s) ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T],$$

$$\eta(0) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(0, s)}{\partial \bar{N}} \omega(0, s) ds + r_1 \eta(0) = r_2.$$

Here  $M$  is the elliptic differential operator of the form

$$M = -\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I,$$

$\partial/\partial\bar{N} = (\mathbf{n}, \mathcal{M}(x)\nabla)$  and  $\mathbf{n}$  is the unit normal vector. The functions  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $\beta(t, x)$ ,  $U_0(x)$ ,  $\omega(t, x)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  and constants  $r_1$ ,  $r_2$  are given.

Under certain assumptions on the input data of the above problem it is proved that there exists  $t_0$ ,  $0 < t_0 \leq T$  such that the problem has a unique solution  $\{u, \eta\}$  in class

$$V = \{ \{u, \eta\} \mid u \in C([0, t_0]; W_2^2(\Omega)), u_t \in L^\infty(0, t_0; W_2^2(\Omega)), \eta \in W_\infty^1([0, t_0]) \}.$$

Moreover,

$$\eta_0 \leq \eta(t) \leq \eta_1$$

when  $t \in [0, t_0]$ . Here  $\eta_0$  and  $\eta_1$  are positive constants.

REFERENCES

1. **Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N.** Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured blocks [strata] // J. Appl. Math. Mech. 1960. V. 24. P. 1286–1303.

## AN INVERSE PROBLEM IN THE CLASS OF RATIONAL FUNCTIONS OF ONE VARIABLE

Maergoiz L. S., Zavalov M. N.

*Siberian Federal University, prosp. Svobodny, 82, Krasnoyarsk, 660041 Russia;*  
bear.lion@mail.ru

Let  $R(z) = P_n(z)/Q_m(z)$  be rational function, where  $P_n, Q_m$  are unitary polynomials of order  $n \geq 0, m \geq 0$  correspondingly. There is the following problem in complex analysis.

Let  $(X, \varphi)$  be Riemann surface of inversion of some rational function  $R$  with unknown complex coefficients, where  $\varphi : X \rightarrow S$  is the projection of  $X$  to the Riemann sphere  $S = \bar{\mathbb{C}}$ . It is necessary to recovery  $R$ , if we know multiplicities of all branching points  $m_1, \dots, m_N$  of  $X$  and its projections  $w_j = \varphi(m_j), j = 1, \dots, N$ .

For example, this problem is important for growth theory of entire functions. Many-shifted indicator diagram of an entire function of integer order  $n > 1$  is situated on Riemann surface of inversion of some unknown Laurent polynomial

$$w = \alpha(z) := z^n + \sum_{j=1}^k a_j z^{n-j}, \quad (1)$$

where  $a_k \neq 0$  for  $k > n$  (see [1. Ch. 4]).

This problem is equivalent to the algebraic

**Problem A.** Assume we know multiplicities of all zeros  $z_1, \dots, z_k$  of the derivative  $R'$  of a rational function  $R$  and values  $w_j = a(z_j), j = 1, \dots, N$ . It is necessary to recovery  $R$ .

Existence of Problem A solution was proved for any polynomial with given values in zeros of its derivative (see [2. P. 155]).

Constructive ways of Problem A solution were investigated for Laurent polynomials of the form (1) in [3]. The report devoted to a constructive solution of Problem A for rational functions.

### REFERENCES

1. **Маергойз Л. С.** Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991 [Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2003].
2. **Прасолов В. В.** Многочлены. 2 изд. М.: МЦНМО, 2001.
3. **Maergoiz L.** Constructive ways of Laurent polynomials with given branching properties and some applications // Mat. Studii. 2010. V. 34, N 2. P. 145–151.

## НЕКОТОРЫЕ ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

**Меражов И. З.**

*Сибирский университет потребительской кооперации,  
просп. К. Маркса, 26, Новосибирск, 630087 Россия;  
merazhov@gmail.com*

Основной предмет исследования составляют прямые (начально-краевые) задачи со специальными граничными условиями и обратная задача, связанная с определением модулей упругости и пьезоэлектрического модуля электроупругой среды кубической структуры по некоторой информации о решении прямых задач.

Система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости сведена к  $t$ -гиперболической системе по Фридрихсу дифференциальных уравнений первого порядка. Основные результаты составляют теоремы существования и единственности решения прямой и обратной многомерных линейаризованных задач для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости, а также получены оценки устойчивости решения многомерной линейаризованной обратной задачи.

## О НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Миренков В. Е.

*Институт горного дела СО РАН,  
Красный просп., 54, Новосибирск, 630091 Россия;  
mirenkov@misd.nsc.ru*

Обратные задачи для упругих тел делятся на три типа: граничные обратные задачи об идентификации нагрузок; обратные задачи по определению механических характеристик; геометрические - об определении координат внутренних дефектов в теле. Разделение обратных задач на три типа достаточно условно. Действительно, при реализации. Например, третьего типа необходимо предположить, что механические характеристики рассматриваемого тела определены точно и формулируемые граничные условия удастся реализовать точно — по существу необходимо решать сразу задачи всех трех типов.

Дискретизация сплошной среды при любом численном счете, использование экспериментальных данных, определенных неточно вносят погрешность в обратный оператор; априорные предположения на характер деформирования конструкции (абсолютно твердое тело, идеальное проскальзывание, скачок смещений, нарушение конформности в конечном числе точек и т.п.) искажают граничные условия при формулировке задачи и расширяют класс обратных задач. Все такие обратные задачи некорректны, т.е. их решения могут не существовать, быть неединственными или неустойчивыми (малым изменениям наблюдаемых данных могут соответствовать большие изменения искомого), но для всех их общее требование — необходимость преодоления некорректности через регуляризацию (А. Н. Тихонов, М. Н. Лаврентьев) или же через получение точных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений, исключающих регуляризацию. Мы понимаем регуляризацию, как попытку исправить “сознательно” допущенные неточности в виде всевозможных априорных предположений о поведении конструкции, несовместимые с условиями, допускаемыми моделью среды.

Для решения рассматриваемых выше задач, исключающих регуляризацию, получена система сингулярных интегральных уравнений, связывающая граничные значения компонент напряжений и смещений, что позволяет выписать решения для компонент смещений в квадратурах и аналогично для компонент напряжений, исключая процесс регуляризации, и предположить метод сведения проблемы к процедуре последовательных приближений, сходящийся к точному решению. Метод предполагает переопределенные граничные условия на части контура рассматриваемой области, доступной для наблюдения.

Анализ сложного напряженно-деформированного состояния области позволил определить однозначно места концентрации пор, согласующиеся с разрушениями, контролируруемыми акустической эмиссией (АЭ). Показано, что описание все этапов разрушения по бесконтактному контролю АЭ относятся к новому классу некорректных задач и требуют соответствующего подхода, т.е. восстановлению граничных условий, механических характеристик и координат дефектов. Другими словами, все определяется напряженно-деформированным состоянием, которое управляется граничными условиями, связанными системой интегральных уравнений. Обсуждаются примеры численной реализации предложенного метода.

## AN INVERSE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS WITH A WAVE DISPERSION

**Nazarov A. L.**

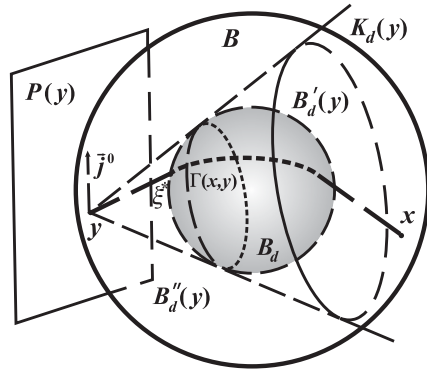
*Novosibirsk State Agrarian University, Ministry of Agriculture of RF,  
Dobrolyubova st., 160, Novosibirsk, 630039 Russia;  
alexey.l.nazarov@gmail.com*

The problem of finding a kernel and the index of dielectric permeability for the equations of electrodynamics is studied. Consider equations that describe propagation of electromagnetic waves in dispersive media

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon(x) \mathbf{E}(x, t) + \int_{-\infty}^t p(x, t-s) \mathbf{E}(x, s) ds \right) - \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, t) + \mathbf{j}(x, t) = 0,$$

$$\mu(x) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(x, t) + \operatorname{rot} \mathbf{E}(x, t) = 0;$$

$x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t$  — time, under the zero initial conditions  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})_{t < 0} = 0$ . Function  $\mathbf{j}^0 = \mathbf{j}^0 \delta(x - y, t)$  describes action of external (impulse) current source having the form of a dipole concentrated at a point  $y$  on the boundary of a unit ball  $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ , with a direction  $\mathbf{j}^0 = \mathbf{j}^0(y) \neq 0$  — a vector in the plane  $P(y)$  tangent to  $\partial B$ . In fact  $y$  is a parameter of the problem. Kernel  $p(x, t)$  characterises the medium dispersion,  $\mu(x)$  — magnetic permeability of the medium is a constant  $\mu_0 > 0$ ,  $\varepsilon(x)$  — dielectric permittivity differs from known constant  $\varepsilon_0 > 0$  only in  $B$ . Riemannian metrics  $d\tau$  assumed simple inside set strictly containing  $B$ , then geodesic  $\Gamma(x, y)$  between  $x$  and  $y$  is unique, and has Riemannian length  $\tau(x, y)$ . Let functions  $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$  and  $p(x, t)$  have compact support inside  $B_d = \{x \in B \mid |x| < 1 - d\}$ ,  $d \in (0, 1)$  for any  $t \geq 0$ . We relax an assumption for  $\varepsilon(x)$  made in [1], supposing only infinite differentiability of  $\varepsilon(x)$  and  $p(x, t)$  with respect to all arguments. An uniqueness theorem is proved in [2] for the solution of the inverse problem of determining functions  $\varepsilon(x)$ ,  $(\partial^m p(x, t) / \partial t^m)|_{t=0} \equiv p_m(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  inside  $B$  from the information on direct problem, which is a trace  $\mathbf{H}(x, t, y) = \mathbf{f}(x, t, y)$  of the solution to the Cauchy problem at the boundary, i.e.  $(x, y) \in \partial B \times \partial B$ , given for the time moments  $t \leq \tau(x, y) + \eta$ ,  $\eta > 0$  close to the time when a wave from dipole source arrives to the final point  $x$ . Reduction of the inverse problem is possible. To find  $\varepsilon(x)$  by  $\tau(x, y)$  known for  $x$  and  $y$  from  $\partial B$ , solve inverse kinematics problem that under assumptions made, has a unique solution [3]. Then use direct problem solution derived as



an asymptotic series with coefficients (found separately for sets  $B'_d(y)$  and  $B''_d(y)$  defined in [2]) unique with respect to  $\varepsilon(x)$  and  $p_m(x)$  obtain a problem

$$\int_{\Gamma(x,y)} \frac{p_0(\xi)}{\varepsilon(\xi)} d\tau = -2 \ln \left\{ \frac{\tau(x,y)}{\left| \frac{\mathbf{j}^0 \times \nabla_y \tau(x,y)}{4\pi} \right|^2 \mu_0 \varepsilon_0 \sqrt{\det \left( \frac{\partial(-\nabla_y \tau^2(x,y)/2\mu_0 \varepsilon_0)}{\partial x} \right)}}} \right.$$

$$\times \left[ \lim_{t \rightarrow \tau(x,y)+0} \int_{-\infty}^t (t-z) \mathbf{f}(x, z, y) dz \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x,y)} \left( \nabla \frac{1}{\mu_0 \varepsilon(x)} \right)^\top \nabla \tau(x, y) d\tau \right) \right]$$

$$\times \left( -\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \mathbf{j}^0 \times \nabla_y \tau(x, y)}{4\pi} \right) \left. \right\}$$

to find  $p_0(\xi), \xi \in B$  if integrals by geodesics between all  $(x, y) \in \partial B \times \partial B$  are known, as right side of the equality depends only on given data. According to [4] solution of this problem of integral geometry is unique and stable. It used to build recurrent procedure to get the same for  $p_m(x), m = 1, 2, \dots, x \in B$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Romanov V. G.** The problem of determining the kernel of electrodynamics equations for dispersion media // Dokl. Math. 2011. V. 84, N 2. P. 613–616.
2. **Nazarov A. L., Romanov V. G.** An uniqueness theorem for the inverse problem related to integro-differential equations of electrodynamics // J. Appl. Indust. Math. 2012 (accepted in print).
3. **Mukhometov R. G., Romanov V. G.** On the problem of finding an isotropic Riemannian metric in an  $n$ -dimensional space // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. V. 243, N 1. P. 41–44.
4. **Romanov V. G.** Integral geometry on geodesics of an isotropic Riemannian metric // Soviet Math. Dokl. 1978. V. 241, N 2. P. 290–293.

## ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ФОРМУЛЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нешчадим М. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
neshch@math.ru*

Известно [1], что методы группового анализа дифференциальных уравнений могут быть применены к нахождению точных решений уравнений математической физики и к исследованию качественных свойств соответствующих краевых задач: для преобразования данной задачи к более простой и удобной форме, для обнаружения и исследования особенностей в решении, для моделирования краевой задачи, для выяснения возможной принадлежности искомого решения какому-либо более просто описываемому классу частных решений и т. д.

В работе рассматриваются уравнение теплопроводности и волновое уравнение с переменным коэффициентом при старшей производной по времени. Находятся локальные преобразования, сохраняющие вид уравнения (локальные преобразования Ли). Естественно, что преобразования зависят от вида коэффициента. Это позволяет найти коэффициенты, при которых есть нетривиальные преобразования.

В качестве приложения рассмотрена задача определения неизвестного коэффициента при старшей производной по времени в предположении, что симметрии краевого условия продолжаются на все решение. При этом определяется как возможный вид коэффициентов так и решений рассматриваемых уравнений.

Работа частично поддержана грантом СО РАН (проект 44-2012)

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

## ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПО НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРАМ

Оразов И.

*Институт математики, информатики и механики МОН РК,  
ул. Шевченко, 28, Алматы, 050010 Казахстан; makhmud-s@mail.ru*

Рассматривается один класс задач, моделирующих процесс определения температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам. При их математической формулировке возникают обратные задачи для уравнения теплопроводности, в которых вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических уравнений изучались во многих работах. В отличие от предыдущих работ, нами исследуются обратные задачи для уравнения теплопроводности с общими краевыми условиями по пространственной переменной, являющимися регулярными, но не усиленно регулярными.

В области  $\Omega = \{(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассмотрим задачу о нахождении правой части  $f(x)$  уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x), \quad (1)$$

и его решения  $u(x, t)$ , удовлетворяющего начальному и конечному условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0, \\ c_1 u_x(0, t) + d_1 u_x(1, t) + c_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Коэффициентами  $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 0, 1$  краевого условия (3) являются действительные числа, а  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — заданные функции.

**Теорема.** Пусть краевые условия (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Если функции  $\varphi(x), \psi(x) \in W_2^2(0, 1)$  и удовлетворяют краевым условиям

$$\begin{cases} a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \\ c_1 y'(0) + d_1 y'(1) + c_0 y(0) + d_0 y(1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

то существует единственное обобщенное решение  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ ,  $f(x) \in L_2(0, 1)$  задачи (1)–(3).

В работе предлагается метод решения задачи (1)–(3) не зависящий от того обладает ли соответствующая спектральная задача для оператора кратного дифференцирования с краевыми условиями (4) свойством базисности корневых функций. Ранее обоснование существования решения задачи (1)–(3) в классическом смысле было дано в [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Оразов И., Садыбеков М. А. Об одном классе определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 180–186.



## DETERMINING A SPEED OF SOUND AND ABSORPTION BY THE BC-METHOD

**Pestov L. N.**

*Immanuel Kant Baltic Federal University,  
Nevskogo st., 14, Kaliningrad, 236041 Russia;  
lpestov@kantiana.ru*

We consider inverse dynamical problem for wave equation on determining a speed of sound and an absorption in a bounded domain  $D$ . A linear procedure based on the Boundary Control method is proposed. The time of observation must be greater than acoustical radius of  $D$ .

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 12-01-00260a.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЧЕТЫРЕХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Полынцева С. В.

*Сибирский федеральный университет,  
просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041 Россия;  
siriuspsv@mail.ru*

В полосе  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$  рассматривается многомерное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x(u) + q_1(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial z} + q_3(t, x)u + q_4(t, x)f(t, x, z) \quad (1)$$

с четырьмя неизвестными коэффициентами  $q_1(t, x)$ ,  $q_2(t, x)$ ,  $q_3(t, x)$ ,  $q_4(t, x)$ , с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \quad (x, z) \in E_{n+1}. \quad (2)$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i};$$

функции  $f(t, x, z)$ ,  $u_0(x, z)$  заданы в  $G_{[0,T]}$  и  $E_{n+1}$  соответственно; коэффициенты  $\alpha_{ij}(t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , — непрерывные действительнзначные функции переменной  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T = \text{const} > 0$ ;  $E_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $n \geq 1$ .

Считаем, что  $\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ji}(t)$  и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j > 0, \quad \xi \in E_n \setminus \{0\}, \quad t \in [0, T].$$

Предполагается, что выполняются условия переопределения на четырех различных гиперповерхностях:

$$\begin{aligned} u(t, x, b_1(t)) &= \varphi_1(t, x), & u(t, x, b_2(t)) &= \varphi_2(t, x), \\ u(t, x, b_3(t)) &= \varphi_3(t, x), & u(t, x, b_4(t)) &= \varphi_4(t, x), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ ,  $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ , функции  $b_l(t)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , попарно различны,  $b_l(t) \in C^1[0, T]$ , и  $\varphi_l(t, x)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , — заданные действительнзначные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, x) &= u_0(x, b_1(0)), & \varphi_2(0, x) &= u_0(x, b_2(0)), \\ \varphi_3(0, x) &= u_0(x, b_3(0)), & \varphi_4(0, x) &= u_0(x, b_4(0)), \quad x \in E_n. \end{aligned}$$

Под решением задачи (1)–(3) в полосе  $G_{[0,t_*]}$ ,  $0 < t_* \leq T$ , понимается пятерка функций  $u(t, x, z)$ ,  $q_1(t, x)$ ,  $q_2(t, x)$ ,  $q_3(t, x)$ ,  $q_4(t, x)$ , удовлетворяющая соотношениям (1)–(3).

В представленной работе доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи (1)–(3) в классе гладких ограниченных функций.

Отметим, что в работе [1] доказана однозначная разрешимость задач идентификации трех и четырех коэффициентов в случае, когда условия переопределения

задавались на трех и четырех различных гиперплоскостях соответственно, в классах функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности по выделенной переменной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Полынцева С. В.** Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / Неклассические уравнения математической физики: Тр. Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения". Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2007. С. 221–231.

## DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF NONLINEAR ELECTROMAGNETOELASTICITY

Priimenko V. I.<sup>1</sup>, Vishnevskii M. P.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Laboratory of Petroleum Engineering and Exploration, State University Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rod. Amaral Peixoto, km 163, 27.925-535, Macae, RJ, Brazil; slava@lenep.uenf.br, slava211054@gmail.com*

<sup>2</sup>*Laboratory of Mathematical Sciences, State University Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Av. Alberto Lamega, 2000, Parque California, 28.013-600, Campos dos Goytacazes, RJ, Brazil; mikhail@uenf.br*

The theory of electromagnetoelasticity is concerned with the interacting effects of an electromagnetic field with electroconductive elastic media. The theory has developed quickly in recent decades because of the possibilities of its extensive practical applications in diverse fields such as geophysics, mechanics of continua, electrodynamics and other relevant areas. For the description of sufficiently simple interactions, the theories of magnetohydrodynamics [1], electroelasticity [2], and magnetoelasticity [3] were developed. These theories are basically a combination (without introducing new conceptions) of objects and the phenomena considered in continuum mechanics and electrodynamics. For a profound acquaintance with the modern state of the theory see, e.g., [4].

The system under studying consists of the full variant of the 1D-electromagnetoelasticity system, composed by three coupled nonlinear partial differential equations, one of them is a hyperbolic equation (an analogue of the Lamé system) and the other two equations form a parabolic system (an analogue of the diffusion Maxwell system):

$$u_{tt} = (v^2 u_z - p \mathbf{h}^2)_z + f, \quad \mathbf{h}_t = (r \mathbf{h}_z - u_t \mathbf{h} - r \mathbf{j})_z. \quad (1)$$

Here  $u(z, t)$ ,  $f(z, t)$ ,  $\mathbf{h}(z, t) = (h_1, h_2)$ ,  $\mathbf{j}(z, t) = (j_1, j_2)$  are the non-dimensional analogues of the vertical displacement, the external elastic force, the magnetic field and the external electrical force;  $\mathbf{h} \equiv h_1^2 + h_2^2$ . The coefficient  $v(z)$  is the non-dimensional velocity of  $P$ -waves,  $p$  is a positive constant characterized the influence of magnetic field on the propagation of elastic waves,  $r(z)$  is the magnetic viscosity; the space and time variables are denoted by  $(z, t)$ .

In our report we consider several nonlinear mathematical problems related to the analysis of small variations of the electromagnetic and elastic waves of vibrating elastic electroconductive media governed by (1). The results obtained are an extension of [5, 6].

### REFERENCES

1. **Alvén H.** *Cosmical electrodynamics.* Oxford: Clarendon Press, 1955.
2. **Parton V. Z., Kudrjavec B. A.** *Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrical-conducting bodies.* Moscow: Nauka, 1988.
3. **Dunkin J. W., Eringen A. C.** On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid // *Int. J. Eng. Sci.* 1963. V. 1. P. 461–495.
4. **Eringen A. C., Maugin G. A.** *Electrodynamics of continua. Vols. I, II.* New York–Berlin: Springer-Verlag, 1990.
5. **Priimenko V. I., Vishnevskii M. P.** An inverse problem of electromagnetoelasticity in the case of complete nonlinear interaction / *J. Inv. Ill-Posed Problems.* 2005. V. 13. P. 277–301.
6. **Priimenko V., Vishnevskii M.** Direct problem for a nonlinear evolutionary system // *Nonlinear Analysis.* 2010. V. 73. P. 1767–1782.

## О ЗАДАЧЕ ГИДРОЛОКАЦИИ МОРСКОГО ДНА

**Прохоров И. В.**

*Институт прикладной математики ДВО РАН,  
ул. Радио, 7, Владивосток, 690041 Россия;  
Дальневосточный федеральный университет, ул. Суханова, 8, Владивосток,  
690050 Россия; prh@iam.dvo.ru*

В докладе рассматриваются проблемы акустического зондирования во флуктуирующей морской среде. Рассеивающие свойства морской среды, вызванные флуктуациями плотности и коэффициента сжимаемости, наряду со многими другими деструктивными факторами, оказывают существенное влияние на измеряемый сигнал и могут приводить к сильным искажениям при построении гидролокационных изображений [1].

В связи с этим при математическом моделировании рассматриваемого процесса представляется важным исследование класса моделей, учитывающих многократное рассеяние акустических волн в случайно-неоднородной среде [2, 3]. Существуют два основных подхода к рассмотрению проблемы многократного рассеяния звуковых волн: статистический и феноменологический. Исходя из феноменологического описания процесса, основанного на нестационарном интегро-дифференциальном уравнении переноса для плотности распределения звуковых волн с соответствующими граничными и начальными условиями [4–6], сформулирована задача картографирования морского дна по измерениям с носителя гидролокатора бокового обзора, движущегося с некоторой постоянной скоростью вдоль заданной траектории [6].

Получены уравнения интегрального типа для нахождения коэффициента отражения дна. Для точечного источника излучения импульсного типа в приближении однократного рассеяния исходная проблема сведена к задаче интегральной геометрии [7, 8]. При некоторых специфических ограничениях на функции, описывающие спектральные характеристики и диаграммы направленности антенн, указаны способы упрощения задачи и повышения точности решения. С практической точки зрения это приводит к улучшению качества гидролокационных изображений морского дна.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-98521) и Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракты 16.740.11.0456, 14.740.11.1000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Матвиенко Ю. В., Воронин В. А., Тарасов С. П., Скнар А. В., Тутынин Е. В.** Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов // Подводные исследования и робототехника. 2008. Т. 2, № 8. С. 4–15.
2. **Исимару А.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
3. **Яроцук И. О., Гулин О. Э.** Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. Владивосток: Дальнаука, 2002.
4. **Bal G., Keller J. B., Papanicolaou G., Ryzhik L.** Transport theory for acoustic waves with reflection and transmission at interfaces // Wave Motion. 1999. V. 30. P. 303–327.
5. **Bal G.** Kinetics of scalar wave fields in random media // Wave Motion. 2005. V. 43. P. 132–157.
6. **Прохоров И. В., Золотарев В. В., Агафонов И. Б.** Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане // Дальневосточный мат. журн. 2011. Т. 11, № 1. С. 76–87.

7. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.** Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.
8. **Романов В. Г.** Формула обращения в задаче интегральной геометрии на эллипсоидах // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 4. С. 124–126.

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Романенко Г. В., Фроленков И. В.

*Институт математики СФУ,  
просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия;  
galina.romanenko@yandex.ru, igor@frolenkov.ru*

В работе [1] доказано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух прямых задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента. Данный результат в работе [2] позволил достаточно удобным образом привести обратную задачу к прямой и далее исследовать ее разрешимость, используя метод слабой аппроксимации [3].

В области  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$  рассматривается задача Коши для системы

$$\begin{cases} u_t^1(t, x, z) = a_1(t)u_{zz}^1(t, x, z) + b(t)u_{xx}^1(t, x, z) \\ \quad + \lambda^1(t, z)B_z^1(u^1(t, x, z) + u^2(t, x, z)), \\ u_t^2(t, x, z) = a_2(t)u_{zz}^2(t, x, z) + b(t)u_{xx}^2(t, x, z) \\ \quad + \lambda^2(t, z)B_z^2(u^1(t, x, z) + u^2(t, x, z)), \\ u^1(0, x, z) = u_0^1(x, z), \quad u^2(0, x, z) = u_0^2(x, z), \end{cases}$$

где  $B_z^i(w(t, x, z)) = c_1^i(t)w_{zz}(t, x, z) + c_2^i(t)w_z(t, x, z) + c_3^i(t)w(t, x, z)$ .

Заданы условия переопределения  $u^1(t, 0, z) = \psi^1(t, z)$ ,  $u^2(t, 0, z) = \psi^2(t, z)$ .

Функции  $\lambda^1(t, z)$ ,  $\lambda^2(t, z)$  подлежат определению одновременно с функциями  $u^1(t, x, z)$ ,  $u^2(t, x, z)$ .

Получено обобщение результата [1] на системы указанного вида. Если существуют решения задач

$$\varphi_t(t, x) = b(t)\varphi_{xx}(t, x), \quad \varphi(0, x) = \omega_0(x),$$

$$\begin{cases} f_t^1(t, z) = a_1(t)f_{zz}^1(t, z) + \lambda^1(t, z)B_z^1(f^1(t, z) + f^2(t, z)), \\ f_t^2(t, z) = a_2(t)f_{zz}^2(t, z) + \lambda^2(t, z)B_z^2(f^1(t, z) + f^2(t, z)), \\ f^1(0, z) = v_0^1(z), \quad f^2(0, z) = f_0^2(z), \end{cases}$$

то функции  $u^1(t, x, z)$ ,  $u^2(t, x, z)$ ,  $\lambda^1(t, z)$ ,  $\lambda^2(t, z)$  представимы в виде

$$\begin{aligned} u^i(t, x, z) &= \varphi(t, x)f^i(t, z), \\ \lambda^i(t, z) &= \frac{\psi_t^i - a_i(t)\psi_{zz}^i - f^i(t, z)\varphi_t(t, 0)}{B_z^i(\psi^1 + \psi^2)} \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

при условии, что  $u_0^i(x, z) = \omega_0(x)v_0^i(z)$  ( $i = 1, 2$ ).

Используя данное представление доказана теорема существования решения обратной задачи. Исследован вопрос о единственности решения обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аниконов Ю. Е.** О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений // Докл. АН. 1993. Т. 331, № 3. С. 409–410.
2. **Фроленков И. В., Романенко Г. В.** О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения // J. Sib. Federal Univ. Math. Physics. 2012. V. 5, N 1. P. 122–131.
3. **Белов Ю. Я., Кантор С. А.** Метод слабой аппроксимации. КрасГУ, 1999.



## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Сабитов К. Б.<sup>1</sup>, Мартемьянова Н. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладных исследований АН РБ, ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103 Россия; [sabitov\\_fmfm@mail.ru](mailto:sabitov_fmfm@mail.ru)

<sup>2</sup>Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, ул. Антонова-Овсеенко, 26, Самара, 443090 Россия; [ninamarten@yandex.ru](mailto:ninamarten@yandex.ru)

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $b \geq 0$  — заданные действительные постоянные, и поставим следующую нелокальную обратную задачу.

**Задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$ , удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+), \quad f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad i = 1, 2;$$

$$Lu = f(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x, \beta) = \chi(x), \quad u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\chi(x)$ ,  $g(x)$  — заданные достаточно гладкие функции,  $\varphi(0) = \varphi(1)$ ,  $\psi(0) = \psi(1)$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ .

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см. [1, 2] и приведенную там библиографию). В [3] методом спектральных разложений получены новые теоремы единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа [4]. Обратные задачи для уравнения эллиптико-гиперболического типа (1) с неизвестной одинаковой правой частью  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$  рассматривались ранее в работах авторов [5, 6]. Решение поставленной обратной задачи построено в виде сумм биортогональных рядов. Установлен критерий единственности. Доказана устойчивость решения по граничным данным.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Якно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука СО, 1982.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
3. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
4. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 451–454.
5. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.
6. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012 (в печати).

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Садовой Г. С.

*Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092 Россия; sadovoi\_g@mail.ru*

Обратная задача возникает в тех случаях, когда по наблюдаемым данным надо определить значения параметров математической модели. В общем случае сущность предлагаемого подхода состоит в следующем. На основе достоверных данных, полученных из эксперимента или наблюдений, формируем принципы (аксиомы) естествознания [1–3]. С учетом этих аксиом составляем математическую модель, в которой должна быть предусмотрена возможность изменения пространственно-временных соотношений для явлений, происходящих в системе. Решая систему уравнений математической модели, определяем множество параметров модели, для которых свойства системы различаются. Затем определяем критерии и оцениваем значения этих критериев, при которых свойства системы существенно различны. Таким образом, обратная задача решена, а данный подход является руководством для получения новых научных знаний. При моделировании мы использовали модифицированные нами численные методы решения функциональных уравнений [4, 5].

В работе [1] исследована возможность формирования единых основ естествознания. Предложена концепция, которая фокусирует внимание исследователя на связи существенных свойств системы с конкретными пространственно-временными соотношениями в данной системе.

**Аксиома.** *Для любой системы независимо от ее происхождения найдутся такие два набора значений пространственно-временных параметров, при которых свойства системы различны.* Это утверждение я назвал принципом изменчивости [1, 2]. В работах [1–5] проведено исследование большого количества задач с использованием данного подхода. Один из примеров решения таких задач — определение инерции заряженной частицы, движущейся в вакууме со скоростью, близкой к скорости света. При этом было показано, что имеется тесная связь этой задачи с другими задачами физики и астрофизики, в частности, с задачей интерпретации и вычисления темной энергии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой Г. С. Концепция систем с изменяющимися соотношениями / Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Под ред. М. М. Лаврентьева. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2004. Т. 2. С. 153–170.
2. Садовой Г. С. Новый фундаментальный подход к построению математических моделей / Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. <http://vm.cs.msu.su/samarski2009/abstracts/356.pdf>
3. Садовой Г. С. Применение понятия “инерция энергии” при интерпретации эмпирических данных // Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. 2011. Т. 26. С. 425–432.
4. Sadovoi G. S. About new approach to solution of the inverse problems for the Volterra equations / Abstracts of Intern. conf. “Ill-Posed and Inversed Problems”. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2002. P. 144.
5. Lavrentiev M. M., Sadovoi G. S., Eganova I. A. Recent developments in the theory and practice of the systems with retard and advance / Proceedings of 3rd Intern. conf. APEIE-96. Novosibirsk, 1996. V. 6, pt 2. P. 4–12.

## ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Седипков А. А.

*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия;  
sedipkov@gmail.com*

Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$w_x|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

где коэффициент  $\sigma(x)$ , называемый *импедансом*, является строго положительной кусочно-гладкой функцией с конечным числом разрывов первого рода. Будем предполагать, что  $\sigma(x) \equiv \text{const}$  при  $x \geq x_* > 0$ .

Пусть  $\lambda = \omega^2$ . Обозначим через  $e(x, \omega)$  решение (1), совпадающее с  $\exp(i\omega x)$  при  $x \geq x_*$  и такое, что  $e, \sigma(x)e_x \in W_{2,loc}^1(0, \infty)$ . Функцию  $e(x, \omega)$  называют *решением Йоста*, а функцию  $j(\omega) = e_x(0, \omega)$  — *функцией Йоста*.

Обратная спектральная задача для системы (1), (2) состоит в восстановлении импеданса  $\sigma(x)$  по функции Йоста  $j(\omega)$ .

Установлено, что если точки разрыва импеданса несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то разрывы однозначно восстанавливаются по асимптотике функции Йоста  $j(\omega)$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Построен алгоритм позволяющий восстановить разрывы импеданса за конечное число шагов [1].

Кроме того, установлено, что импеданс на интервалах непрерывности однозначно определяется функцией Йоста  $j(\omega)$ , и восстановление импеданса сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения Фредгольма в соответствующем банаховом пространстве. Построена конструктивная процедура восстановления импеданса на интервалах непрерывности [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00390), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований 15), СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект 30).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Sedipkov A. A.** The inverse spectral problem for the impedance equation with piecewise continuous coefficients / Proceeding of 2011 World congress on Engineering and Technology. IEEE press, 2011. V. 1. P. 509–511.
2. **Седипков А. А.** Восстановление разрывов оператора Штурма — Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Вестник НГУ. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 114–125.

## ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Спичак Г. А., Шипина Т. Н.

*Сибирский федеральный университет,  
просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041 Россия;  
GalinaSpichak@yandex.ru, stn.71@mail.ru*

В полосе  $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | t \in [0,T], x \in E_1\}$  рассматривается система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + b_{11}(t)U^2 + b_{12}(t)V + g_1(t)m_1(t,x), \\ V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V^2 + g_2(t)m_2(t,x), \end{cases}$$

с начальными условиями

$$U(0,x) = U_0(x), \quad V(0,x) = V_0(x), \quad x \in E_1.$$

Для данной системы исследована разрешимость двух обратных задач. В первой обратной задаче неизвестны функции  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , и условия переопределения имеют вид

$$U(t,0) = \beta_1(t), \quad V(t,0) = \beta_2(t), \quad t \in [0,T].$$

Во второй обратной задаче неизвестны коэффициенты  $b_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$ , и условия переопределения имеют вид

$$\begin{aligned} U(t,0) = \beta_1(t), \quad V(t,0) = \beta_2(t), \quad U(t,a) = \beta_3(t), \quad V(t,a) = \beta_4(t), \\ t \in [0,T], \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Существование и единственность решения рассматриваемых обратных задач доказывается в классе гладких ограниченных функций в  $\Pi_{[0,T]}$ . Задачи такого типа возникают при моделировании некоторых водных экосистем. В основе доказательства теорем разрешимости лежит метод слабой аппроксимации [1].

Обратные задачи для систем составного типа в аналогичной постановке представлены в работах [2, 3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
2. **Белов Ю. Я., Шипина Т. Н.** Об одной обратной задаче для системы составного типа // ДАН. 2000. Т. 370, № 2. С. 155–157.
3. **Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В.** Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журн. СФУ: математика и физика. 2009. Т. 2, № 3. С. 288–297.

## О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Хайдаров А.

*Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Университетский  
бульвар, 15, Самарканд, 140100 Узбекистан*

Систематическое изучение многомерных коэффициентных обратных задач было начато М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым.

В настоящей работе рассматривается задача об определении правой части гиперболического уравнения, состоящей из двух неизвестных функций, для которой доказывается теорема единственности.

Пусть  $D$ –область в пространстве  $R^n$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ ,  $Q = (0, T) \times D$ .

Рассмотрим задачу отыскания тройки функций  $(u, q_1, q_2)$ , удовлетворяющей следующим условиям:

$$Au = \rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 + f, \quad q_j x_n = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{на } Q, \quad (1)$$

$$u = u_t = 0 \quad \text{на } \{0\} \times D, \quad (2)$$

$$u = u_N = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial D, \quad (3)$$

где  $A$  линейный гиперболический дифференциальный оператор

$$Au = A^{00} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=0}^n a^j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0$$

с коэффициентами  $a^{jk}$ ,  $a^j$ ,  $a_0$  класса  $C^1(\bar{Q})$ , причем  $a^{jk}$  не зависят от  $x_n$ .

**Теорема.** *Если*

$$\rho_1 > \varepsilon_0, \quad (\rho_2/\rho_1)_{x_n} > 0, \quad \rho_1 \in C^2(\bar{Q}), \quad \rho_2 \in C^1(\bar{Q}),$$

то для решения  $u$  задачи (1)–(3) с функциями  $u$ ,  $u_{x_n}$ ,  $u_{x_n x_n}$  из класса  $W_2^2(Q)$  справедлива следующая оценка:

$$\|u_{x_n}\|_{(1)}(Q) + \|u\|_{(1)}(Q) \leq C(\|f\|_{(0)} + \|f_{x_n}\|_{(0)})(Q). \quad (4)$$

Кроме того, если  $f = 0$ , то  $u = 0$  и  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$  на  $Q$ .

В оценке (4) через  $\|\cdot\|_{(k)}$ , обозначена норма в пространстве Соболева  $W_2^k(Q)$ .

Случай обратной задачи определения правой части гиперболического уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией рассмотрен в работе [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Хайдаров А.** О единственности определения источника для гиперболических уравнений / Тр. Междунар. конф. “Современные проблемы математической физики и информационной технологии”, Ташкент, 26–29 нояб., 2003.

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Черепанова О. Н., Шишкина О. А.

*Сибирский федеральный университет,  
просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041 Россия;  
cheronik@mail.ru, olga\_a\_sh@mail.ru*

В работе рассмотрена первая начально-краевая задача идентификации коэффициента при неизвестной функции для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной по времени.

В области  $Q_T = \{t, x, z \mid 0 < t < T, 0 < x < x_0, |z| < \infty\}$  рассматривается задача нахождения пары функций  $(u(t, x, z), a(t, x))$  из уравнения

$$\varepsilon u_{tt} + u_t = u_{xx} + u_{zz} + a(t, x)u + f(t, x), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (1)$$

Считаем, что для функции  $u(t, x, z)$  выполнены следующие начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} u(0, x, z) &= u_0(x, z), \\ u_t(0, x, z) &= u_1(x, z), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(t, 0, z) &= \mu_1(t, z), \\ u(t, x_0, z) &= \mu_2(t, z), \end{aligned} \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$u(t, x, 0) = \phi(t, x). \quad (4)$$

Условия (2)–(4) предполагаются согласованными.

В предположении существования преобразования Фурье для функции  $u(t, x, z)$  по переменной  $z$ , задача (1)–(4) сводится к прямой задаче для интегродифференциального уравнения.

Доказаны теоремы существования и единственности решения прямой и обратной задачи. Рассмотрен вопрос сходимости решения задачи (1)–(4) к решению соответствующей параболической задачи ( $\varepsilon = 0$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
3. Безнощенко Н. Я. Об определении коэффициента в параболическом уравнении // Дифф. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 24–35.

## МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ЗАДАЧЕ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Чурбанов Д. В.

*МГУ им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119992 Россия;*  
dmitriychurbanov@gmail.com

Процессы, связанные с динамикой живых сообществ, изучались на протяжении длительного времени [1, 2]. Некоторые обратные линейные задачи по данным моделям рассмотрены в [3] и др. В настоящее время много внимания уделяется изучению нелинейных моделей [4], одна из которых может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= \mu(u), & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(0, t) &= \psi(t), & 0 \leq t \leq 1, & \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

С использованием дополнительно заданных значений  $u(1, t) = c(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  исследуется обратная задача по восстановлению неизвестного коэффициента  $\mu(s)$  уравнения (1). Рассматривается случай, когда областью значений функции  $u(x, t)$  является отрезок  $[\varphi(0), \varphi(1)]$  ( $\varphi'(x) > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ). Обратная задача сводится к решению функционального уравнения

$$\frac{c'(t)}{\mu(c(t))} + \frac{\varphi'(1-t)}{\mu(\varphi(1-t))} = 1, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

с запаздывающим аргументом. Выделены условия, при которых решение  $\mu(s)$  данного уравнения существует и единственно. При определенных условиях на известные функции  $\varphi(x)$ ,  $c(t)$  можно представить уравнение (2) как уравнение со сжимающим в окрестности точки  $s = \varphi(1)$  оператором. На этом свойстве построен численный метод, по которому на первом этапе итерационно вычисляется приближение к функции  $\mu(s)$  в окрестности значения  $\varphi(1)$ , а на втором полученное приближение с использованием уравнения (2) распространяется на всю область определения функции  $\mu(s)$ , а именно на отрезок  $[\varphi(0), \varphi(1)]$ . Установлено, что данный метод дает приближение  $\hat{\mu}(s)$  к точному решению  $\mu(s)$  с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$  при  $s \in [\varphi(0), \varphi(1)]$ , и для него построены оценка необходимой точности на первом этапе, гарантирующей получение заданного  $\varepsilon$ , и оценка объема требуемых вычислений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Thieme H. R.** Mathematics in population biology. Princeton: Princeton University Press, 2003.
2. **Webb G. F.** Nonlinear age-dependent population dynamics. New York: CRC Press, 1987.
3. **Денисов А. М., Макеев А. С.** Численные методы решения обратной задачи для модели популяции // Журнал. вычисл. матем. матем. физ. 2006. № 3. С. 490–500.
4. **Sinestrari E.** Non-linear age-dependent population growth // J. Math. Biol. 1980. V. 9. P. 331–345.

# Секция 2

---

## Теория некорректных задач



## ВНУТРЕННИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абдукаримов А., Шамсутдинова Н. Ш.

*Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, ул. Шохрух Мирзо, 47а, Самарканд, 140100 Узбекистан;*  
abdukarimov54@mail.ru, nodira237@gmail.com

Задачи определения решения дифференциальных уравнений (или систем уравнений) с частными производными в некоторой области по ее значениям на некотором множестве внутри области будем называть внутренними задачами. К внутренним задачам для дифференциальных уравнений приводят проблемы продолжения физических полей, так как реальные физические поля описываются решениями дифференциальных уравнений с частными производными. Например, аномалии гравитационного и магнитных полей удовлетворяют уравнению Лапласа, аномалия переменного электромагнитного поля в среде с постоянными свойствами удовлетворяет уравнению Гельмгольца и т.д. Характерной особенностью многих внутренних задач является их некорректность в классическом смысле. Поэтому при их исследовании используется подход, предложенный А. Н. Тихоновым [1]. При таком подходе априори предполагается существование решения задачи и принадлежность его некоторому заданному множеству. Основным моментом при доказательстве “условной корректности” задачи является получение теоремы единственности и оценки устойчивости на множестве корректности. Классическая внутренняя задача для дифференциальных уравнений — задача аналитического продолжения, по-видимому, впервые как некорректная задача была рассмотрена М. М. Лаврентьевым в работе [2]. Внутренние задачи для эллиптических уравнений рассмотрены в работах М. А. Лаврентьева и М. М. Лаврентьева, Ф. Йона, Р. Н. Педерсона, Ю. Н. Валицкого, С. П. Шишатского и др. Ряд результатов по исследованию внутренних задач для гиперболических уравнений получен в работах В. Я. Скоробогатько, Ф. Йона, Б. И. Пташника, Б. К. Амонова и др. Для параболических уравнений внутренние задачи рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева, Б. К. Амонова, С. П. Шишатского, Э. Р. Атаманова и др. В предлагаемой работе получены новые теоремы единственности для задач о продолжении решений с дискретных множеств бигармонического уравнения, уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом специального вида. Кроме этого, получены оценки условной устойчивости для внутренних задач для вышеуказанных уравнений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Е.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. **Лаврентьев М. М.** Количественное уточнение внутренних теорем единственности // Докл. АН СССР. 1956. № 5. С. 731–734.

## О ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Агеев А. Л., Антонова Т. В.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;*  
ageev@imm.uran.ru, tvantonova@imm.uran.ru

Рассматривается задача локализации (определения положения) линий, на которых функция двух переменных  $f(x, y)$  имеет разрыв первого рода; вне линий функция предполагается гладкой. Точная функция  $f$  неизвестна, а известны возмущённая функция  $f^\delta$  и уровень погрешности  $\delta$  такие, что  $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$ . Ясно, что рассматриваемая задача *некорректно поставлена*. Для прикладных задач в различных постановках (см., например, [1, 2]) предложено большое количество алгоритмов, позволяющих локализовать линии разрыва. Но, насколько известно авторам, первой работой, содержащей теоретические результаты по регуляризации задач локализации особенностей двумерной функции являлась статья [3].

Предлагается упрощённый теоретический подход: считается, что дополнительные условия на гладкость функции  $f$  и линии разрыва заданы в полосе  $D = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}\}$ , где  $\bar{\delta} > 0$  может быть как угодно мало. Функция  $f$  имеет разрывы первого рода по гладким линиям  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , которые в полосе  $D$  заданы однозначными функциями  $x = \gamma_i(y)$ . Исследуется задача локализации точек  $x_i$  пересечения линий разрыва  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , с линией  $y = \bar{y}$ .

Построены методы локализации, которые определяют количество особенностей  $l$  и находят приближения  $x_i^\delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , для точек  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , с оценками точности аппроксимации  $|x_i - x_i^\delta| \leq C\delta$ .

Техника исследования существенно опирается на методы локализации разрывов первого рода зашумлённой функции одного переменного [4]. Однако, двумерность возмущения  $f - f^\delta$  требует модификации методов и приводит к новым эффектам по сравнению со случаем функций одной переменной.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00106).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Ред. Я. А. Фурман. М.: Физматлит, 2002.
3. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. Т. 15, № 1. С. 3–13.
4. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1362–1370.

## ОБ ОЦЕНКЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ФУРЬЕ — РИССА

Арбузов Э. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр-т акад. Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
arbuzov@math.nsc.ru*

Пусть  $\Omega$  ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . Для  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $|a| = 1$ , определим оператор

$$I_{\tau,a}^\alpha u(x) = \int_{\Omega} e^{i\tau a \cdot y} \frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy. \quad (1)$$

Показано, что данный оператор будет сжимающим в пространстве риссовых потенциалов  $L_{pq}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ , которое определяется с помощью дробного интегрирования по Риссу.

Следуя работе [1], определим риссову производную  $D^\alpha$  равенством

$$D^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (2)$$

где  $l$  — любое целое число, большее чем  $2[\alpha/2]$ , если  $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$ , и  $l = \alpha$ , если  $\alpha = 1, 3, 5, \dots$  (при данном выборе  $l$  нормировочный множитель  $d_{n,l}(\alpha) \neq 0$ ). Конечные разности определяются по формуле  $(\Delta_y^l f)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k f(x - ky)$ .

**Определение.** Для  $1 < p < \infty$ ,  $1 < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \infty$ , определим класс функций  $L_{pq}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ :

$$L_{pq}^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f(x) \in L_q(\mathbb{R}^n), \quad D^\alpha f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Это пространство будет полным относительно нормы определяемой выражением  $\|f\|_{L_{pq}^\alpha} = \|f\|_{L_q} + \|D^\alpha f\|_{L_p}$ .

Основной результат работы приведен в следующем утверждении.

**Теорема.** Пусть  $\alpha < n/2$ ,  $1 < p < n/\alpha$ ,  $p_\alpha = np/(n - \alpha p)$ . Тогда при  $\beta < \alpha$

$$\|I_{\tau,a}^\alpha u\|_{L_{pp_\alpha}^\alpha} \leq \frac{c}{\tau^\beta} \|u\|_{L_{pp_\alpha}^\alpha}. \quad (3)$$

Ранее, для интегрального оператора Коши вида

$$P_\tau u(x) = \int_{\Omega} e^{i\tau \varphi(y)} \frac{u(y)}{x-y} dy, \quad \Omega \subset \mathbb{C}, \quad (4)$$

соответствующие оценки были установлены в пространствах Гельдера и Лебега. На основании полученных свойств оператора  $P_\tau$  в работе [2] была доказана формула типа Карлемана для решения задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости, а в работе [3] решена обратная задача восстановления потенциала по данным Коши для уравнения  $\Delta u + au = 0$ .

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00147).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самко С. Г.** О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143–1172.
2. **Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л.** Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 518–526.
3. **Bukhgeim A. L.** Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, N 1. P. 19–33.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Асанов А.<sup>1</sup>, Каденова З. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кыргызско-Турецкий университет Манас, проспект Мира, 56, Бишкек, 720044  
Кыргызстан; avyt.asanov@mail.ru

<sup>2</sup>Ошский государственный социальный университет, ул. Айтиева, 27, Ош,  
714000 Кыргызстан; kadenova71@mail.ru

Рассмотрим уравнения вида

$$Ku = f(t, x), \quad (t, x) \in G = \{(t, x) \in R^2: t_0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b\}, \quad (1)$$

где

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, x, y)u(t, y) dy + \int_{t_0}^T H(t, x, s)u(s, x) ds \\ + \int_{t_0}^T \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y) dy ds,$$

$K(t, x, y)$ ,  $H(t, x, s)$ ,  $C(t, x, s, y)$  — известные функции,  $f(t, x)$  и  $u(t, x)$  — соответственно известная и неизвестная функции.

Различные вопросы для систем интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1–4]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [4], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В данной работе доказывается единственность решений интегральных уравнений (1) в пространстве  $L_2(G)$  и получена оценка устойчивости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Aparstyn A. S.** Nonclassical linear Volterra equations of the first kind. Utrecht: VSP, 2003.
2. **Asanov A.** Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. Utrecht: VSP, 1998.
3. **Bukhgeim A. L.** Volterra equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. **Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P.** Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Providence: AMS, 1986.

## ONE CLASS SYSTEM OF NON-LINED INTEGRAL EQUATION OF FREDHOLM OF FIRST TYPE

Asanov A.<sup>1</sup>, Saparova G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Kyrgyz-Turkish University “Manas”, Bishkek*  
<sup>2</sup>*Osh Technological University, Osh; 141005@mail.ru*

Consider the system

$$\int_a^t H(s)u(s) ds + \int_t^b N(s)u(s) ds + \int_a^t K(t, s, u(s)) ds = g(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

where  $(s), N(s), K(t, s, u(s)) - n \times n -$  measured matrix functions for  $[a, b]$ ,  $g(t)u u(t)$  – known and unknown vector – functions. On a level with system (1) well consider the system

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_a^t H(s)v(s, \varepsilon) ds + \int_t^b N(s)v(s, \varepsilon) ds + \int_a^t K(t, s, v(s, \varepsilon)) ds = g(t) + \varepsilon u(a), \quad (2)$$

where  $u(t) -$  decision of the system (1),  $0 < \varepsilon -$  small parameter.

**Theorem 1.** *Let for any  $t \in [a, b]$   $\det[(t) - N(t)] \neq 0$ , for any  $u_1, u_2$  equitable the mark  $|K(t, s, u_1) - K(\tau, s, u_1) - K(t, s, u_2) + K(\tau, s, u_2)| \leq M_1(t - \tau)(u_1 - u_2)M_1 = \text{const} > 0$ . Then the system (1) has a single decision, if  $g(0) = \int_a^b N(s)u(s) ds$ .*

Let  $M(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_a^b N(s)I_n e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} ds, \varepsilon > 0, \forall (t, u) \in [a, b] \times R : K(t, t, u) = 0, K(t, s, 0) = 0, N_0 = \sup \|N(t)\|$ .

**Theorem 2.** *If the conditions of the theorem carried out 1 and  $M_0 = (I_n - M(\varepsilon))^{-1} > 0, N_1 = M_0 M_1 N_0 (b - a) e^{M_1(b-a)} < 1$ , then if has the place of mark*

$$\int_a^b |v(t, \varepsilon) - u(t)| dt \leq \frac{1}{(1 - N_1)} (M_0 N_0 L \varepsilon (b - a) + L \varepsilon t) e^{M_1(b-a)}$$

and  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_{L(a,b)} = 0$ .

**ONE CLASS SYSTEM  
OF NON-LINED INTEGRAL EQUATION  
OF FREDHOLM OF FIRST TYPE**

Ashirbaeva A. Zh.

*Osh, Kyrgyz Republic; gulya141005@mail.ru*

Considered nonlinear integro-differential equation of the type

$$\begin{aligned}
 u_{tttt} - 2u_{ttxx} + u_{xxxx} &= d(t, x, u)[u_{ttt} - u_{xxt}] + f(t, x, u)[u_{ttx} - u_{xxx}] \\
 &+ a(t, x, u)[u_{tt} - u_{xx}] + b(t, x, u)u_t + c(t, x, u)u_x + F(t, x, u), \quad (1) \\
 (x, t) &\in Q(T) = \{0 \leq t \leq T, \quad x \in R\},
 \end{aligned}$$

where  $F(t, x, u) = \psi(t, x, u) + \int_0^t K(t, s)u(s, x) ds$ , with initial condition

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \quad x \in R. \quad (2)$$

We shall mark through  $C_b^{(k)}$  a class function, unceasing and limited along with their own (the quotient) derived before  $k$ th order.

**Theorem.** Let  $u_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$ ,  $k = 0, 1, 2$ ,  $a, b, A, d, f, \psi \in C_b^2(Q(T) \times R)$  and satisfy Lipschitz condition on variable  $u$ ,  $K(t, s) \in C(G)$ ,  $G = 0 \leq s \leq t \leq T$ ,  $\int_0^T |K(t, s)| ds \leq \gamma = \text{const}$ . Then problem (1), (2) has a single decision in space  $G_b^4(Q(T^*))$ , where  $T^*$  is defined from raw datas.

## ПОЛИХРОМАТИЧЕСКИЙ ИНДИКАТОР НЕОДНОРОДНОСТИ НЕИЗВЕСТНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Балакина Е. Ю.

*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия;  
issc2009@gmail.com*

Рассматривается процесс переноса частиц в рассеивающей и поглощающей среде, в качестве математической модели которого взято линейное интегродифференциальное уравнение.

Решена прямая задача, заключающаяся в реконструкции радиационного поля при известных характеристиках среды, то есть в нахождении плотности потока частиц при известных входящем потоке и коэффициентах уравнения. В работе показано, что при некоторых ограничениях на среду решение задачи существует, единственно и представляется в виде бесконечной суммы.

Ставится и исследуется задача рентгеновской томографии, являющаяся обратной задачей для дифференциального уравнения переноса. При этом учитывается поглощение частиц средой и их однократное рассеяние. Постановка проблемы соответствует поэтапному зондированию неизвестной среды, что обычно имеет место на практике. Еще одним шагом в сторону реалистичности задачи является использование в качестве известных данных интегралов по энергии от плотности выходящего потока излучения как это принято в томографии, в отличие от задания плотности потока для каждого уровня энергии. Искомым объектом являются поверхности разрывов коэффициентов уравнения, что соответствует поиску границ между различными веществами, входящими в состав зондируемой среды.

Для решения задачи строится функция, которая может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности. Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях и при условии, гарантирующем существование искомого поверхностей. Доказательство имеет отчетливо конструктивный характер и пригодно для построения численного алгоритма.

Также ставится и исследуется задача рентгеновской томографии, соответствующая поэтапному и послойному зондированию неизвестной среды. Постановка задачи отличается от рассмотренной выше тем, что измерение плотности выходящего потока производится в плоскости. Здесь также доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00384-а, 11-08-00286-а) и поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Anikonov D. S., Nasarov V. G., Prokhorov I. V. Poorly visible media in X-ray tomography. Boston, 2002.
2. Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров Н. В. Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
3. Балакина Е. Ю. Неклассическая краевая задача для уравнения переноса // Дифф. уравнения. Т. 45, № 9. С. 1219–1228.



## ON AN OPERATOR VOLTERRA EQUATION OF FIRST KIND

**Begmatov A. H.**

*Novosibirsk state technical university,  
prosp. K. Marksa, 20, Novosibirsk, 630092 Russia;  
begah@ngs.ru*

Let  $x \in R^n$ ,  $\xi \in R^n$  ( $n = 1, 2$ ),  $y \in R$ . Let us consider a family of manifolds  $\{V(x, y)\}$  in the layer  $L = \{(x, y): 0 \leq y \leq H, 0 < H < \infty\}$ . Manifolds  $V(x, y)$  are uniquely parametrized by their vertices  $(x, y)$ .

**Statement of the problem.** Consider an operator equation with respect to a function  $u(x, y)$  in the layer  $L$ :

$$\iint_{V(x,y)} g(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) dS = f(x, y). \quad (1)$$

Equation (1) is an operator Volterra of the first kind [1]. We consider the case when  $V(x, y)$  is a part of  $(n + 1)$ -dimensional space which is bounded by the surface of the cone  $K(x, y) = \{(\xi, \eta): y - \eta = |x - \xi|, 0 \leq \eta \leq y\}$  and the hyperplane  $y = 0$ .

We prove uniqueness for a solution to equation (1) for some special weight functions. We obtain also stability estimates for solution to problem (1) in the Sobolev spaces and existence theorems.

The author was partly supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation under grant N 16.740.11.0057.

### REFERENCES

1. **Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishtskii S. P.** Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Providence: AMS, 1986.

## ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ В $n$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бегматов Акр. Х., Очиллов З. Х.

*Самаркандский государственный университет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140100 Узбекистан;  
akrambegmatov@mail.ru*

В работе рассматривается задача восстановления функции в  $n$ -мерном пространстве, если известны интегралы от нее по одному семейству прямых, являющихся образующими конусов. Подобного вида интегральные преобразования называются лучевыми преобразованиями [1] и имеют широкое приложение при исследовании задач компьютерной томографии [2].

Задача, которая изучается в настоящей работе, связана со вспомогательными задачами аналитического продолжения и является сильно некорректной в смысле определения, данного М. М. Лаврентьевым [3]. Задача интегральной геометрии по образующим двуполостных конусов в трехмерном пространстве исследовалась в работах Акр. Х. Бегматова [4, 5].

По данным задачи, зависящим от  $n$  пространственных переменных и угла поворота прямой, по которой ведется интегрирование, необходимо восстановить функцию  $n$  пространственных переменных. Показано, что исследуемая задача интегральной геометрии, не является переопределенной. Доказана теорема единственности в классе непрерывных финитных функций и получена оценка условной устойчивости решения задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хелгассон С. Преобразования Радона. М: Мир, 1983.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Москва, 1990.
3. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
4. Бегматов Акр. Х. Задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве по конусам и образующим // Докл РАН. 1998. Т. 358, № 6. С. 727–728.
5. Бегматов Акр. Х. О некоторых задачах интегральной геометрии в полосе и задача обратная лучевому преобразованию с неполными данными // Докл РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 295–298.

## ОТОБРАЖЕНИЯ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Бегматов А. Х., Очиллов З. Х., Бурхонов Ш. М.

*Самаркандский государственный университет, университетский бульвар, 15,  
Самарканд, 140100 Узбекистан; akrambegmatov@mail.ru*

Под обратными задачами томографии мы понимаем математические задачи, связанные с интерпретацией томографических данных. Первая качественная томограмма головного мозга человека была получена в 1972 г. Впоследствии томография нашла весьма широкое применение в медицине. Получили развитие также промышленная томография, томография в газовой динамике и в физике плазмы, сейсмическая томография.

Как известно, двумерное стационарное до звуковое течение идеального газа они описывается системой эллиптических уравнений, а сверхзвуковое — системой гиперболических уравнений.

В работах [1, 3] отображения плоских областей, осуществляемые решениями системы гиперболических уравнений, а именно системой Даламбера, названные  $h$ -конформными отображениями. М. М. Лаврентьев называет эти отображения просто отображениями Даламбера [1]. Гиперболическими отображениями названы отображения, осуществляемые решениями систем гиперболических уравнений. В [2] исследовано отображение симметричных областей и рассмотрена соответствующая ей обратная задача.

При изучении отображений одним из центральных вопросов является вопрос о возможности отображения областей определенного класса на некоторые канонические области. Для конформных отображений односвязных областей классическим результатом в этом направлении является теорема Римана.

Исследовано отображения областей, ограниченных жордановыми кривыми. Получена теорема о возможности отображения на каноническую область для одного класса ограниченных областей, несимметричных относительно оси ординат и абсцисс.

Сформулирована соответствующая обратная задача и доказана теорема единственности ее решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Александрян Р. А.** Об одной задаче Соболева для специальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 4. С. 631–634.
2. **Бегматов Акр. Х., Очиллов З. Х.** Отображения Даламбера для одного класса симметричных областей // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 3. С. 1–2.
3. **John F.** The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. V. 63, N 1. P. 141–154.

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ НА СЕМЕЙСТВЕ “ДВУСТОРОННИХ” КРИВЫХ

Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.

*Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630092 Россия;*  
akbar\_begmatov@mail.ru, azik.8622@mail.ru, abat\_1984@inbox.ru

Изучается задача восстановления функции в полосе по известным интегралам от нее с заданной весовой функцией вдоль кривых заданного семейства. Кривые, по которым ведется интегрирование, гладкие и однозначно параметризуются координатами своих вершин. Весовая функция положительна, отделена от нуля и также имеет конечную гладкость по всем переменным.

Пусть  $\{L(x, y)\}$  — семейство кривых в  $R^2$ , кривая семейства определяется соотношениями

$$L_1 = \{(\xi, \eta): y - \eta = (x - \xi)^2, -\infty < \xi < x, -\infty < \eta < y\} \\ \cup \{(\xi, \eta): \eta - y = (x - \xi)^2, x < \xi < \infty, y < \eta < \infty\}$$

или

$$L_2 = \{(\xi, \eta): y - \eta = \sqrt{x - \xi}, -\infty < \xi < x, -\infty < \eta < y\} \\ \cup \{(\xi, \eta): \eta - y = \sqrt{\xi - x}, x < \xi < \infty, y < \eta < \infty\}.$$

**Постановка задачи:** Восстановить функцию двух переменных  $u(x, y)$ , если известны интегралы от нее с заданной весовой функцией  $g(x, \xi)$  на семействе кривых  $\{L(x, y)\}$ :

$$\int_{L(x,y)} g(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) ds = f(x, y). \quad (1)$$

Здесь  $ds$  — элемент длины дуги кривых  $\{L(x, y)\}$ .

В работе применяются методы интегральных преобразований и интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма. Доказаны теоремы единственности решения рассмотренных задач. Получены оценки устойчивости в пространствах соболевского типа.

## СЛАБО НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ

Бегматов А. Х., Уринбоев Ф. Ш.

*Самаркандский государственный университет, Университетский бульвар, 15,  
Самарканд, 140100 Узбекистан; akrambegmatov@mail.ru*

В настоящей работе нами исследуется новый класс задач интегральной геометрии вольтеревского типа. Доказана теорема единственности, выведена формула обращения и получена оценка устойчивости в пространствах конечной гладкости, что говорит о том, что поставленная задача слабо некорректна.

Введем обозначения, которые будем использовать:

$$(x, y) \in R^2, \quad (\xi, \eta) \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1. \quad (1)$$

Пусть  $\{P(x, y)\}$  — семейство парабол в  $R_+^2$ . Произвольная кривая семейства  $P(x, y)$  определяется соотношениями

$$P(x, y) = \{(\xi, \eta): (y - \eta) = (x - \xi)^2, 0 \leq \eta\}.$$

**Задача 1.** Определить функцию двух переменных  $u(x, y)$  если  $(x, y) \in R_+^2$  известны интегралы от функции  $u(\cdot)$  по кривым  $P(x, y)$ :

$$\int_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} g(x, \xi) u(\xi, \psi(x, y, \xi)) d\xi = f(x, y),$$

где  $g(x, \xi) = |x - \xi| = (x - \xi) \operatorname{sgn}(x - \xi)$ .

Функция  $u(x, y)$  — функция из класса  $U$ , которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в  $R_+^2$ :

$$\operatorname{supp} u \subset D = \{(x, y): -a < x < a, 0 < a < \infty, 0 < y < l, l < \infty\}.$$

Введем следующие функции:

$$I = \int_0^\infty e^{i\mu\tau} \sin \lambda\sqrt{\tau} d\tau, \quad I_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu y} \frac{d\mu}{(1 - \mu^4)I(\lambda, \mu)},$$

$$I_2(x - \xi, y - \eta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \frac{I_1(\lambda, y)}{1 + \lambda^4} d\lambda.$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $y \geq 0$ . Тогда решение задачи 1 в классе  $U$  единственно, имеет место представление

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x - \xi, y - \eta) \left(E + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) \left(E + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2} \leq C \|f\|_{W_2^2(R_+^2)}$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОРОДНОСТИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ВОЛЬФА

Бондаренко М. А.

*Новосибирский государственный технический университет,  
Новосибирск, Россия;  
bondarenko87@gmail.com*

В работе приведены результаты нелинейного анализа методами хаотической динамики однородности временного ряда, порожденного измерением солнечной активности за последние 350 лет. Изложены некоторые способы оптимизации вычислительных нагрузок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00105 а) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный интеграционный проект СО РАН, 2012, № 14).

## О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Бредихина А. Б., Танана В. П.

*Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск,  
454080 Россия; bredikhina-ann@yandex.ru, tvpa@susu.ac.ru*

Нелинейным методом проекционной регуляризации [1] решена задача восстановления фоновых спектров по термодинамическим функциям при условии кусочной гладкости искомого решения.

Постановка задачи восстановления энергетического спектра по экспериментальным данным принадлежит И. В. Лифшицу [2], а решение данной обратной задачи сводится к решению уравнения типа свертки

$$Au = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau - t)u(t) dt = f(\tau), \quad (1)$$

где  $f(\tau)$  и  $u(t)$  из  $L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ , а  $\|f_\delta(\tau) - f_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta$ . Кроме того дополнительно предположим, что  $u_0(t)$  — четная, а  $u'_0(t)$  имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода, отличных от нуля и  $u'_0(t) \in W_2^{1/2-\varepsilon/2}(-\infty, \infty)$ , но  $u'_0(t) \notin W_2^{1/2}(-\infty, \infty)$ .

Применяя преобразование Фурье к уравнению (1), получим

$$\hat{A}\hat{u}(p) = K(p)\hat{u}(p) = \hat{f}(p), \quad (2)$$

где

$$K(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{ipx} dx.$$

Регуляризующее семейство операторов  $\{P_\alpha: \alpha > 0\}$ , определим формулой

$$P_\alpha \hat{f}(p) = \begin{cases} K^{-1}(p)\hat{f}(p), & p \leq \alpha, \\ 0 & p > \alpha, \end{cases}$$

а параметр регуляризации  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{f}_\delta, \delta)$  определим из уравнения  $\|\hat{A}\hat{u}_\delta^\alpha(p) - \hat{f}_\delta(p)\| = 3\delta$ , которое разрешимо при условии  $\|\hat{f}_\delta\| > 3\delta$ . Таким образом, приближенное решение  $\hat{u}_\delta(p)$  уравнения (2)

$$\hat{u}_\delta(p) = \hat{u}_\delta^{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta, \delta)}(p) = P_{\hat{\alpha}(\hat{f}_\delta, \delta)} \hat{f}_\delta(p).$$

В работе показано, что при достаточно малых значениях  $\delta$  справедлива оценка

$$\|\hat{u}_\delta(p) - \hat{u}_0(p)\| \leq 24 e^{3d} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-3/2} \left( \frac{1}{\delta} \right),$$

где  $d$  — некоторое число.

Работа поддержана грантом р.урал.а (проект 10-01-96000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Танана В. П., Бредихина А. Б., Камалтдинова Т. С. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 281–288.
2. Лифшиц И. М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости // ЖЭТФ. 1954. Т. 26, № 5. С. 551–556.
3. Иверонова В. И., Тихонов А. Н., Заикин П. Н., Звягина А. П. Определение фонового спектра кристаллов по теплоемкости // ФТТ. 1966. Вып. 12. С. 3459–3462.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ $R$ -ЗАДАЧА КОШИ И $l$ -КОРРЕКТНОСТЬ

Вдовин М. В.

*Центр классического образования УрФУ, пр. Ленина, 51,  
Екатеринбург, 620083 Россия; vdm@rambler.ru*

Регуляризация при решении некорректной задачи Коши в пространстве  $E_p = (L_p(\mathbb{R}^n))^m$ ,  $p \geq 1$ , для систем линейных однородных дифференциальных уравнений может быть осуществлена путем перехода к задаче

$$u'_{\alpha(\delta)}(t) = A(i \frac{\partial}{\partial x})u_{\alpha(\delta)}(t), \quad t \in [0, T], \quad u_{\alpha(\delta)}(0) = K_{\alpha(\delta)} * f_{\delta}, \quad (1)$$

где  $\{K_{\alpha}, \alpha > 0\} \subset E_1$  —  $\delta$ -образное семейство вектор-функций, подбираемое в обеспечение необходимой гладкости для начального условия и тем самым корректности задачи (1) [1].

При постановке задачи (1) в форме абстрактной задачи в банаховом пространстве

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = Rf,$$

особый интерес вызывает  $R$ -задача Коши — случай, когда семейство операторов решения образует  $R$ -полугруппу (регуляризующую полугруппу).  $R$ -полугруппа является обобщением полугруппы класса  $C_0$  [1], поэтому для  $R$ -задачи Коши имеют место обобщения результатов (полученных для случая полугруппы класса  $C_0$  [2]), касающиеся вопросов решения задачи (1) разностными методами. Если вектор-функция  $K_{\alpha}$  в (1) обеспечивает обратимость порождаемого ею оператора покомпонентной свертки на пространстве  $E_p$ ,  $p \geq 1$ , то задача (1) становится  $R$ -задачей Коши.

Обозначим  $l$  функционал, заданный на линейном пространстве  $\text{Dom } l$  и обладающий свойствами полунормы. В [3] рассмотрены методы решения некорректных задач, основанные на идеи  $l$ -корректности.

**Определение.** Задача  $Bv = f$  называется  $l$ -корректной, если для каждого  $\alpha > 0$  существует положительная постоянная  $M(\alpha)$  такая, что для всех  $v \in \text{Dom } l \cap \text{Dom } B$  имеет место оценка

$$\|v\|_E \leq \alpha l(v) + M(\alpha) \|Bv\|_F \quad (B : \text{Dom } B \subset E \rightarrow F).$$

Обозначим  $C([0, T]; E_2)$  пространство непрерывных на отрезке  $[0, T]$  отображений  $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow E_2$ ;  $\mathcal{M}$  класс корректности дифференциальной задачи Коши в пространстве  $E_2$ , состоящий из точных решений, удовлетворяющих условию  $\|\frac{\partial}{\partial x_k} u(\cdot)\|_C < \infty$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

**Теорема.** Для дифференциальной  $R$ -задачи Коши выполняется условие  $l$ -корректности: для каждого  $\alpha > 0$  существует положительная постоянная  $M(\alpha)$  такая, что для всех  $u(\cdot) \in \mathcal{M}$  имеет место оценка

$$\|u(\cdot)\|_C \leq \alpha \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} u(\cdot) \right\|_C + M(\alpha) \|f\|_2;$$

при этом  $M(\alpha) = O(1/\alpha^{r(m-1)})$  при  $\alpha \rightarrow 0$  в случае систем корректных по Петровскому,  $M(\alpha) = O(e^{c(T)}/\alpha^h)$  при  $\alpha \rightarrow 0$  в случае условно-корректных систем ( $r$  — порядок системы,  $0 < h < 1$ ) [4].



Работа поддержана Программой Минобрнауки РФ № 1.1016.2011 и грантом РФФИ № 10-01-96003р.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Melnikova I. V., Anufrieva U. A.** Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators // J. Math. Sciences. 2008. V. 148, N 4. P. 481–632.
2. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
3. **Бухгейм А. Л.** Разностные методы решения некорректных задач. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.
4. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

## ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В $L_1$

Воронин А. Ф.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
voronin@math.ru*

В работе будет рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра первого рода в свертках в скалярном и векторном случаях на конечном интервале, а также многомерное интегральное уравнение Вольтерра первого рода в свертках на многомерном ограниченном интервале в  $R^m$ . Рассмотрения начнем со следующего одномерного случая на конечном интервале  $(0, b)$ :

$$\int_0^t k(t-s)u(s) ds = f(t), \quad t \in (0, b), \quad (1)$$

где

$$k \in L_{n \times n}(0, b), \quad f \in L_{n \times 1}(0, b), \quad b > 0, \quad (2)$$

$L_{n \times l}$  — пространство  $n \times l$  матриц-функций с элементами из  $L_1$ . Кроме того, на ядро  $k$  будем накладывать дополнительное к (2) ограничение, которое носит интегральный характер. В скалярном случае,  $n = 1$ , оно имеет следующий вид,

$$k_1(t) := \int_0^t k(s) ds = t^\alpha L_0(t) + o(t^\alpha), \quad t \rightarrow +0, \quad (3)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $L_0$  — непрерывная на  $(0, b)$  функция, медленно меняющаяся в нуле [1, с. 317], причем,  $|L_0(+0)| > 0$ . Решение  $u$  задачи (1)–(3) ищем в  $L_{n \times 1}(0, b)$ .

Основным результатом работы является следующая теорема об эквивалентности, приведем ее в скалярном одномерном случае.

**Теорема (эквивалентности).** *Задача (1)–(3) эквивалентна интегральному уравнению Абеля,*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds = g(t), \quad t \in (0, b), \quad \alpha > 0,$$

где

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial t} (e^{at} F(t)) \in L_1(0, b), \quad F(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}f(x+ia)}{-i(x+ia)\Lambda_\alpha(x+ia)} \right\} (t), \quad t \in (0, b),$$

$$\Lambda_\alpha(p) := (-ip)^{1+\alpha} \int_0^b e^{ipt} k_1(t) dt, \quad \mathcal{F}f(p) = \int_0^b e^{ipt} f(t) dt,$$

$a$  — некоторая положительная постоянная.

Теорема (эквивалентности) позволила найти необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3), построить явную формулу для ее решения в  $L_1$ , получить оценку устойчивости решения по правой части  $f$ .

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 10-01-00384).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер И. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

**РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОПИ  
ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА  
ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ФАКТОРИЗУЕМЫМ  
ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ТРЕХМЕРНОЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

**Жураев Д. А.**

*Самаркандский Государственный Университет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140104 Узбекистан;  
davron-1222@mail.ru*

Пусть  $\mathbb{R}^3$  — трехмерное вещественное евклидово пространство,  $G \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная односвязная область, граница которой состоит из компактной части  $T$  плоскости  $y_3 = 0$  и гладкого куска поверхности  $S$  ( $S \in C^1$ ), лежащей на полупространстве  $y_3 > 0$ .

Обозначим через  $A_{l \times n}(p(x), x)$  ( $l, n \geq 2$ ) класс матриц  $D(x^T)$  с элементами, состоящими из линейных функций с постоянными коэффициентами комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , для которых выполняется условие:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 + \lambda^2)u^0,$$

где  $D^*(x^T)$  — эрмитова сопряженная матрица  $D(x^T)$ ,  $\lambda$  — вещественное число.

Рассмотрим в области  $G$  систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \quad (1)$$

где  $D(x^T) \in A_{l \times n}(p(x), x)$  — характеристическая матрица. Обозначим через  $H(G)$  класс вектор-функций в области  $G$ , непрерывные на  $\bar{G} = G \cup \partial G$  и удовлетворяющую систему (1).

**Задача.** Пусть  $U(y) \in H(G)$  и

$$U(y)|_S = f(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

где  $f(y)$  — заданная, непрерывная вектор-функция на поверхности  $S$ .

Требуется восстановить вектор-функцию  $U(y)$  в области  $G$ , исходя из значений  $f(y)$ .

Пусть  $U(y) \in H(G)$  и вместе  $U(y)$  на  $S$  задано ее приближение  $f_\delta(y)$ , соответственно, с уклонением  $0 < \delta < e^{-\sigma \bar{y}_3^2}$ ,  $\max_S |U(y) - f_\delta(y)| \leq \delta$ . Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(y, x) f_\delta(y) ds_y, \quad x \in G. \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть  $U(y) \in H(G)$  на части плоскости  $y_3 = 0$  удовлетворяет неравенству  $|U(y)| \leq 1$ ,  $y \in T$ , тогда справедливо следующая оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x)\sigma\delta e^{x_3^2/\bar{y}_3^2}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G, \quad (4)$$

где  $C(x)$  — некоторая функция, зависящая от  $x$ .

**Следствие.** *Предельное равенство  $\lim_{\delta \rightarrow 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x)$  имеет место равномерно, на каждом компакте из области  $G$ .*

Таким образом, функционал  $U_{\sigma\delta}(x)$  является регуляризацией задачи (1), (2) [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярмухамедов Ш.** Регуляризация по Лаврентьеву решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца // Докл. АН РУз. 2001. № 3. С. 6–8.

## О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА

**Иманалиев М. И.<sup>1</sup>, Асанов А.<sup>2</sup>, Асанов Р. А.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной математики НАН КР,  
просп. Чуй, 265а, Бишкек, 720071 Кыргызстан*

<sup>2</sup>*Кыргызско-Турецкий университет Манас, просп. Мира, 56,  
Бишкек, 720044 Кыргызстан; avyt.asanov@mail.ru*

<sup>3</sup>*Кыргызский государственный технический университет,  
просп. Мира, 66, Бишкек, 720044 Кыргызстан; ruhidin.asanov@yahoo.com*

Рассмотрим следующие нелинейные интегральные уравнения третьего рода

$$p(x)u(x) = \lambda \int_a^b k(x, y, u)dy + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

где  $\lambda$  — параметр,  $\lambda \neq 0$ ,  $p(x)$  и  $f(x)$  — известные непрерывные на  $[a, b]$  функции,  $p(x) \neq 0$  при всех  $x \in (a, b]$ ,  $k(x, y, u)$  — известные непрерывные функции на  $G \times R$ ,  $G = [a, b] \times [a, b]$ ,  $u(x)$  — искомая непрерывная на  $[a, b]$  функция,  $p(a) = 0$ ,

$$p(x) = \prod_{i=1}^m p_i(x), \quad p_i(a) = 0, \quad p_i(x) \in C[a, b],$$

$$k(x, y, u(y)) = k(x, y)u(y) + \sum_{j=1}^S \alpha_j(x)Q_j(y, u(y)), \quad s \in N.$$

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались во многих работах [1–4]. В частности, в работе [4] предложен новый подход к исследованию системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. На основе обобщения этого подхода в данной работе доказаны теоремы единственности и существования решения для нелинейных интегральных уравнений (1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М.** Об интегральных уравнений первого рода // ДАН. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
2. **Иманалиев М. И., Асанов А.** О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // ДАН. 2010. Т. 430, № 6. С. 734–737.
3. **Магницкий Н. А.** Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 970–989.
4. **Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А.** Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // ДАН. 2011. Т. 437, № 5. С. 592–596.

## О ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛАПЛАСОВА ПОЛЯ

Ишанкулов Т. И., Мардонов Ж. А.

Самаркандский госуниверситет,  
 Университетский бульвар, 15, Самарканд, 141129 Узбекистан;  
 itolib@rambler.ru

В трехмерном Евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим Лапласово поле  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1, F_2, F_3)$ , которое удовлетворяет системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

по координатам вектора  $\mathbf{r}(x, y, z)$ .

Пусть  $D_i$  область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  ограниченная кусочно-гладкой замкнутой поверхностью  $S$  и  $D_e$  внешняя неограниченная область, то есть  $D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_i}$ .

Когда  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  заданный вектор на  $S$ , выражение

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (\mathbf{n}\mathbf{f}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dS \quad (2)$$

называется интегралом типа Коши для системы (1). Интеграл типа Коши  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  представленная формулой (2) в каждой точке  $\mathbf{r} \notin S$  является решением системы (1). Обозначим через  $\mathbf{F}^i(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{F}^e(\mathbf{r})$  значения интеграла (2) в области  $D_i$  и  $D_e$  соответственно. Условие обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши есть соотношение

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} \mathbf{F}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S, \quad \mathbf{r} \in D_i. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — гомоморфная сфере замкнутая поверхность Ляпунова,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}')$  заданная на  $S$  вектор функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Для того, чтобы интеграл типа Коши (2) обращался в интеграл Коши необходимо и достаточно чтобы  $\mathbf{F}^e(\mathbf{r}) \equiv 0$  в области  $D_e$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. для того, чтобы интеграл типа Коши для системы (1) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно, чтобы для всех гармонических полиномов  $H(\mathbf{r}')$  от переменных  $x', y', z'$  выполнялось равенство

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (\mathbf{n}\mathbf{f}) \operatorname{grad} H(\mathbf{r}') + (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) \times \operatorname{grad} H(\mathbf{r}') \right\} dS = 0.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Жданов М. С.** Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984.
2. **Соломонцев Е. Д.** Об основной формуле Грина для гармонических функций // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 6. С. 1432–1434.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЬ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ДУГЕ ГРАНИЦЫ ЭТОЙ ОБЛАСТИ

**Ишанкулов Т., Хатамов И.**

*Самаркандский госуниверситет, Университетский бульвар, 15,  
Самарканд, 140129 Узбекистан;  
itolib4591@mail.ru, i.hatamov@mail.ru*

В работе Фока–Куни [1] обсуждался вопрос о существовании голоморфного продолжения с гладкой кривой вплоть до заданной прямой. В работе [2] приведен критерий голоморфной продолжимости с гладкой кривой до заданной окружности. В данной заметке рассматривается задача голоморфного с гладкой кривой до заданного эллипса.

Образом окружности  $\{W: |W| = R\}$  ( $R > 1$ ) при отображении  $W \rightarrow (W + 1/W)/2$  служит эллипс  $E_R$  с полуосями  $a = (R + 1/R)/2$  и  $b = (R - 1/R)/2$ . Пусть  $G_R$  — внутренность эллипса  $E_R$ . Обозначим через  $\Gamma$  гладкую кривую соединяющую две точки эллипса  $E_R$ , лежащую в  $G_R$  и непересекающую отрезок  $[-1; 1]$ . Кривая  $\Gamma$  разбивает область  $G_R$  на две области и  $\Omega_R$  та часть  $G_R$ , которая не содержит отрезок  $[-1; 1]$ . Считаем, что  $\Gamma$  ориентирована как часть границы  $\partial\Omega_R$ . Обозначим

$$a_k = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Теорема.** Если  $f \in C(\Gamma) \cap L_1(\Gamma)$ , то для существования такой функции  $F \in A(\Omega_R) \cap C(\Omega_R \cup \Gamma)$ , что  $F|_{\Gamma} = f$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Фок В. А., Куни Ф. М.** О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.
2. **Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.** О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.

## GENERALIZATION OF GRANGEAT’S FORMULA TO VECTOR FIELDS

Kazantsev S. G.<sup>1</sup>, Schuster Th.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, prosp. Acad. Koptuyug, 4, Novosibirsk,  
630090, Russia; kazan@math.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Department of Mathematics, Carl von Ossietzky Universitat Oldenburg,  
26111 Oldenburg, Germany; thomas.schuster@uni-oldenburg.de*

This paper deals with a generalization of Grangeat’s formula to vector fields. Recall that in the scalar 3D tomography Grangeat’s formula [2] gives the fundamental relation between the cone beam transform  $Df$  and the first derivative of the Radon transform  $\mathcal{R}f$ ,

$$\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}f](s, \boldsymbol{\eta}) \Big|_{s=\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} = - \int_{\mathbb{S}^2} [Df](\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \delta'(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2,$$

where

$$[Df](\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) := \int_0^\infty f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta}) dt, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2,$$

$$[\mathcal{R}f](s, \boldsymbol{\eta}) := \int_{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta} = s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2.$$

Let  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  be a vector field, supported in a bounded open set  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^3$ . In the next theorem we present a formula (1), relating the longitudinal cone beam transform  $\mathbf{D}_1\mathbf{f}$  of a vector field  $\mathbf{f}$ ,

$$[\mathbf{D}_1\mathbf{f}](\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) := \int_0^\infty \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta} dt, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2,$$

and its componentwise Radon transform  $\mathbf{R}\mathbf{f}$ .

**Theorem [1].** *Suppose that a vector field  $\mathbf{f} \in (C_0^1(\Omega))^3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  and  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2$ . Then for tangential vector fields on the sphere  $\mathbb{S}^2$*

$$\mathbf{R}^{(tan)}(s, \boldsymbol{\eta}) = \left( \boldsymbol{\eta} \wedge \frac{\partial}{\partial s} [\mathbf{R}\mathbf{f}](s, \boldsymbol{\eta}) \right) \wedge \boldsymbol{\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R}^{(tan)}(s, \boldsymbol{\eta}) = \left( \boldsymbol{\eta} \wedge \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\mathbf{R}\mathbf{f}](s, \boldsymbol{\eta}) \right) \wedge \boldsymbol{\eta}$$

the following equation is valid

$$\begin{aligned} & (\operatorname{div}_{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{R}^{(tan)}(s, \boldsymbol{\eta})) \Big|_{s=\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R}^{(tan)}(s, \boldsymbol{\eta}) \Big|_{s=\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} \\ & = - \int_{\mathbb{S}^2} [\mathbf{D}_1\mathbf{f}](\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \delta''(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2. \quad (1) \end{aligned}$$

We apply formula (1) for recovering the first and second derivatives of the componentwise Radon transform  $\mathbf{R}\mathbf{f}$  of vector field  $\mathbf{f}$  if the restricted longitudinal cone beam data  $[\mathbf{D}_1\mathbf{f}](\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  is known on the source trajectory  $\mathbf{x} = \mathbf{a}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  with a certain Kirillov-Tuy condition for vector fields. After this, as in the scalar case, the solenoidal part  $\mathbf{f}^s$  of vector field  $\mathbf{f}$  can be accurately reconstructed by applying inverse Radon transform

$$\mathbf{f}^s(\mathbf{x}) = - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\mathbf{R}\mathbf{f}](s, \boldsymbol{\eta}) \Big|_{s=\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\eta}.$$



The first author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 11-01-00147-a.

#### REFERENCES

1. **Kazantsev S. G., Schuster Th.** Asymptotic inversion formulas in 3D vector field tomography for different geometries // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2011. V. 19, N 4/5. P. 769–799.
2. **Grangeat P.** Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of Radon transform // Lecture Notes in Mathematics. V. 1497 / Ed. by G. T. Herman, A. K. Louis, F. Natterer. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

## ДВОЙСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А., Жидков А. А.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
просп. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950 Россия; avk@mm.unn.ru,  
msumin@mail.ru, kalinmm@yandex.ru, artem.zhidkov@gmail.com*

В различных постановках стационарных и квазистационарных задач для системы уравнений Максвелла присутствуют соотношения, имеющие смысл включений в соответствующие функциональные пространства соленоидальных и безвихревых полей, которые могут рассматриваться как линейные ограничения. При этом исходные задачи могут рассматриваться как оптимизационные задачи с ограничениями, допускающие соответствующие двойственные формулировки. В работе проводится анализ корректности, связи прямых и двойственных задач в терминах полей и потенциалов с различными, предложенными авторами, калибровочными условиями [1, 2]. При этом основные результаты получены для неоднородных сред достаточно общего вида и опираются на оценки скалярных произведений векторных полей, полученные в работах [3–5]. Анализируются некоторые обратные некорректные задачи в рамках метода двойственной регуляризации. В частности, рассматриваются для стационарных и квазистационарных систем задачи о создании электромагнитного поля заданной конфигурации, задачи финального и граничного наблюдения. Для решения этих задач предлагаются и обосновываются итерационные методы решения в рамках развитого в работах [6, 7] итеративного метода двойственной регуляризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0048).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин А. В., Калинин А. А. Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла // Вестник ННГУ. Сер. Мат. модел. опт. управление. 2002. № 1. С. 95–106.
2. Калинин А. В., Калинин А. А. Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вестник ННГУ. Сер. Мат. модел. опт. управление. 2003. № 1. С. 21–38.
3. Калинин А. В., Калинин А. А.  $L_p$ -оценки векторных полей // Изв. вузов. Мат. 2004. № 3. С. 26–35.
4. Kalinin A. V., Tyukhtina A. A., Zhidkov A. A.  $L_p$ -estimations of vector fields in unbounded domains // Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 45–51.
5. Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А.  $L_p$ -оценки векторных полей в неограниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах // Вестник Удмуртского ун-та. Сер. Мат. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 3–14.
6. Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019.
7. Сумин М. И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.

**СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ  
И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
В КОЛЬЦЕ**

Кальменов Т. Ш.

*Институт математики, информатики и механики, ул. Шевченко, 28,  
Алматы, 050000 Казахстан; kalmenov.t@mail.ru*

Пусть  $\Omega = \mu_0^2 < x_1^2 + x_2^2 < \mu_1^2$  кольцо в  $R^2$ .

**Задача Коши.** Найти решение уравнения в  $\Omega$

$$\Delta^2 u = f \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial n_x^j} \right|_{r=\mu_0} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\partial/\partial n_x$  — производная по нормали. В полярной системе координат  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\varphi = \arctg(y/x)$  задача (1), (2) примет вид

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 u = f, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial r^j} \right|_{r=\mu_0}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

**Самосопряженная задача Коши.** Найти решение уравнения

$$\Delta_p^2 u = P \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r} r_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 u = f, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial r^j} \right|_{r=r_0}, \quad \mu_0 < r_0 < \mu_1, \quad (6)$$

где  $\Delta_p^2 u = P g(r, \varphi) = g(\mu_0 + \mu_1 - r, \varphi)$ . Через  $\Delta_p^2(r_0)$  обозначим замыкание в  $L_2(\Omega)$  дифференциального уравнения (5) на подмножестве функции  $u \in C^4(\bar{\Omega})$  удовлетворяющих условию (6).

**Теорема 1.** Самосопряженная задача Коши уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом (5), (6) при заданном  $f \in l_2(\Omega)$  разрешима тогда и только тогда когда выполнено условие

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{0,m})}{\lambda_{0m}} \right|^2 < \infty. \quad (7)$$

Сильное решение  $u \in W_4^2(\Omega)$  тогда и только тогда когда выполнены условия

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left| \frac{m^4 (f, u_{m,n})}{\lambda_{nm}} \right|^2 < \infty. \quad (8)$$

Здесь  $u_{m,n}$  — собственный вектор соответствующего собственного значения  $\lambda_{m,n}$  рассматриваемой задачи.

## СРАВНЕНИЕ ПО ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДОВ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Камалтдинова Т. С., Танана В. П.

*Южно-Уральский государственный университет,  
просп. В. И. Ленина, 76, Челябинск 454080, Россия;  
KamaltdinovaTS@mail.ru, tvpa@susu.ac.ru*

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $T$  — линейный самосопряженный оператор со спектром  $\text{Sp}[T] = [a, \infty)$ ,  $a \geq 0$ . В основе методов проекционной регуляризации решения задачи вычисления значений неограниченного оператора  $T$

$$Tf_\delta = u; \quad f_\delta, u \in H, \quad (1)$$

где  $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$  и  $f_0 \in D(T)$ , лежит регулирующее семейство операторов  $\{T_\alpha; \alpha \geq a\}$ , определяемых формулой

$$u_\delta^\alpha = T_\alpha f_\delta = \int_a^\alpha \sigma dE_\sigma f, \quad (2)$$

где  $\{E_\sigma: \sigma \in [a, \infty)\}$  — спектральное разложение единицы  $E$ , порожденное оператором  $T$ . При этом линейный и нелинейный методы проекционной регуляризации [1] отличаются способом выбора параметра регуляризации в формуле (2).

Для линейного метода кроме  $f_\delta$  и  $\delta$  требуется знание класса корректности  $M_r = B^{-1}S_r$ , которому принадлежит точное решение  $u_0 = Tf_0$  задачи (1) и определяемому следующим образом

$$B = G(T),$$

где  $G(\sigma)$  возрастает и непрерывна на полупрямой  $[a, \infty)$ , такая что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G(\sigma) = \infty.$$

Тогда вводя следующую функцию  $\Delta_1(\alpha)$ , определяемую формулой

$$\Delta_1(\alpha) = \sup \{\|u_0 - u_0^\alpha\|: u_0 \in M_r\}, \quad (3)$$

где  $u_0^\alpha = T_\alpha T^{-1}u_0$  и, определив зависимость  $\alpha = \alpha(\delta)$  в формуле (2) уравнением

$$\Delta_1(\alpha) = \alpha\delta, \quad (4)$$

получим линейный метод  $T_\delta$ , определяемый формулой  $T_\delta f_\delta = T_{\alpha(\delta)} f_\delta$ .

В отличие от линейного метода нелинейный в качестве априорной информации использует лишь  $f_\delta$  и  $\delta$ , а соответствующий параметр регуляризации  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(f_\delta, \delta)$  определяется уравнением

$$\|f_\delta - T^{-1}u_\delta^\alpha\| = 3\delta. \quad (5)$$

Найдены условия при выполнении которых нелинейный метод превосходит по точности линейный.

Работа поддержана РФФИ (грант р.урал.а 10-01-96000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Танана В. П., Бредихина А. Б., Камалтдинова Т. С. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 281–288.

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

Колесникова Н. Ю., Танана В. П.

*Южно-Уральский государственный университет,  
просп. им. В. И. Ленина, 76, Челябинск, 454080 Россия;  
Natasha720221@mail.ru, tvpa@susu.ac.ru*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(x_0, t) = f(t); \quad 0 < x_0 < 1, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

а граничное значение

$$u(1, t) = u(t) \quad (5)$$

требуется определить.

Так как задача (1)–(5) некорректна, то предположим, что при  $f_0(t) \in L_2[0, \infty)$  существует ее точное решение  $u_0(t)$ , принадлежащее пространству  $W_2^1[0, \infty)$  и удовлетворяющее соотношению

$$\int_0^\infty [u_0'(t)]^2 dt \leq r^2, \quad (6)$$

где  $r$  — известная положительная величина, а  $u_0'(t)$  — первая производная.

Прямая задача (1)–(3), (5) при  $u(1, t) = u_0(t)$  имеет классическое решение  $u_0(x, t)$ , принадлежащее пространству  $C^{2,1}[(0, 1) \times (0, \infty)] \cap C[[0, 1] \times [0, \infty)]$  и это решение единственно.

Для получения приближенного решения  $u_\delta(t)$  используем регуляризующее семейство операторов  $\{R_\alpha; 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$  М. М. Лаврентьева, действующих из  $\mathbb{H}$  в  $\mathbb{H}$  и определяемых формулой

$$R_\alpha = \bar{B}(\bar{C} + \alpha E)^{-1}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \quad (7)$$

а  $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$ .

Получена оценка погрешности приближенного решения  $u_\delta(t)$

$$\|u_\delta - u_0\| \leq rG[\bar{\sigma}(\delta)] + \delta. \quad (8)$$

Работа поддержана РФФИ (грант р-урал.а 10-01-96000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
2. **Танана В. П.** Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.

## ГЛОБАЛЬНО И ЛОКАЛЬНО ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ

Леонов А. С.

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,  
Каширское ш., 31, Москва, 115409 Россия; ilposed@sumail.ru

1. Пусть  $Z(T)$  — банахово пространство функций  $z(s)$ , определенных в области  $T \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{D}$  — некоторое множество в  $Z(T)$ ,  $U$  — нормированное пространство с элементами  $u$ , а  $A : Z(T) \rightarrow U$  — некоторый оператор, возможно, нелинейный. В пространстве  $Z(T)$  зададим также некоторую топологию секвенциальной сходимости  $\tau$ . Предположим, что операторное уравнение  $Az = u$  имеет для элемента  $u \in U$  решение  $\bar{z}(s) \in \mathcal{D}$ , единственное в существенном [1, с. 306]. Для приближенного нахождения  $\bar{z}(s)$  будем использовать приближенные данные  $A_h : Z(T) \rightarrow U$ ,  $u_\delta \in U$  и регуляризирующий функционал  $\Omega[z]$ ,  $z \in \mathcal{D}$ . Приближенные величины  $(A_h, u_\delta)$ , аппроксимирующие точные данные  $(A, u)$ , заданы с погрешностями  $\eta = (h, \delta)$  так, что  $\|A_h z - Az\| \leq \Psi(h, \Omega[z])$ ,  $\|u_\delta - u\| \leq \delta$ . Мера аппроксимации  $\Psi(h, \Omega[z])$  имеет свойства, указанные в [1]. Найдем с помощью некоторого регуляризирующего алгоритма приближения  $z_\eta(s) \in \mathcal{D}$  к  $\bar{z}(s)$  такие, что  $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Нас интересуют апостериорные оценки точности этих приближений.

2. Зная  $z_\eta(s)$ , можно вычислить величины  $\Delta_\eta = \|A_h z_\eta - u_\delta\|$ ,  $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$ , где  $C > 1$  — некоторая константа. Введем множество  $Z_\eta = \{z(s) \in Z(T) : \|A_h z - u_\delta\| \leq \Delta_\eta, \Omega[z] \leq R_\eta\}$  и предположим, что  $\bar{z} \in Z_\eta$ . Тогда справедливы следующие апостериорные оценки точности приближенных решений  $z_\eta(s)$ :

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \leq \sup\{\|z_\eta - z\| : z \in Z_\eta\} \triangleq \varepsilon(\eta),$$

$$|z_\eta(s) - \bar{z}(s)| \leq \sup\{|z_\eta(s) - z(s)| : z(s) \in Z_\eta\} \triangleq E_s(\eta), \quad s \in T.$$

**Определение 1.** Назовем функцию  $\varepsilon(\eta)$  глобальной, а функцию  $E_s(\eta)$  — локальной (в точке  $s$ ) апостериорной оценкой точности приближенного решения.

Предположим, что выполнены условия: 1) функционалы  $J[z] = \|Az - u\|$ ,  $J_\eta[z] = \|A_h z - u_\delta\|$ ,  $\Omega[z]$   $\tau$ -полунепрерывны снизу на  $\mathcal{D}$ ; 2) непустые множества  $\Omega_K = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leq K\}$   $\tau$ -секвенциально компактны. Тогда справедлива

**Теорема.** а) Если  $\tau$  — топология сходимости по норме, то  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon(\eta) = 0$ . б) Если  $\tau$  — топология поточечной сходимости в  $Z(T)$ , то  $\lim_{\eta \rightarrow 0} E_s(\eta) = 0$  в точках непрерывности  $s \in T$  функции  $\bar{z}(s)$ . в) Если  $\tau$  — топология равномерной сходимости в  $Z(T)$ , то сходимость  $\lim_{\eta \rightarrow 0} E_s(\eta) = 0$  равномерна по  $s \in T$ .

3. Пусть  $\Delta_{opt}(\eta; A_h, u_\delta, M)$  — оптимальная на некотором множестве  $M \subset \mathcal{D}$  точность используемого регуляризирующего алгоритма (определение см, например, в [1]).

**Определение 2.** Регуляризирующий алгоритм называется глобально (или локально в точке  $s$ ) экстраоптимальным на множестве  $M$ , если найдется такая константа  $C_0 = C_0(M) > 0$ , что при достаточно малых  $\|\eta\|$  выполнено неравенство  $\varepsilon(\eta) \leq C_0 \Delta_{opt}(\eta; A_h, u_\delta, M)$  (или  $E_s(\eta) \leq C_0 \Delta_{opt}(\eta; A_h, u_\delta, M)$ ).

В докладе приводятся примеры пространств  $Z(T)$ , в которых регуляризирующие алгоритмы, построенные на основе методов А. Н. Тихонова и М. М. Лаврентьева с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки, обладают

свойствами экстраоптимальности из Определения 2. Даются также численные алгоритмы нахождения глобальных и локальных апостериорных оценок точности и иллюстрации их использования.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00040-а, 10-01-91150-ГФЕН-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

## THE CAUCHY PROBLEM FOR CLASSICAL MAXWELL’S EQUATION

**Makhmudov K. O.**

*University of Samarkand,  
University Boulevard 15, Samarkand, 703004 Uzbekistan*

For an elliptic complex of first order differential operators on a smooth manifold  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$ , we define a system of two equations which can be thought of as abstract Maxwell equations. The formal theory of this system proves to be very similar to that of classical Maxwell’s equations. The paper focuses on boundary value problems for the abstract Maxwell equations, especially on the Cauchy problem.

### REFERENCES

1. **Lavrent’ev M. M.** The Cauchy problem for the Laplace equation // *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 1956. V. 20, N 6. P. 819–842.
2. **Yarmukhamedov Sh. Y., Ishankulov T. I., Makhmudov O. I.** The Cauchy problem for a system of equations in the theory of elasticity // *Sib. Math. J.* 1992. V. 33, N 1. P. 154–158.
3. **Tarkhanov N. N.** Complexes of differential operators. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1995.
4. **Shlapunov A.** Green’s integrals and their applications to elliptic systems // *Tesi di perfezionamento, Scuola Normale Superiore, Pisa*, 1996.



**CAUCHY PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEMS  
IN THE SPACE  $\mathbb{R}^m$** **Makhmudov O. I.***Samarkand State University,  
University Boulevard, 15, Samarkand, 703004 Uzbekistan;  
makhmudovo@rambler.ru*

In the present article, we consider the questions of regularization of a solution to the Cauchy problem for the systems of differential questions of elasticity, the questions of static's of an isotropic elastic medium. Given the displacement and tension vectors on a part of the piecewise smooth boundary of a domain, we reconstruct the field of displacements inside the domain occupied by the elastic body. The system of equations for the static's isotropic elastic medium is an elliptic system of second-order differential equations with constant coefficients in the components of the displacement vector. The Cauchy problem for elliptic equations is well known to be ill-posed; a solution is unique but unstable (Hadamard's example). To make the statement well-posed, we have to restrict the class of solutions. During the last decades the classical ill-posed problems of mathematical physics have been of constant interest. This direction in studying the properties of solutions to the Cauchy problem for the Laplace equation was originated in the fifties in the articles by M. M. Lavrent'ev and S. N. Mergelyan and was further developed by V. K. Ivanov, Sh. Yarmukhamedov, N. N. Tarkhanov, A. A. Shlapunov etc. [1–4].

## REFERENCES

1. **Makhmudov O. I., Niezov I. E.** Regularization of a solution to the Cauchy problem for the system of equations of elasticity in displacements // *Sib. Math. J.* 1998. V. 39, N 2.
2. **Makhmudov O. I., Niezov I. E.** Regularization of solution of the Cauchy problem for system of elasticity theory in infinite domains // *Math. Notes.* 2000. V. 68, N 4.
3. **Makhmudov O. I.** Cauchy problem for elliptic system in the space // *Mat. Zametki. [Math. Notes].* 2004. V. 75, N 6. P. 794–804 (in Russian).
4. **Makhmudov O. I.** The Cauchy problem for a system of equations in the theory of elasticity and termoelastisity // *Iz. VUZ. Math.* 2004. V. 501, N 2. P. 43–53 (in Russian).

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СДВИГОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Морозов В. А.<sup>1</sup>, Назимов А. Б.<sup>2</sup>, Собиров М. К.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский Вычислительный центр  
МГУ им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, мкр. 1,  
Москва, 119234 Россия; morozov@sccr.ru

<sup>2</sup>Вологодский государственный технический университет,  
ул. Ленина, 15, Вологда, 160004 Россия; n.akbar54@mail.ru

<sup>3</sup>Институт экономики и демографии АН РТ,  
просп. Рудаки, 33, Душанбе, 734025 Таджикистан

Рассмотрим СЛДУ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная квадратная матрица порядка  $n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^T \in C[0, 2\pi]$  — пространство непрерывных  $2\pi$ -периодических вектор-функций. Для однозначной разрешимости СЛДУ (1) (см. [1]) для каждой  $f \in C[0, 2\pi]$  в  $C[0, 2\pi]$ , необходимо и достаточно отсутствие целого чисто мнимого собственного значения у матрицы  $A$ . При этом начальное значение  $x(0)$  искомого  $2\pi$ -периодического решения СЛДУ (1) определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(E - e^{2\pi A})x(0) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f(s) ds, \quad (2)$$

Если матрица  $A$  имеет целые чисто мнимые собственные значения, то СЛАУ (2), вообще говоря, является несовместной. Для совместности СЛАУ (2) вектор-функция  $f(t)$  должна удовлетворять некоторым условиям. Тогда СЛДУ (1) разрешима однозначно в  $C[0, 2\pi]$ . Для преодоления этих неопределенностей введем регуляризованную сдвигом СЛДУ

$$\frac{dx}{dt} = (A + \alpha B)x + f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3)$$

где  $B$  — постоянная квадратная матрица порядка  $n$ , а  $\alpha \in C$  — параметр регуляризации.

**Теорема.** *Однозначная разрешимость СЛДУ (3) для всех  $f \in C[0, 2\pi]$ , матрицы  $B$  и достаточно малых  $|\alpha| > 0$  в  $C[0, 2\pi]$  эквивалентна отсутствию целого чисто мнимого собственного значения у матрицы  $A$ .*

В докладе рассматривается случай, когда матрица  $A$  имеет целые чисто мнимые собственные значения. Аналогично утверждениям [2] доказаны: 1) когда разрешимы (1) и (3); 2) когда сходится решения (3) при  $\alpha \rightarrow 0$ ; 3) решением какого уравнения является предельная функция.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00297-а.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. Морозов В. А., Мухамадиев Э. М., Назимов А. Б. К проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. РАН. 2008. Т. 419, № 4. С. 1–4.

## О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мурадбеков М. Б., Серикбаев Ж. А.

*Таразский государственный педагогический институт,  
Тараз, 080000 Казахстан; musahan@mail.ru, szcit82@mail.ru*

Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через  $C_0^\infty(R, H)$  множество бесконечно гладких финитных функций, определенных на  $R(-\infty, +\infty)$  со значением в  $H$ .

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^m u^{(2m)}(y) + k(y)Au + ia(y)A^\alpha u + c(y)u,$$

где  $m = 1, 2, \dots$ ,  $u(y) \in C_0^\infty(R, H)$ ,  $A$  — положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с вполне непрерывной резольвентой,  $\alpha \in [1/2, 1)$ ,  $k(y)$  — кусочно-непрерывная и ограниченная функция в  $R$ ,  $k(0) = 0$  и  $yk(y) > 0$  при  $y \neq 0$ .

Пусть выполнены условия

i)  $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$ ,  $c(y) \geq \delta > 0$  — непрерывные функции в  $R$ ;

ii)  $\sup_{|x-t| \leq 1} \frac{a(t)}{a(x)} \leq c < \infty$ ,  $\sup_{|x-t| \leq 1} \frac{c(t)}{c(x)} \leq c_0 < \infty$ ;

iii)  $0 < \delta_1 \leq a^2(y)/c(y)$  при  $y \in R$ .

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия i)–iii). Тогда резольвента оператора  $L$  принадлежит классу  $\sigma_p$ , если  $p > 1$  и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{m(-p+1)/2}(j, y) dy < \infty,$$

где  $\sigma_p$  — множество всех вполне непрерывных операторов таких, что

$$\|A\|_{\sigma_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^p(A) < \infty,$$

$S_n(A)$  — собственные числа оператора  $\sqrt{A^*A}$ ,  $Q(t, y) = |a(y)it^\alpha + c(y)|^2$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия i)–iii) и пусть для всех  $0 \leq l < 1 + s$ ,  $s > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^l \lambda_n^{-1} < \infty,$$

где  $\lambda_n$  — собственные числа оператора  $A$ .

Тогда, резольвента оператора  $L$  является оператором Гильберта — Шмидта, если  $a^{-m}(y) \in L_1(R)$ .

## ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В $\mathbb{R}^m$

Нийёзов И. Э., Махмудов О. И.

*Самаркандский госуниверситет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 141129 Узбекистан;  
iqboln@mail.ru, makhmudovo@rambler.ru*

Рассматривается задача аналитического продолжения решения систем уравнений моментной теории упругости в пространственной многомерной области по ее значениям и значениям ее напряжений на части границы этой области, т. е. задача Коши.

Система уравнений моментной теории упругости эллиптическая. Соответственно задача Коши для таких систем является некорректной. Решение существует, единственен, но не устойчиво, т.е., решение не устойчиво относительно малого изменения данных. В некорректных задачах существование решение и принадлежности ее к классу корректности [1] предполагается априори. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов.

В 20-х годах Т.Карлеман построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области аналитичности с ее значениями на куске границы этой области. На основе формулы Карлемана М. М. Лаврентьев [1] ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указал способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность построить в этих задачах регуляризацию и получить оценку условной устойчивости. Функции Карлемана для уравнения Лапласа построена в [2].

В данной работе на основе метода функции Карлемана и работ [3–6] строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений моментной теории упругости для областей специального вида.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
2. Ярмухамедов Ш. Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 281–283.
3. Makhmudov O. I., Niyozov I. E., Tarkhanov N. The Cauchy problem of couple-stress elasticity. contemporary mathematics. AMS, 2008. V. 455. P. 207–310.
4. Makhmudov O. I., Niyozov I. E. The Cauchy problem for the Lamé system in infinite domains in  $R^m$  // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2006. V. 14, N 9. P. 905–924.
5. Махмудов О. И., Нийёзов И. Э. О задаче Коши для многомерной системы уравнений Ламэ // Изв. ВУЗ. Математика. 2006. N 4. С. 41–50.
6. Makhmudov O. I., Niyozov I. E. Regularization of a solution to the Cauchy problem for the system of thermoelasticity. AMS, 2005. Contemporary Mathematics. Primary V. 382.

**CAUCHY PROBLEM  
FOR GENERALIZED CAUCHY–RIEMANN SYSTEM  
WITH QUATERNION PARAMETER**

**Sattorov E. N., Ermamatova M. E.**

*Samarkand State university; Sattorov-e@rambler.ru*

In this paper, we present an explicit formula for the continuation of the solution of the Cauchy problem for a generalized Cauchy–Riemann system with quaternion parameter [1]

$$\alpha_0 f_0 - \operatorname{div} f - \langle f, \alpha \rangle = 0, \quad \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} f + [f \times \alpha] + f_0 \alpha + \alpha_0 f = 0, \quad (1)$$

where  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ;  $f := (f_1, f_2, f_3)$ ;  $\alpha_k \in C$ ;  $f_k : R^3 \rightarrow C$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Suppose that  $R^3$  is real three-dimensional Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = s + (y_3 - x_3)^2,$$

and  $\Omega$  is a bounded simply connected domain in  $R^3$  with boundary  $\partial\Omega$  composed of a compact connected part  $T$  of the plane  $y_3 = 0$  and a smooth Lyapunov surface  $S$  lying in the half-space  $y_3 > 0$ , with  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega = S \cup T$ . As to  $S$ , we assume that each ray issuing from any point  $x$  of the domain  $\Omega$  intersects this surface at most  $l$  points. The solution of the Cauchy problem will be constructed in the domain  $\Omega$  for the case in which the Cauchy data are given on a part  $S$  of the boundary. The Cauchy problem for a generalized Cauchy–Riemann system with quaternion parameter is an ill-posed problem (see Hadamard's example in [2. P. 39 (Russain transl.)]).

We assume that the solution of the problem exists (then it is unique [3. P. 58]) and the exact Cauchy data are given. Under these conditions, we establish an explicit continuation formula which is an analog of the classical Riemann–Volterra–Hadamard formula for solving the Cauchy problem in the theory of hyperbolic equations. An explicit regularization formula is proposed for the conditions given above hold and, instead of the Cauchy data, their continuous approximations with prescribed deviation in a uniform metric are given under the condition that the solution is bounded by a positive number on a part  $T$  of the boundary.

The method of deriving of these results is based on the explicit construction of the fundamental solution matrix for a generalized Cauchy–Riemann system with quaternion parameter (depending on a positive parameter) vanishing as the parameter tends to infinity on  $T$  when the pole of the fundamental solution lies in the half-space  $y_3 > 0$ . Following Lavrent'ev and Yarmukhamedov, we call the fundamental matrix of solutions with this property the *Carleman matrix* for the half-space [4, 5]. After the construction of the Carleman matrix in explicit form, the continuation and regularization formulas for the solution of the Cauchy problem can be written out as a generalized spatial Cauchy integral formula.

For the last decades, there is persistent interest in classical ill-posed problems of mathematical physics. The study in this direction of the properties of the solutions of the Cauchy problem for the Laplace equation started in the 1950s [4, 6–8] and continued later [5, 9–13].

Following [14], we call the function  $F_{\sigma\delta}(x)$  a *regularized solution* of the Cauchy problem for a generalized Cauchy–Riemann system with quaternion parameter. The regularized solution determines the stability of the method of the approximate solution of the problem.

Using results from [3, 5, 9, 10] on solving the Cauchy problem, we construct the Carleman matrix for the Laplace and Helmholtz equations in explicit form and, on

its basis, the regularized solution of the Cauchy problem for system (1). An existence theorem for the Carleman matrix and a criterion for the solvability of a wider class of boundary-value problems for elliptic systems were given in [15]. Earlier, in [15, 16], it was proved that a Carleman matrix exists in any Cauchy problem for the solutions of elliptic systems whenever the Cauchy data are given on a boundary set of positive measure. Since, in this paper, we are dealing with explicit formulas, the construction of the Carleman matrix in terms of elementary and special functions is of considerable interest.

The Carleman function of the Cauchy problem for the Laplace equation and similar cases in which  $\partial\Omega \setminus S$  is a part of the cone surface was constructed in [5]. For the case in which  $S$  is an arbitrary set of positive measure, the Carleman matrix for the Cauchy-Riemann equation was constructed by Aizenberg [16]. Developing an idea of Mergelyan [7], who proposed a method of constructing the Carleman function of the Cauchy problem for the Laplace equation for the case in which  $S$  is a part of the boundary of a simply connected domain with a smooth boundary and using approximation theorems, Tarhanov constructed the Carleman matrix for elliptic systems in [15].

#### REFERENCES

1. **Kravchenko V. V., Shapiro M. V.** On the generalized system of equation Cauchy–Riemann with quaternion parameter // Dokl. Akad. Nauk. 1993. V. 329, N 5. P. 547–549.
2. **Hadamard J. S.** Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale Univ. Press, 1923; New York: Dover Publ., 1953; Moscow: Nauka, 1978. P. 38–70.
3. **Lavrent’ev M. M.** Some ill-posed problems of mathematical physics. Novosibirsk: Izdat. Sibirsk. Otdel. AN SSSR, 1962 [in Russian].
4. **Bers L., Jonn F., Schechter M.** Partial differential equations in lectures in applied mathematics Colorado: Boulder, 1957; Moscow: Mir, 1966. V. 3.
5. **Yarmukhamedov Sh.** On the Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl. AN SSSR. 1977. V. 235, N 2. P. 281–283 [Soviet Math. Dokl. 1978. V. 18, N 2. P. 939–942].
6. **Lavrent’ev M. M.** On the Cauchy problem for the linear elliptical equations of second order // Dokl. AN SSSR. 1957. V. 112, N 2. P. 195–197.
7. **Mergelyan S. N.** Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation // Uspekhi mat. nauk. 1956. V. 11, N 5. P. 3–26.
8. **Ivanov V. K.** The Cauchy problem for the Laplace equation in an infinite strip // J. diff. equation. 1965. V. 1. P. 98–102 [Diff. uravneniya. 1965. V. 1, N 1. P. 131–136].
9. **Yarmukhamedov Sh.** Continuing solutions to the Helmholtz equation // Dokl. RAN. 1997. V. 357, N 3. P. 320–323 [Russian acad. sci. dokl. math. 1997. V. 56, N 3. P. 887–890].
10. **Yarmukhamedov Sh.** Lavrent’ev regularization of the solutions of the Cauchy problem for the Helmholtz equation // Dokl. AN RUz. 2001. N 3. P. 6–8.
11. **Sattorov E. N.** Regularization of the solutions of the Cauchy problem for the generalized of Moisyl–Theodoresku system // Diff. uravneniya. 2008. V. 44, N 8. P. 1100–1110.
12. **Sattorov E. N.** On the continuation of the solutions of a generalized Cauchy–Riemann system in space // Math. notes. 2009. V. 85, N 5. P. 733–745 [Mat. zametki. 2009. V. 85, N 5. P. 768–781].
13. **Sattorov E. N.** The Cauchy problem for the generalized system of Cauchy–Riemann in space // Izv. vyssh. uchebn. zaved. Mat. 2010. N 5. P. 1–9.
14. **Tikhonov A. N.** On the solution of ill-posed problems and a regularization method // Dokl. AN SSSR. 1966. V. 151, N 3. P. 501–504.
15. **Tarkhanov N. N.** On the Carleman matrix for elliptic systems // Dokl. AN SSSR. 1985. V. 284, N 2. P. 294–297 [Soviet Math. Dokl. 1985. V. 32. P. 429–432].
16. **Aizenberg L. A., Tarkhanov N. N.** An abstract Carleman formula // Dokl. AN SSSR. 1988. V. 37, N 1. P. 235–238 [Soviet math. dokl. 1988. V. 298, N 6. P. 1292–1296].

## THE INVERSE PROBLEMS OF REMOTE OPTICS

Serikbayev A. U.<sup>1</sup>, Nadyrbekova A. S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Kazakh national agrarian university, ave. Abai 7, Almaty, Kazakhstan;*

*aserikbayev@rambler.ru*

*Taraz state pedagogical university, Taraz, Kazakhstan*

It have given two-dimensional Kepler's potential

$$A\mu \equiv \int_D \mu(y) \frac{1}{|x-y|} dy = w(x), \quad (1)$$

where  $y = (y_1, y_2) \in D$ ,  $x = (x_1, x_2) \in D_1$ ,  $D \cap D_1 = \emptyset$  and  $D$  is an arbitrary bounded from  $R^2$  with smooth boundary, we study the inverse problem of determining the density  $\mu(y_1, y_2)$  [1, 2].

As an approximation to the exact solution to the regularization method of fractional order have taken  $\mu_{\alpha\delta}$ , delivering a minimum of the smoothing functional:

$$M^\alpha[\mu, w_\delta] = \|A\mu - w_\delta\| + \alpha\Omega[\mu],$$

where the stabilizing  $\Omega[\mu] = \|\mu\|^2 + \|\partial^{1/2}\mu\|^2$ ,  $\alpha > 0$  is the parameter of regularization,  $\partial^{1/2}$  is the differential operator of order 1/2.

It have proved the following

**Lemma.** If  $\mu_{\alpha\delta}$  is a solution of the regularized equation  $A^*A\mu_{\alpha\delta} + \alpha(\mu_{\alpha\delta} + \nabla\mu_{\alpha\delta}) = A^*w_{\alpha\delta}$  is an approximate solution of equation (1) then the estimate  $\|\mu_{\alpha\delta} - \mu\|_{L_2} \leq 2C_6\delta/(C_6K_2 - \delta) + \varepsilon_1(\delta)$  is true and  $\alpha_{on} = K_2\delta/C_6$  is the optimal parameter the function  $\varepsilon_1(\delta)$  which characterizes the stability of the solution from a small error of the right side is tends to zero when  $\delta \rightarrow 0$ .

**Theorem.** If the exact solution of (1)  $\mu(y_1, y_2) \in M$  then for  $\delta \rightarrow 0$  the solution of the regularizate equation  $A^*A\mu_{\alpha\delta} + \alpha(\mu_{\alpha\delta} + \nabla\mu_{\alpha\delta}) = A^*w_{\alpha\delta}$  on the set of correctness tends to the exact solution and it is true the next inequality  $\|\mu_{\alpha\delta} - \mu\|_C \leq \overline{C}\varphi_5(\delta) + \varepsilon_1(\delta)$ , where  $\varphi_5(\delta) = 2C_6\delta/(C_6K_2 - \delta)$ ,  $\varepsilon_1(\delta)$  which characterizes the stability of the solution from a small error of the right side is tends to zero when  $\delta \rightarrow 0$ ,  $K_2 = \max_{x \in D_1, y \in D} |1/|x-y|| < \infty$ ,  $C_6 = \|\mu\|_{W_2^1} \equiv \|\mu\|_2$ ,  $M = \{\mu \in C(D) \setminus |\text{grad } \mu| < C\}$ .

### REFERENCES

1. **Kireitov V. R.** The inverse problems of photometry. Novosibirsk, 1983.
2. **Serikbayev A. U.** About the stability of the solution of inverse problem of Webber's potential // Proc. Science Academy of Republic Kazakhstan. 1992. No 5. P. 41-44.

## SOLUTION TO THE VOLTERRA EQUATIONS OF THE 1ST KIND WITH PIECEWISE CONTINUOUS KERNELS IN THE SPACE OF SOBOLEV–SCHWARTZ DISTRIBUTIONS

**Sidorov D. N.**

*Melentiev Energy Systems Institute,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
Lermontov Str. 130, Irkutsk  
Irkutsk State University, K. Marks Str., 1, 664003 Irkutsk, Russia;  
dsidorov@isem.sei.irk.ru*

The sufficient conditions for existence and uniqueness of solutions to the Volterra integral equations (VIE) of the first kind

$$\int_0^t K(t,s)u(s) ds = f(t), \quad 0 < t \leq T < \infty, \quad (1)$$

where

$$\int_0^t K(t,s)u(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)x(s) ds, \quad (2)$$

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & t,s \in D_1, \\ \dots & \dots \\ K_n(t,s), & t,s \in D_n \end{cases} \quad (3)$$

are derived. In (3)  $D_i = \{s, t : \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}$ ,  $\alpha_i(0) = 0$ ,  $0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$  for  $t \in (0, T]$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_n = t$ ,  $f(t)$  has continuous derivative,  $f(0) \neq 0$ . An asymptotic approximation of a parametric family of solutions is constructed. A method of the regular part of the solution's improvement employs the method of successive approximations. It is to be noted that differentiation of VIE (1) leads to integral-functional equations with nonunique solution in general case [1]. Different classes of the Volterra integral equations are studied in [2]. We search for the solution in the form  $u(t) = a\delta(t) + x(t)$ , where  $\delta(t)$  is Dirac functional,  $x(t)$  is regular continuous function. Such solutions satisfies VIE (1) in sense of Sobolev-Schwartz theory of distributions [3].

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 11-08-00109-a and No 12-01-00722-a.

### REFERENCES

1. **Sidorov D.** Volterra Equations of the first kind with discontinuous kernels in the theory of evolving systems control // *Studia Informatica Universalis*. 2011. V. 9, N 3. P. 135–146.
2. **Sidorov D.** On impulsive control of nonlinear dynamical systems based on the Volterra series // 10th IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering, 8–11 May, 2011, Rome, Italy. P. 1–6.
3. **Vladimirov V. S.** Generalized functions in mathematical physics (English ed.) Moscow: Mir Publishers, 1979.



## УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Темирболат С. Е.

*Казахский национальный университет, Алматы, Казахстан*

В полупространстве  $R_3^+ = (x > 0; y, z \in R_2)$  дана эллиптическая система дифференциальных уравнений первого порядка [1]

$$U_x + BU_y + CU_z = 0 \quad (1)$$

с вещественными кососимметричными матрицами,  $B = (b_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$ , но при этом диагональные элементы  $b_{ij} = b$ ,  $c_{ij} = c$ ,  $i = 1 : 4$  могут быть не нулевые. Матрица  $a(\mu)$  вида

$$a(\mu) = \|B\omega_1 + C\omega_2\| = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \omega \in R^2.$$

**Задача.** Найти вектор  $U = U_\phi \subseteq C_1(x \geq 0; y, z \in R_2)$  удовлетворяющий системе (1) и граничным данным

$$M(\partial)U \equiv M_1U_x + M_2U_y + M_3U_z + M_4U = \varphi, \quad \varphi \in \Phi_\phi \subseteq C(R^2),$$

где  $\text{rang } M(1) = 2$ ,  $U_\phi$  и  $\Phi_\phi$  — множества вектор-функции, к которым применимы интегральное преобразование Фурье по  $y$  и  $z$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha_2 \neq 0$ , тогда

а) если  $\alpha_3 \neq 0$  (или  $\alpha_4 \neq 0$ ), то задача Дирихле с любой вещественной матрицей однозначно разрешима. Для ее некорректности необходимо, чтобы имела комплекснозначные элементы;

б) если  $\alpha_3 = 0$  и  $\alpha_4 = 0$ , то существуют системы уравнений, для которых у задачи Дирихле нарушается однозначная разрешимость;

в) пусть  $\alpha_2 = 0$ , тогда утверждение б) имеет место и тогда, когда  $\alpha_4 = 0$ .

Решены примеры “прямой” некорректной (третья краевая для обычной и обобщенной системы Мойсила — Теодереску) и “обратной” некорректной (первая краевая для системы из двух двумерных уравнений Лапласа) задач. Если укажем граничную матрицу  $M$ , составляющую с данной системой дифференциальных уравнений некорректную задачу, то такую задачу назовем “прямой” некорректной.

Если при данной граничной матрице  $M$  следует определить дифференциальные уравнения, составляющие с  $M$  некорректную задачу, то задачу назовем “обратной” некорректной.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Темирболат С. Е.** Новая методика исследования (решения) некорректных краевых задач. Алматы, 2009.

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов Ф. Р., Маликов З.

*Самаркандский государственный университет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140100 Узбекистан;  
faridun22@rambler.ru*

В работе предлагается явная формула регуляризованного решения задачи Коши для некоторых систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области. Строится матрица Карлемана на основе которых строится регуляризованное решение данной задачи, а также доказывается существование решения этой задачи.

Пусть,  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$  точки двумерного Евклидова пространства  $R^2$  и  $x^\top = (x_1, x_2)^\top$  транспонированный вектор  $x$ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y' &= (y_1, 0), \quad x' = (x_1, 0), \quad r = |y - x|, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad \alpha^2 = s, \\ w &= i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad u \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^\top, \\ u(x) &= (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))^\top, \quad u^0 = (1, 1, \dots, 1), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

$E(x)$  — диагональная матрица.

Пусть область  $G_\rho \subset R^2$  лежит внутри полосы  $0 < y_2 < h$ ,  $h = \pi/\rho$ ,  $\rho > 0$  граница которой состоит из прямой  $y_2 = 0$  и некоторой кривой  $y_2 = f(y_1)$  удовлетворяющей условиям

$$0 < f(y_1) \leq h, \quad |f(y_1)| \leq M < \infty.$$

В области  $G_\rho$  рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через  $H(G_\rho)$  класс вектор функций  $u(x)$  из  $C'(G_\rho)$  удовлетворяющие системе (1) и непрерывные в  $\bar{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho$ .

Доказано следующее:

**Теорема 1.** Пусть вектор-функция  $u(y) \in H(G_\rho)$  является решением системы (1) и удовлетворяет условию роста:

$$|u(y)| \leq \exp[o(\exp |y'|)], \quad |y'| \rightarrow \infty, \quad y \in \partial G_\rho,$$

а на части границы области  $G_\rho$ ,  $T = \{y: y_2 = 0\}$  удовлетворяет условию:

$$|u(y)| < 1, \quad y \in T.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x) \exp(-\sigma x_2).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математического физики. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.

**ЗАДАЧА С ВНУТРЕННИМИ  
И ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО  
УРАВНЕНИЯ  $n$ -ГО ПОРЯДКА**

**Фаязов К. С., Абдуллаева З. Ш.**

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,  
Вузгородок, Ташкент, 100144 Узбекистан;  
kudratillo52@mail.ru, Z.Sh.Abdullaeva@mail.ru*

Исследуется решение абстрактного составного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, состоящего из умножения дифференциально-операторных выражений с известными значениями решения в начальный и при фиксированном моментах времени внутри области определения.

Пусть  $u(t)$  — функция скалярного аргумента  $t$ ,  $0 < t < T$ , со значениями в пространстве Гилберта  $H$ . Рассмотрим решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^n u = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

в области  $D = \{0 < t < T\}$  и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi, \\ u|_{t=l_1} &= \varphi_1, \\ &\dots \\ u|_{t=l_{n-1}} &= \varphi_{n-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  — самосопряженный оператор с плотной в  $H$  областью определения  $D(A)$  и  $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{n-1} < l_n < T$ .

Заметим, что задача (1), (2), вообще говоря, некорректна. В работе [1] исследована задача, для абстрактного составного дифференциального однородного уравнения второго порядка. В задаче (1), (2) отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных, т. е. устойчивость решения рассматриваемой задачи. В данной работе установлены априорные оценки и доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости. Исследованию краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов (см., например, [3, 4] и цитированную там литературу).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Атаходжаев М. А., Эгамбердиев О. М.** Задача Коши для абстрактного бикалорического уравнение // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 187–191.
2. **Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.** Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.
3. **Фаязов К. С.** Хисоблаш математикаси, математик физика ва анализнинг нокоррект масалаларини ечиш усуллари. Тошкент: ЎзМУ, 2011. С. 82–90.
4. **Levine H. A.** Logarithmic convexity and the Cauchy problem for some abstract second order differential inequalities // J. Diff. Equations. 1970. V. 8. P. 34–55.

## НЕКОРРЕКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**Фаязов К. С., Хажиев И. О.**

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,  
Вузгородок, 2, Ташкент, 100174 Узбекистан;  
kfayazov@yahoo.com, hajiev.79@rambler.ru*

Пусть функция  $u(x, t)$  в области  $\Omega = \{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 < t < T\}$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\operatorname{sign} x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x, t) = F(x, t) \quad (1)$$

и следующим условиям

$$u(x, 0) = p(x), \quad u_t(x, 0) = q(x), \quad u_{tt}(x, 0) = r(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad u_x(-0, t) = u_x(+0, t),$$

$$u_{xx}(-0, t) = u_{xx}(+0, t), \quad u_{xxx}(-0, t) = u_{xxx}(+0, t). \quad (4)$$

Здесь  $F(x, t)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — заданные функции.

Нетрудно заметить, что задача (1)–(4) некорректно поставленная задача, т.е. в нем отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Это можно увидеть, используя метод работы [1]. Аналогичная задача для уравнения первого и второго порядка было рассмотрено в работах многих авторов (см. например [2] и цитируемую там литературу). В этих работах различными методами было установлены априорные оценки для решения исследуемых задач и были доказаны на соответствующих множествах корректности единственность решения исследуемых задач, а также условная устойчивость решения этих задач. В некоторых из этих работ были построены приближенные решения устойчивые к погрешности начальных данных. В данной работе мы используя линейность исходной задачи мы разбиваем задачу на более простые задачи и для решения этих задач соответственно построим априорные оценки, из которых выводим теоремы о единственности и условной устойчивости решения рассматриваемых задач в соответствующих множествах корректности. При этом мы используем метод интегралов энергии и метод логарифмической выпуклости.

Заметим, результаты работы могут быть распространены и на соответствующего абстрактного составного уравнения третьего порядка с самосопряженными операторными типами коэффициентов в гильбертовых пространствах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.
2. Фаязов К. С. Хисоблаш математикаси, математик физика ва анализнинг некоррект масалаларини ечиш усуллари. Ташкент: НУУз, 2001.

**ON THE CAUCHY PROBLEM  
FOR ELLIPTIC COMPLEXES  
IN SPACES OF DISTRIBUTIONS**

**Shlapunov A. A.**

*Siberian Federal University, Institute of Mathematics,  
prosp. Svobodnyi, 79, Krasnoyarsk, 660041 Russia;  
ashlapunov@sfu-kras.ru*

Let  $X$  be an open set in  $\mathbb{R}^n$ . For trivial  $\mathbb{C}$ -vector bundles  $E_i = X \times \mathbb{C}^{k_i}$  consider an elliptic differential complex  $\{A_i\}$  of first order operators of types  $E_i \rightarrow E_{i+1}$ . This means that  $A_{i+1} \circ A_i \equiv 0$  and the complex of principal symbols  $\{\sigma_i(x, \zeta)\}$  related to  $\{A_i\}$  is exact for all  $x \in X$  and  $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . In particular, the Laplacians  $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^*$  are strongly elliptic second order operators of types  $E_i \rightarrow E_i$ . Let  $D$  be a bounded domain in  $X$  with a smooth boundary  $\partial D$  and  $\nu(x)$  be the unit exterior normal vector to  $\partial D$  at the point  $x$ . Let  $C^s(\bar{D}, E_i)$  be the space of  $s$  times differentiable sections of the bundle  $E_i$  over the closure  $\bar{D}$  of  $D$ . For a section  $u \in C(\bar{D}, E_i)$  we denote  $\tau_i(u) = \sigma_i(x, \nu)u$  the tangential part of  $u$  with respect to  $\{A_i\}$ . Fix an open (in  $\partial D$ ) part  $S$  of  $\partial D$ .

**Problem 1.** *Given a distribution-section  $f$  of the bundle  $E_{i+1}$  over  $D$  and a distribution-section  $u_0$  of the bundle  $E_{i+1}$  over  $S$  find a distribution-section  $u$  of the bundle  $E_i$  over  $D$  satisfying  $A_i u = f$  in  $D$  and  $\tau_i(u) = u_0$  on  $S$  in a proper sense.*

For elliptic operators (i.e. for the case  $i = 0$ ) Problem 1 is exactly the ill-posed Cauchy problem (see, for instance, [1, 2]). The case  $i > 0$  was for the first time considered in [3]. Let  $H^{-s}(D)$  be the dual space for Sobolev space  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$  with respect to the pairing induced by the scalar product in the Lebesgue space  $L^2(D)$ . We denote  $H_{\tau}^{-s}(D, E_i)$  and  $H_A^{-s}(D, E_i)$  the completions of  $C^\infty(\bar{D}, E_i)$  with respect to the graph-norms:  $\|u\|_{-s, \tau} = (\|u\|_{-s}^2 + \|\tau_i(u)\|_{-s-1/2, \partial D}^2)^{1/2}$ ,  $\|u\|_{-s, A} = (\|u\|_{-s}^2 + \|A_i(u)\|_{-s-1}^2)^{1/2}$ .

**Theorem 1.** *Any element  $u \in H_A^{-s}(D, E_i)$  has a naturally defined trace  $\tau_i(u) \in H^{-s-1/2}(\partial D, E_{i+1})$  and the corresponding trace operator is bounded.*

If the Laplacians of the complex satisfy the uniqueness condition in the small then they have two-sided fundamental solutions  $\Phi_i$  on  $X$ . It is not difficult to reduce Problem 1 to the case  $u_0 = 0$ . Then using method proposed in [2] we easily obtain necessary and sufficient solvability conditions of Problem 1 over the scale  $H_A^{-s}(D, E_i)$  in terms of a potential  $T_i f(x) = \langle ({}^t A_i^* \Phi_i)(x, \cdot), f \rangle$  where  $A_i^*$  and  ${}^t A_i$  are the formal adjoint and transposed operators for  $A_i$  respectively. In particular, for  $s = 0$  we obtain the following. Choose a domain  $D^+$  in such a way that the set  $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$  is a bounded domain with smooth boundary in  $X$ . It is convenient to denote  $F^\pm$  the restrictions of a section  $F$  onto  $D^\pm$  (here  $D^- = D$ ). Then  $\Delta_i(T_i f) \in X \setminus \bar{D}$ .

**Theorem 2.** *Let  $s = 0$ . If  $f \in H^{-1}(D, E_{i+1})$ ,  $u_0 = 0$  then Problem 1 is solvable in the space  $H_{A_i}^0(D, E_i)$  if and only if  $A_{i+1} f = 0$  in  $D$ ,  $\tau_{i+1}(f) = 0$  on  $\Gamma$  and there is a section  $\mathcal{F}_i \in L^2(\Omega, E_i)$  satisfying  $\Delta_i \mathcal{F}_i = 0$  in  $\Omega$  and coinciding with  $T_i f$  in  $D^+$ .*

To make conditions of Theorem 2 more constructive one may use the so-called bases with double orthogonality property (see [2]).

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No 11.01.00852-a and No 11-01-91330-NNIO-a.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P.** Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Moscow: Nauka, 1980.
2. **Tarkhanov N.** The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Berlin: Akademie Verlag, 1995.
3. **Andreotti A., Hill C. D.** Levi convexity and the Hans Lewy problem. Pt 1: Reduction to vanishing theorems // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1972. V. 26, N 3. P. 325–363.

## МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ПОЛИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Эгамбердиев О. М.

*Наманган, Узбекистан*

Рассмотрим следующую задачу

$$K_+^n u(t) \equiv \left( \frac{d}{dt} + A \right)^n u(t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (1)$$

Удовлетворяющий следующим условиям:

$$u|_{t=l_1} = u(l_1), \quad u|_{t=l_2} = u(l_2), \dots, u|_{t=l_n} = u(l_n), \quad (2)$$

где  $u(t)$  — абстрактная функция со значениями в гильбертовом пространстве  $H$ ;  $A$  — постоянный, положительно определенный, самосопряженный, линейный, неограниченный с всюду плотной областью определения  $D(A^n)$  ( $D \subset H$ ) оператор, действующий из  $H$  в  $H$ , причем  $u(l_1), u(l_2), \dots, u(l_n) \in H$ .

С помощью представления

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(t-l_i)}{(k-1)!} u_k(t) \quad (3)$$

решение задачи (1), (2) можно свести  $k$  решению следующих  $n$  задач:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + Au_1 = 0, \\ u_1|_{t=l_1} = u_1(l_1), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du_2}{dt} + Au_2 = 0, \\ u_2|_{t=l_2} = u_2(l_2), \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0, \\ u_n|_{t=l_n} = u_n(l_n), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$u_1(l_1) = u(l_1), \quad u_2(l_2) = \frac{u(l_2) - u(l_1)}{l_2 - l_1}, \quad u_3(l_3) = \frac{u(l_3)u(l_1) - (l_3 - l_1)(u(l_2) - u(l_1))}{(l_3 - l_1)(l_3 - l_2)(l_2 - l_1)},$$

$$\dots, \quad u_n(l_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} C_{k,i} u(l_k), \quad C_{k,i} = \frac{1}{l_k - l_i}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Эти задачи в классическом смысле некорректны, их будем исследовать на условную корректность по Тихонову [1, 2]. Докажем теорему, характеризующую оценку устойчивости решения задач:

**Теорема.** Для любого решения задачи (1), (2) справедливо неравенство.

$$\|u(t)\|_H \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k C_{k,i} \begin{cases} \|u(l_i)\|^{t/l_i} \|K_+^{i-1} u(0)\|^{(l_i-t)/l_i}, & 0 \leq t \leq l_i, \\ \|u(l_k)\|, & l_k \leq t \leq T \end{cases} \quad (5)$$

где  $C_{k,i} = 1/(l_k - l_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Отметим, что из неравенства (5) следует единственность решения задачи (1), (2) и условная корректность этой задачи в классе  $\{u: \|K_+^{n-1} u(0)\| \leq M\}$ . Это теорема доказывается методом логарифмической выпуклости [1, 2].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М.** Некорректные задачи для дифференциальных уравнения. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1981.
2. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

## ФОРМУЛА ГРИНА — СОМИЛИАНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Ярмухамедов С. А.

*Самаркандский государственный университет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 104129 Узбекистан;  
ya\_spitamen@mail.ru*

В данной работе приводится интегральное представление решения системы теории упругости в бесконечной области.

Пусть  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) —  $m$ -мерное вещественное Евклидово пространство,  $D$  — область в  $\mathbb{R}^m$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$  ( $\partial D$  состоит из дифференцируемых многообразий размерности  $m - 1$ ),  $S$  — гладкая часть  $\partial D$  с гладким краем.

Обозначая через  $A(D)$  пространство всех регулярных в  $D$  (если  $D$  неограниченно, то регулярность требуется лишь в конечных точках  $\partial D$ ) решений однородной системы уравнений Ламе, иллюстрируется справедливость формулы:

$$\int_{\partial D} [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}] ds_y = \begin{cases} U(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

где  $U(x) \in A(D)$ , в ограниченной области и неограниченной конечносвязанной области  $D$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ярмухамедов Ш. Я., Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 186–190.
2. Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Задача Коши для системы теории упругости в бесконечной области // Узбекский мат. журн. 1999. № 2. С. 34–39.
3. Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В., Гегелия Т. Г. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.



# Секция 3

---

Численные  
методы решения  
некорректных  
и обратных задач

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Абдуллин А. И.

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН,  
ул. Лобачевского, 2/31, Казань, 420111 Россия;  
adel.abdullin@gmail.com*

В данной работе численно решается коэффициентная обратная задача оценки фильтрационных и теплофизических параметров пористого пласта. В качестве исходной информации используются кривые изменения температуры и давления, снятые одновременно несколькими глубинными приборами, установленными на разных участках горизонтальной скважины (ГС). Для описания процесса тепломассопереноса в системе “пласт — горизонтальная скважина” используются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\frac{2\mathbf{w}}{r_c}, \quad \mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x} + \frac{1}{4r_c} \psi \rho \mathbf{v} |\mathbf{v}|, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{v} \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = \frac{2(\alpha_{mp} - w\rho C_p)}{\rho C_p r_c} (T_2|_{S_c} - T_1), \quad (2)$$

$$0 < x \leq L, \quad 0 < t \leq t_{exp},$$

$$\beta^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2 \right), \quad (x, y, z) \in V, \quad 0 < t \leq t_{exp}, \quad (3)$$

$$C_n \frac{\partial T_2}{\partial t} = \rho C_p \frac{\mathbf{k}}{\mu} \nabla p_2 (\nabla T_2 + \varepsilon \nabla p_2) + \nabla (\lambda \nabla T_2) + m \rho C_p \eta \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$p_2^0 = p_k, \quad T_2^0 = Tk, \quad p_2|_{\partial V_1} = p_k, \quad T_2|_{\partial V_1} = Tk, \quad T_2|_{\partial V_2} = Tk, \quad (5)$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{\partial V_1} = 0, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{\partial V_2} = 0,$$

$$-\lambda (\nabla T_2, \mathbf{n}) = 2(\alpha_{mp} - w\rho C_p)(T_2 - T_1), \quad (x, y, z) \in S_c, \quad (6)$$

$$\int_{S_c} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) d\sigma = Q_0 + C_{store} \frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

Метод решения прямой задачи (1)–(6) основан на сопряжении внутренней (в стволе ГС (1), (2)) и внешней (в пласте (3)–(6)) задач.

$$\sum_{i=0}^N \int_0^{t_{exp}} [(T_i - T_i^{calc})^2 + \varepsilon^2 (p_i - p_i^{calc})^2] dt. \quad (7)$$

Численное решение обратной задачи сводится к минимизации функционала невязки (7) между наблюдаемыми и вычисленными значениями температуры и давления в стволе ГС и строится на основе градиентных методов.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-05-00878-а).

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СИНТЕЗИРОВАНИЯ АНТЕННЫ МНОГОКАНАЛЬНОГО ГБО С КОМПЕНСАЦИЕЙ ТРАЕКТОРНЫХ НЕСТАБИЛЬНОСТЕЙ

Агеев А. Л., Костоусов В. Б., Игумнов Г. А.

*Институт математики и механики УрО РАН,  
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219 Россия;  
ageev@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru, g.a.igumnov@gmail.com*

Рассматривается задача синтеза апертуры антенны многоканального гидролокатора бокового обзора. Описывается алгоритм синтеза, который базируется на использовании закона изменения фазы отраженного сигнала при приближенно известном относительном движении фазового центра антенны и наблюдаемой сцены.

Задача обработки сигнала гидролокатора бокового обзора (ГБО) с синтезированной апертурой антенны имеет большую важность. Относительно недавно [1, 2] в литературе появилось описание гидролокаторов и методики обработки эхолокационных данных, позволяющие даже для небольших и относительно дешевых гидролокаторов различать небольшие объекты на расстояниях в сотни метров, что, несомненно, является революцией в этой области. Здесь алгоритм синтеза апертуры антенны базируется на использовании закона изменения фазы отраженного сигнала при известном относительном движении наблюдаемой цели и фазового центра антенны (ФЦА) [3, 4]. В работе [5] предложен алгоритм синтеза апертуры с компенсацией малых траекторных неустойчивостей.

В докладе описывается развитие этого алгоритма на более общий случай, включающий угловые неустойчивости и сдвиги, превышающие в несколько раз длину волны. Также описывается программная реализация алгоритма и приводятся результаты работы алгоритма на модельных сигналах многоканального ГБО.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Bonifant, William W. Jr.** Interferometric synthetic aperture sonar processing. Georgia Institute of Technology, 1999.
2. **Callow H. J.** Signal processing for synthetic aperture sonar image enhancement / Thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical and Electronic Engineering at the Univ. of Canterbury. Christchurch, New Zealand, 2003.
3. **Костоусов В. Б., Костоусов А. В.** Моделирование ГБО с синтезированной апертурой // Подводные исследования и робототехника. 2008. № 2. С. 16–29.
4. **Агафонов И. Б., Золотарев В. В., Мадисон Е. А.** Анализ применимости первичных гидролокационных данных для синтеза апертуры антенн // Подводные исследования и робототехника. 2011. № 1. С. 32–40.
5. **Агеев А. Л., Игумнов Г. А., Костоусов В. Б., Агафонов И. Б., Золотарев В. В.** Обработка траекторного сигнала многоканального ГБО с целью синтеза апертуры // Материалы 4-й всероссийской научно-технической конференции “Технические проблемы освоения мирового океана”, 2011. С. 322–326.

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИ-МАГНИТОМЕТРИИ

Акимова Е. Н.<sup>1</sup>, Васин В. В.<sup>1</sup>, Мартышко П. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990 Россия; aen15@yandex.ru, vasin@imm.uran.ru

<sup>2</sup>Институт геофизики УрО РАН, ул. Амундсена, 100, Екатеринбург, 620016 Россия; pmart3@mail.ru

**Задача гравиметрии.** Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на земной поверхности. Модель состоит из двух слоев постоянной плотности, разделенных искривленной поверхностью  $S$ . В предположении, что гравитационная аномалия создана отклонением искривленной поверхности  $S$  от горизонтальной плоскости  $z = H$ , функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искривленную поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A[z] \equiv f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} \right\} dx' dy' = G(x, y), \quad (1)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta \sigma$  — скачок плотности на границе раздела сред,  $G(x, y)$  — аномальное гравитационное поле,  $z = H$  — асимптотическая плоскость для данной границы раздела.

**Задача магнитометрии.** Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии по численному восстановлению разделяющей поверхности сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на земной поверхности, и скачке вектора намагниченности. Модель состоит из двух слоев постоянной намагниченности  $J_1$  и  $J_2$ , разделенных поверхностью  $S$ . Функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искривленную поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$B[z] \equiv \Delta J \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{z(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y')]^{3/2}} - \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} \right\} dx' dy' = G1(x, y), \quad (2)$$

где  $\Delta J$  — скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности,  $G1(x, y)$  — аномальное магнитное поле, обусловленное отклонением искривленной поверхности от асимптотической плоскости  $z = H$ .

После дискретизации уравнений (1) и (2) на сетке, где заданы  $G(x, y)$  и  $G1(x, y)$ , и аппроксимации интегральных операторов  $A$  и  $B$  по квадратурным формулам имеем системы нелинейных уравнений, для решения которых используется итеративно регуляризованный метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона с элементами доказательных вычислений и модифицированный метод локальных поправок. На каждом шаге метода Ньютона для решения СЛАУ с заполненной плохо обусловленной матрицей используются итерационные методы градиентного типа. Численная

реализация и распараллеливание алгоритмов для решения нелинейных обратных задач грави-магнитометрии выполнены на российском суперкомпьютере кластерного типа с распределенной памятью (МВС), установленном в ИММ УрО РАН, а также на гибридной вычислительной системе с графическими процессорами с использованием современных технологий. По реальным наблюдаемым данным решены структурные обратные задачи грави-магнитометрии. Проведена комплексная интерпретация гравитационного и магнитного полей, в результате которой выделен участок аномально высокой вариации векового хода геомагнитного поля, который совпадает с зоной пониженной плотности.

Работа поддержана РФФИ (гранты 12-01-00106-а, 12-01-00106-а) и УрО РАН (проект 12-П-15-2019).

## ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Апарцин А. С.

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033 Россия;  
apartsyn@isem.sei.irk.ru*

Основная часть доклада посвящена теории и численным методам решения полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра 1 рода вида

$$\sum_{m=1}^N \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

которые возникают при моделировании нелинейных динамических систем типа вход-выход полиномами Вольтерра. Если ядра  $K_m(t, s_1, \dots, s_m)$ , непрерывные по совокупности переменных, непрерывно дифференцируемые по  $t$  и симметричные по  $s_1, \dots, s_m$ , уже идентифицированы с помощью откликов системы на те или иные наборы тестовых входных сигналов, то задача определения такого входного возмущения  $x(t)$ , который порождает заданный отклик  $y(t)$ , в скалярном случае сводится к решению уравнения (1).

Особый акцент делается на той роли, которую играет в теории подобных уравнений, а также при исследовании сходимости численных методов, функция Ламберта [1, 2].

Рассматривается также проблема численного решения некоторых полиномиальных уравнений Вольтерра 2 рода, для которых, как и для уравнения (1), в общем случае характерно существование вещественного непрерывного на  $[0, T]$  решения лишь при достаточно малом  $T > 0$ .

Доклад отражает развитие исследований, изложенных в [3, 4].

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00722-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J. Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. 1993. N 9. P. 12–22.
2. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5, N 4. P. 329–359.
3. Апарцин А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. 2007. № 8. С. 1380–1388.
4. Апарцин А. С. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 69–81.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Апарцин А. С., Расторгуева Е. В.

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033 Россия;  
apartsyn@isem.sei.irk.ru*

“Визитной карточкой” интегральных моделей развивающихся систем типа В. М. Глушкова [1] является интегральный оператор Вольтерра

$$\int_{a(t)}^t K(t, s)x(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

в котором нижний предел интегрирования  $a(t)$ , управляющий динамикой замены устаревших элементов системы новыми, удовлетворяет неравенству  $a(t) < t \quad \forall t \in [0, T]$ . Это неравенство требует задания предыстории  $x(t) \equiv x^0(t)$ ,  $t \in [a(0), 0)$ , для замыкания соответствующих интегро-функциональных соотношений. Однако при моделировании динамики развития системы с момента ее возникновения, то есть в условиях отсутствия предыстории, естественно считать, что  $a(0) = 0$ .

В докладе рассматривается интегральное уравнение Вольтерра 1 рода

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s)x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где ядра  $K_i$  отражают эффективность функционирования элементов системы, принадлежащих  $i$ -той возрастной группе;  $a_0(t) = t > a_1(t) > \dots > a_n(t) = 0$ ,  $t \in (0, T]$ ;  $a_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Уравнение (1) при  $n = 1$  детально исследовано в [2]. В докладе особое внимание уделено важному для приложений случаю  $K_i(t, s) \equiv \beta_i(t)$ ,  $\beta_i(t) \geq \beta_{i+1}(t) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\beta_1(t) \equiv 1$ ;  $a_i(t) = q_i t$ ,  $0 = q_n < q_{n-1} < \dots < q_0 = 1$ . В частности, при  $\beta_i(t) = 1/2^{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\beta_n(t) \equiv 0$ ;  $q_i = 1/2^i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , получены явные формулы обращения (1). Для произвольных числовых последовательностей  $\{\beta_i\}$ ,  $\{q_i\}$ , удовлетворяющих условию  $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_{i+1})q_i < 1$ , реализован численный алгоритм, основанный на переходе с помощью дифференцирования к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_{i+1})q_i x(q_i t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Как показали расчеты модельных примеров, в узлах основной сетки алгоритм дает второй порядок сходимости по шагу  $h$ , а на специальных подсетках порядок близок к трем.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00722-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.
2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

## ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Асфандиярова Ю. С.

Южно-Уральский государственный университет,  
пр. Ленина, 67, Челябинск, 454080 Россия;  
asfandiyarova@list.ru

В приложениях (например, в теории динамических измерений [1]) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями — многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т.п.

Многие подобные задачи могут быть сформулированы как краевые задачи для линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} L[x] &= x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + p_1x' + p_0x = f(t), \\ U_j(x) &= \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p_i(t)$ ,  $f(t)$  — непрерывные на  $[a, b]$  функции;  $\alpha_j$  — числа;  $U_j(x)$  — линейные, линейно-независимые функционалы.

В настоящей работе описан метод решения обратной задачи (нахождения неизвестной функции  $f(t)$  по экспериментально измеренной  $\tilde{x}(t)$ ) обращением дифференциального оператора с помощью функции Грина, использующий хорошо известное соотношение для решения полуднородной краевой задачи:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $G(t, \tau)$  — функция Грина этой задачи. Это соотношение, являющегося обращением дифференциального оператора (1), представляющего собой уравнение Фредгольма I-го рода, эффективные и устойчивые методы решения которого содержатся, например, в [2, 3].

Был предложен способ построения функции Грина, не использующий фундаментальную систему решений исходного уравнения [4, 5]. Предлагаемый метод, использует усеченную вспомогательную задачу  $x^{(n)} = f(t)$  функция Грина которой  $\tilde{G}(t, \tau)$  может быть найдена непосредственно по определению. Функция Грина основной задачи  $G(t, \tau)$  может быть найдена как решение интегрального уравнения Фредгольма II-го рода:

$$G(t, s) - \tilde{G}(t, s) = \int_a^b G(t, \tau) V(\tau, s) d\tau. \quad (3)$$

На основании описанной теории был разработан алгоритм решения обратной задачи теории динамических измерений и написана компьютерная программа с использованием пакета Mathematica 8.0.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. Л.: Ленингр. отд-ние, 1984.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач. М.: Наука, 1978.



3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. **Zalyapin V. I., Kharitonova N. V., Ermakov S. V.** Inverse problems of the measurements theory // Inverse problems, Design and Optimization Symposium. Miami, USA. 2007. P. 91–96.
5. **Асфандиярова Ю. С.** Численный анализ одной обратной задачи для линейного дифференциального уравнения // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанск. мат. общ-ва, 2010. Т. 40. С. 32–36.

## INVERSE DIPOLE SOURCE PROBLEM FOR TIME-HARMONIC MAXWELL’S EQUATIONS: ALGEBRAIC ALGORITHM AND HÖLDER STABILITY

El Badia A.<sup>1</sup>, Nara T.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*University of Technology of Compiègne, France. LMAC; abdellatif.elbadia@utc.fr*

<sup>2</sup>*The University of Electro-Communications, Japan; nara@mce.uec.ac.jp*

The goal of this work is to investigate the inverse source problem for the time harmonic Maxwell’s equations. This problem has attracted significant attention in localization of electro-magnetic field source using a sensor array [1–3]. We consider the problem of determining the source current density  $\hat{J}$  in the time-harmonic Maxwell’s equations

$$\begin{aligned} -i\omega\epsilon\hat{E} + \sigma\hat{E} - \nabla \times \hat{H} &= -\hat{J} \quad \text{in } R^3 \\ -i\omega\mu\hat{H} + \nabla \times \hat{E} &= 0 \quad \text{in } R^3 \end{aligned}$$

together with the Silver — Müller radiation condition

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left( \sqrt{\mu_0} \hat{H} \times \frac{x}{|x|} - \sqrt{\epsilon_0} \hat{E} \right) = 0$$

from measurements of the tangential components of the electric and magnetic fields on a sufficiently regular boundary  $\Gamma$  of a bounded volume  $\Omega$  in  $R^3$ .

It is known that, in generale case, a source current cannot be uniquely identified. Thus, we have to restrict our problem in some ways. To this end, we suppose that the current source term  $\hat{J}$  is expressed by the multiple dipoles given by

$$\hat{J} = \sum_{k=1}^N q_k \delta(r - S_k), \quad S_k \in \Omega, \quad q_k (\neq 0) \in C^3, \quad (1)$$

where  $\delta$  is the Dirac measure. In other words the current source is a linear combination of a finite number of localized dipoles at points  $S_k$  with moments  $q_k$ .

The problem considered in this paper consists of determining the number  $N$ , locations  $S_k$ , and directions  $q_k$  for  $k = 1, 2, \dots, N$  of dipoles from the measurements of the tangential components of the electric field  $E \times n$  and the tangential components of the magnetic field  $H \times n$  on  $\Gamma$ . In this work, first we show the uniqueness of the solution to our inverse problem using analytical discussion and propose an algorithm to determine the parameters of  $J$  algebraically from measurements of  $E \times n$  and  $H \times n$  on the boundary. Then we discuss a Holder stability result. Finally, a numerical experiments will be presented.

### REFERENCES

1. **Albanese R., Monk P. B.** The inverse source problem for Maxwell’s equations // Inverse problems. 2006. V. 22. P. 1023–1035.
2. **Ammari H., Bao G., Fleming J. L.** An inverse source problem for Maxwell’s equations in magnetoencephalography // SIAM J. Appl. Math. 2002. V. 62. P. 1369–1382.
3. **He S., Romanov V. G.** Identification of dipole sources in a bounded domain for Maxwell’s equations // Wave Motion. 1998. V. 28. P. 25–40.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Баканов Г. Б.

*Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата;*  
Gbakan58@mail.ru

Отметим, что необходимость исследования дифференциально-разностных и конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии впервые было высказано академиком М. М. Лаврентьевым, сформулировано им как новое перспективное направление. Задачи интегральной геометрии состоят в нахождении функции, определенной на некотором многообразии, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий меньшей размерности [1]. В работах [2–4], получены оценки устойчивости конечно-разностных и дифференциально-разностных аналогов двумерных и трехмерной задач интегральной геометрии для семейства кривых, удовлетворяющих некоторым условиям типа регулярности.

Пусть  $\mu \in C^2$  и

$$U(x, \varphi) = \int_{\gamma(x, \varphi)} \mu dx, \quad (1)$$

где  $\gamma(x, \varphi)$  — кривая, проходящая через точку  $x \in D_x$  в направлении  $\varphi$ , причем один конец кривой  $\gamma(x, \varphi)$  в точке  $x$ , а другой лежит на границе области  $D_x$ .

Требуется определить функцию  $U$  в области  $D_x$ , если известны интегралы от этой функции по кривым из заданного семейства  $\{\gamma\}$ . В работе [5] показано, что задача интегральной геометрии (1) эквивалентна следующей задаче: определить пару функций  $(U, \mu)$  в области  $D_x$  из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \sin \varphi + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cos \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi} f = \mu(x, \varphi), \quad (2)$$

если дано условие

$$U|_{\Gamma} = \Psi, \quad (3)$$

где  $x \in D_x$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $D_x$  — область с конечно-гладкой границей  $\partial D_x$ ,  $\Gamma = \{(x, \nu): x \in D_x, |\nu| = 1\}$ .

В данной работе исследован дифференциально-разностный аналог задачи (2)–(3), а также пользуясь методикой, предложенной в работах [2–4], получена оценка устойчивости дифференциально-разностной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Романов В. Г., Кабанихин С. И., Баканов Г. Б. Исследование дифференциально-разностного аналога трехмерной задачи интегральной геометрии // ДАН. 1990. Т. 311, № 4. С. 794–797.
3. Кабанихин С. И., Баканов Г. Б. Об устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии // ДАН. 1987. Т. 292, № 1. С. 25–29.
4. Kabanikhin S. I., Bakanov G. B. On the stability estimation of finite-difference and differential-difference analogues of a two-dimensional integral geometry problem / Computerized Tomography. Proc. of the 4th Intern. symposium. Utrecht: VSP, 1995. P. 246–258.
5. Амиров А. Х. Интегральная геометрия и связанные с ней обратные задачи / Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Институт математики, Сиб. отд-ние РАН, 1992. С. 19–25.

## МЕТОД СОВМЕСТНОГО ОБРАЩЕНИЯ 3D СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Баландин А. Л.

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН,  
Иркутск, Россия; balandin@icc.ru*

В большинстве физических приложений векторное лучевое преобразование по-  
является в виде

$$\mathcal{V}_{\mathcal{I}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} dt, \quad \mathcal{I}\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) dt, \quad (1)$$

$\mathbf{x} \in \boldsymbol{\xi}^{\perp}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega \subset \mathbb{S}^2.$

Например, в случае поляризационных измерений функции  $\varepsilon(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  имеют  
смысл электронной плотности и магнитного поля. При доплеровских измерениях  
эти функции имеют, соответственно, смысл функции распределения коэффициентов  
эмиссии и поля скоростей. В работе предложен метод совместного решения уравне-  
ний (1), (совместное обращение скалярного и векторного лучевых преобразований).  
Первое из уравнений (1) в пространстве Фурье имеет вид

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{I}}\mathbf{g}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^3 \xi_j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Функцию  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k})$  представляем в виде

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(k\lambda) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad k = |\mathbf{k}|, \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (3)$$

коэффициенты  $a_{lm}$  определяются из второго уравнения (1) в соответствии с теоре-  
мой о центральном сечении,  $j_l(k\lambda)$  — сферические функции Бесселя,  $\lambda$  — константа,  
 $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$  — сферические гармоники. Трехмерная свертка, (2), вычисляется с исполь-  
зованием следующей теоремы сложения [1]

$$j_{l_1}(\lambda r_2) Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} S_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{b}) j_{l_2}(\lambda r_1) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}_1), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b} \quad (4)$$

$$S_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{b}) = 4\pi i^{l_2 - l_1} \sum_{l_4=0}^{\infty} i^{l_4} (-1)^{m_1} j_{l_4}(\lambda b) Y_{l_4, (m_2 - m_1)}^*(\hat{\mathbf{b}}) G(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3),$$

$$G(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 (m_1 + m_2)}$$

Гаунт (Gaunt) коэффициенты,  $G(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3)$ , выражаются через коэффициенты  
Клебша — Гордана. В докладе представлены результаты численного моделирова-  
ния.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Sack R. A.** Three-dimensional addition theorem for arbitrary functions involving expansions  
in spherical harmonics // J. Math. Physics. 1964. V. 5, N 2. P. 252–259.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА — ШАФРАНОВА И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Безродных С. И.<sup>1,2</sup>, Власов В. И.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,  
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333 Россия*

<sup>2</sup>*ГАИШ МГУ, Университетский просп., 13, Москва, 119992 Россия;  
sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru*

Уравнение Грэда — Шафранова с аффинной правой частью  $\Delta u(x) = au(x) + b$  рассматривается в плоских односвязных областях  $G$  с кусочно  $C^{3,\alpha}$ -гладкой границей  $\Gamma$ , на которой задано однородное условие Дирихле и нелокальное условие  $\int_{\Gamma} \partial_{\nu} u(x) ds = 1$ , где  $ds$  — элемент длины дуги  $\Gamma$ , а  $\partial_{\nu}$  — производная по внешней нормали к  $\Gamma$ . Последнее условие связывает параметры  $a$  и  $b$  уравнения зависимостью  $b(a) = [|\Gamma| - a \int_G \int_G \mathcal{G}_a(x, y) dx dy]^{-1}$ , где  $\mathcal{G}_a(x, y)$  — функция Грина, и, тем самым, делает рассматриваемую краевую задачу зависящей лишь от параметра  $a$ , считающегося заранее неизвестным. Задачу об определении этого параметра по информации о нормальной производной  $\partial_{\nu} u(x)$  на границе  $\Gamma$  называют обратной задачей для уравнения Грэда — Шафранова. Такая задача возникает в связи с проблемами магнитной гидродинамики [1]. В работе установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости этой задачи.

Обозначая нормальную производную  $\partial_{\nu} u(x, a)$ , рассматриваемую как функцию параметра  $a$ , через  $\mu = \mu_x(a)$ , получаем для нее, используя результаты из [1], следующие асимптотики, справедливые в точках  $x$  гладкости  $\Gamma$  с кривизной  $k(x)$ :

$$\mu_x(a) = |\Gamma|^{-1} + [\pi|\Gamma|^{-2} - k(x)(2|\Gamma|)^{-1}] a^{-1/2} + O(a^{-1}), \quad a \rightarrow \infty;$$

$$d\mu_x(a)/da = [k(x)(4|\Gamma|)^{-1} - \pi 2^{-1}|\Gamma|^{-2}] a^{-3/2} + O(a^{-2}), \quad a \rightarrow \infty.$$

На основе этих асимптотик и высокоточных численных экспериментов, выполненных с помощью метода мультиполей [2] для широкого класса областей  $G$ , установлено, что на границе любой из областей существует подмножество  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ , в каждой точке  $x$  которого функция  $\mu = \mu_x(a)$  является строго монотонной во всем диапазоне  $(-\lambda_1, +\infty)$  изменения  $a$ , а значит, для точек  $x \in \tilde{\Gamma}$  существует обратная функция  $a = a_x(\mu)$ , которая и дает решение рассматриваемой обратной задачи.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-01-00837), Программой ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”, проект “Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики” и Программой № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Demidov A. S., Moussaoui M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Inv. Problems. 2004. V. 20. P. 137–154.
2. Власов В. И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

## APPLICATION OF SPLINES FOR DETERMINING THE VELOCITY CHARACTERISTIC OF A MEDIUM ACCORDING TO SEISMIC PROFILING DATA

Bogdanov V. V.<sup>1</sup>, Karsten W. V.<sup>2</sup>,  
Miroshnichenko V. L.<sup>1</sup>, Volkov Yu. S.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia;  
bogdanov@math.nsc.ru, miroshn@math.nsc.ru, volkov@math.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptyug, 3, Novosibirsk, 630090 Russia;  
karstenvv@ipgg.nsc.ru*

The essence of an inverse kinematic problem on the determination of velocity characteristic of a medium, from a vertical seismic survey (the proximity survey problem) is the following. Let the receivers registering P-wave traveltimes be placed in the points  $\mathbf{x}_i^0 = (x_0, y_0, \zeta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , distributed along a vertical well (Cartesian-coordinate system; axis  $Oz$  directed downward from the surface to the Earth subsurface;  $x_0, y_0$  are the coordinates of the wellhead). It is assumed that seismic waves are generated (as a rule, by explosion) at the points  $\mathbf{Q}_k = (x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$  (source points), located in a neighborhood of the well. It is required to determine the velocity profile of the medium around the borehole, i.e. to describe the velocity  $v(x_0, y_0, z)$  of propagation of seismic P-waves through the medium according to the listed first-arrival times.

Traditional methods for solving the inverse kinematic problem use additional a priori information about the horizontal-bedding structure of the borehole area. It is assumed that this medium consists of a number of layers with the constant velocity of seismic wave in each layer. The required layer velocity values are found by residual functional minimization for the difference between the observed traveltimes of seismic waves and the time values which are found from the seismic traces of signal propagation in the horizontal layered medium (see for example [1]).

The solution algorithm for the proximity survey problem submitted here is based on the combined use of eikonal equation and spline approximation methods for functions of several variables. First, using the data of the first arrival times of the seismic signal from several shotpoints, which are registered by receivers located in the vertical borehole, a spline approximating the function of first arrival time of the signal from source points to any point in the Earth subsurface is constructed. Then with the help of the eikonal equation the characteristic of the medium around the borehole is determined. A similar approach was used in [2] to find the velocity characteristic of focal zones of Earthquakes. The proximity survey problem is considered in an assumption of horizontally layered medium. However, there are no assumptions about the number of layers and their thickness. Moreover the medium can be deemed to be only horizontally constant, without any division to layers. The feature of the proximity survey problem consists in quite a limited amount of initial information (a small number of shotpoints). This circumstance leads to necessity of adding a priori information about the examined medium structure to the solution algorithm. Original method is proposed to increase the amount of original information based on the use of so-called fictitious wells.

The first, third and fourth authors were partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-07-00447) and by the Urals Branch and the Siberian Branch of RAS (project 2012-32).

#### REFERENCES

1. **Sayfy A. M., Azzawi K. A., Makky S. M.** Seismic inverse problems: determining seismic wave speeds using arrival times // *Int. J. Comput. Math.* 2006. V. 83, N 11. P. 797–808.
2. **Anikonov Yu. E., Bogdanov V. V., Derevtsov E. Yu., Miroshnichenko V. L., Pivovarova N. B., Slavina L. B.** Some approaches to a numerical solution for the multidimensional inverse kinematic problem of seismic with inner sources // *J. Inv. Ill-Posed Problems.* 2009. V. 17, N 3. P. 209–238.

## МЕТОД КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛА

Боков А. В.

*Южно-Уральский государственный университет,  
просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080 Россия;  
bokov@susu.ac.ru*

Задача определения запасов полезных ископаемых в геологоразведке часто формулируется как обратная задача потенциала, то есть задача определения формы области залегания полезного ископаемого по его внешнему потенциалу. Эта задача описывается нелинейным интегральным уравнением

$$Ku \equiv \frac{\rho}{4\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{(t-s)^2 + H^2}{(t-s)^2 + (H-u(s))^2} ds = f(t), \quad (1)$$

где  $-\infty < t < \infty$ ,  $u(s) \in L_2[-a, a]$ ,  $Ku \in L_2(-\infty, \infty)$ .

Предполагается, что при  $f = f_0(t)$  существует множество точных решений  $M_0 \subset L_2[-a, a]$  уравнения (1), но функция  $f_0(t)$  не известна и вместо нее известны  $f_\delta$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta. \quad (2)$$

Требуется по  $(f_\delta, \delta)$  построить множество  $M_\delta$  приближенных решений уравнения (1) такое, что

$$M_\delta \xrightarrow{\beta} M_0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3)$$

Для решения задачи используется метод регуляризации А. Н. Тихонова, который заключается в сведении данной задачи к вариационной

$$\inf \{ \|Ku - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{L_2}^2 : u \in D(K) \}, \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Доказано существование множества решений  $M_\delta^{\alpha, \varepsilon}$ , на котором выполняется условие

$$\hat{u} \in M_\delta^{\alpha, \varepsilon} \Leftrightarrow \|K\hat{u} - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\hat{u}\|_{L_2}^2 \leq \inf \{ \|Ku - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{L_2}^2 \} + \varepsilon. \quad (5)$$

Кроме того, если  $\alpha = \alpha(\delta, \varepsilon)$  выбрать таким, что  $\alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $(\delta^2 + \varepsilon)/\alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то будет иметь место  $\beta$ -сходимость  $M_\delta^{\alpha(\delta, \varepsilon), \varepsilon} \xrightarrow{\beta} M_0$ . При этих условиях оператор  $K$  не будет слабо-сильно замкнутым.

Для получения численного решения используются конечномерные аппроксимации в методе регуляризации А. Н. Тихонова. Задача решается итерационным методом.

Работа частично была поддержана РФФИ (грант р-урал.а №10-01-96000).



## МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИИ

Булатов М. В.<sup>1</sup>, Будникова О. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт динамики систем и теории управления СОРАН,  
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033 Россия; mvbul@icc.ru*

<sup>2</sup>*Восточно-Сибирская государственная академия образования,  
ул. Нижняя-Набережная, 6, Иркутск, 664011 Россия; osbud@mail.ru*

В докладе рассмотрены системы интегральных уравнений вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s) ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (1)$$

с условием

$$\det A(t) \equiv 0,$$

где  $A(t)$  и  $K(t,s)$  — матрицы размерности  $(n \times n)$ ,  $f(t)$  и  $x(t)$  —  $n$ -мерные известная и искомая вектор-функции.

Такие задачи принято называть интегро-алгебраическими уравнениями.

Для численного решения задачи (1) сконструированы многошаговые методы основанные на явных методах типа Адамса и экстраполяционных формулах, которые имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}.$$

В докладе выделен класс задач (1), для которых доказана сходимость предлагаемых методов и показано, что данные методы обладают свойством саморегуляризации, а параметром регуляризации является шаг сетки, определенным образом связанный с уровнем погрешности правой части рассматриваемой системы.

Исследования поддержаны грантом РФФИ No 10-01-00571a.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НОВОГО АЛГОРИТМА ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

Важнецва Н. В., Лихачев А. В.

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 1, Новосибирск, 630090 Россия; ipm1@iae.nsk.su*

Для преобразования Радона имеет место условие Кавальери, согласно которому моменты  $k$ -го порядка одномерных проекций являются однородными многочленами степени  $k$  от компонент вектора  $\mathbf{n}$ , определяющего ориентацию проекции [1]. В работе [2] авторами предложен метод томографической реконструкции для неполных траекторий источника. Исходя из конусных проекций, по теореме Гранжа [3] там, где это возможно, вычисляется производная от трехмерного преобразования Радона искомой функции. Согласно модифицированному условию Кавальери, она экстраполируется на всю область определения. Далее для реконструкции используется формула обращения преобразования Радона.

При практическом применении разработанного метода встает вопрос о количестве первых моментов  $K_0$ , которое целесообразно использовать для реконструкции первых производных неизвестных проекций. Чтобы найти момент  $k$ -го порядка, используются коэффициенты однородных полиномов  $a_{ijl,k}$ , которые вычисляются путем решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+l=k} a_{ijl,k} n_{1x}^i n_{1y}^j n_{1z}^l &= M_k(\varphi_1, \theta_1), \\ &\dots \\ \sum_{i+j+l=k} a_{ijl,k} n_{Nx}^i n_{Ny}^j n_{Nz}^l &= M_k(\varphi_N, \theta_N). \end{aligned} \tag{1}$$

В правой части (1) стоят моменты производных известных проекций, через  $n_{rx}$ ,  $n_{ry}$ ,  $n_{rz}$ , обозначены компоненты направляющего вектора этих проекций.

Проведено исследование одного из возможных критериев выбора числа  $K_0$ , связанного с обусловленностью системы (1). В качестве  $K_0$  берется минимальный порядок момента для которого выполняется неравенство  $\overline{M_{K_0}} \leq \Delta M \cdot \text{cond}(A)$ , где  $\overline{M_{K_0}}$  — среднее значение моментов порядка  $K_0$  производных известных проекций,  $\Delta M$  — точность, с которой заданы эти моменты,  $\text{cond}(A)$  — число обусловленности матрицы системы (1) при  $k = K_0$ . Для использованных в работе данных число  $K_0$  оказалось равным 12–15. Вычислительный эксперимент показал, что использование в алгоритме моментов, имеющих порядок больше этой величины, приводит лишь к незначительному увеличению ошибки реконструкции. Если же их число более чем в 1.3 раза превосходит  $K_0$ , то наблюдается рост ошибки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000.
2. Важнецва Н. В., Лихачев А. В. Новый метод трехмерной томографии для неполных траекторий источника / Междунар. конф. Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика, Новосибирск, Россия, 2011. <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38813/46493/Likhachov.2.pdf>
3. Grangeat P. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Int. conf. Mathematical Methods in Tomography, Oberwolfach, Germany, 1990. P. 66–97.

## ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ватульян А. О.

*Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а,  
Ростов-на-Дону, 344090 Россия; vatulyan@math.rsu.ru*

Изучение коэффициентных обратных задач об определении коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих деформирование различных объектов в механике, имеет большое значение для совершенствования линейных и нелинейных моделей неоднородных сред. Подобные задачи стали особенно актуальны в связи с многочисленными приложениями в различных разделах, использующих модели механики неоднородных структур- модели геофизики и горной механики, пенистых и пористых сред, биологических тканей. Кроме того сюда же относятся проблемы акустического контроля свойств при создании функционально-градиентных материалов, композитов в рамках линейных моделей (упругие, вязкоупругие, пористоупругие, термоупругие, электроупругие среды). Для адекватного описания поведения таких объектов при динамическом воздействии необходим отказ от гипотезы однородности и использование моделей с переменными физическими характеристиками. Наиболее адекватной постановкой для таких задач является такая, в которой известны (измерены) граничные поля физических полей в некотором частотном диапазоне, которая приводит к нелинейным операторным уравнениям, содержащим промежуточные переменные-компоненты физических полей.

Обратные задачи в такой постановке могут быть исследованы лишь численно на основе некоторых итеративных процедур. Существенным моментом при организации итерационного процесса является подходящий выбор начального приближения среди функций простой структуры (линейных, кусочно-постоянных). В работе представлен способ построения итерационных процессов на основе сочетания слабой постановки и процедуры линеаризации, что позволяет получать операторные уравнения первого рода с компактными операторами относительно поправок. При этом на каждой итерации сочетается процедура решения прямой задачи для неоднородной среды на основе либо аппарата интегральных уравнений Фредгольма второго рода, либо конечноэлементных технологий и процедура обращения линейного вполне непрерывного оператора на основе метода А. Н. Тихонова. Обсуждены особенности организации итерационных процессов при исследовании широкого класса операторов, встречающихся при моделировании линейно деформируемых сред, в том числе для моделей связанных полей-термоупругость, электроупругость, пороупругость, а также для линеаризованных моделей предварительного напряженного состояния. Представленный новый подход апробирован применительно к исследованию широкого класса обратных задач. Приведены примеры реконструкции одномерных и двумерных функций для различных линейных моделей механики (стержневые, пластинчатые и слоистые структуры для задач электроупругости, пороупругости и термоупругости), исследованы особенности постановок в задачах о реконструкции модулей упругости, плотности, пьезоэлектрических характеристик и предварительного напряженного состояния, выявлены частотные диапазоны и режимы нагружения, обеспечивающие наилучшую реконструкцию, представлены экономичные способы построения начального приближения на основе априорной информации об ограниченности искомых функций.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00194-а), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

## РЕКОНСТРУКЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО ПОРОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Ватульян А. О., Козин С. В., Ляпин А. А.

*Южный Федеральный университет,  
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, 344090 Россия;*  
vatulyan@math.rsu.ru, sam@levelup-team.ru, alexlpn@hotmail.com

В настоящее время исследование различных сред со сложной структурой приобретает все большую популярность. Примером таких структур являются пороупругие насыщенные жидкостью среды. Растущий интерес также связан с появлением такой новой области науки, как, например, биомеханика. Многие ткани организма, в том числе костная ткань, для своего математического описания требуют учета сложной структуры среды.

Костная ткань по своей природе является сильно неоднородной. Наружная часть трубчатой кости состоит из более плотного костного вещества. Внутренняя часть суставных головок состоит из губчатого костного вещества, образованного системой взаимно пересекающихся костных перегородок, между которыми в ячейках находится костный мозг. Средняя же часть кости обычно имеет внутри более или менее обширную полость, заполненную костным мозгом; у некоторых видов трубчатых костей центральная часть тела наполнена губчатым костным веществом.

Таким образом, для точного описания поведения костной ткани необходимо учитывать сложную пористую структуру, а также неоднородность пороупругих характеристик, как по сечению кости, так и по длине. Жидкая фаза, располагающаяся в порах скелета, значительно влияет на различные динамические процессы и требует особого внимания при описании среды.

В представляемом докладе речь пойдет о реконструкции упругих и пороупругих свойств кости. В качестве модели был взят пороупругий неоднородный по длине стержень, для описания поведения которого, была использована модель пороупругой среды, где неизвестными являются компоненты вектора смещений и давление жидкости в порах, а также учитываются высокочастотные слагаемые, что делает многие параметры комплексными функциями, зависящими от частоты [1]. Рассматриваемый стержень жестко зашпелен на нижнем конце и подвергается нагружению продольной силой в режиме установившихся колебаний на верхнем. Решение прямой задачи реализовано численно при помощи метода стрельбы. Приведены амплитудно-частотные характеристики задачи. Выведено операторное соотношение для анизотропных пороупругих сред в общем случае, на основе которого путем введения соответствующих гипотез и использования граничных условий. Решение обратной задачи сведено к последовательности решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Для различных законов неоднородности упругого модуля и модуля Био приведены результаты реконструкции в нескольких частотных диапазонах.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00194-а), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Маслов Л. Б.** Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Иваново: ПресСто, 2010.

## ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

Вахитов И. С.

*Институт прикладной математики ДВО РАН,  
ул. Радио, 7, Владивосток, 690041 Россия; iv7180@gmath.com*

В ограниченной области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  рассматривается обратная задача идентификации старшего коэффициента для уравнения конвекции-диффузии-реакции. Задача заключается в нахождении пары функций  $(\varphi, \lambda)$  по дополнительным измерениям в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$  из соотношений

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + \kappa \varphi = f, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi \quad (1)$$

и дополнительном условии  $\varphi = \varphi_d$  в  $Q$ , где  $\varphi_d$  — заданная в  $Q$  функция.

Рассматриваемая задача идентификации сводится к задаче нахождения условного минимума функционала

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad (2)$$

где  $s > d/2$  — заданный параметр.

С использованием предложенных в работах [1, 2] методов исследуется разрешимость рассматриваемой обратной экстремальной задачи, обосновывается применение принципа неопределенных множителей Лагранжа, выводится система оптимальности. Основываясь на анализе системы оптимальности, устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость ее решения относительно малых возмущений исходных данных. Полученные оценки устойчивости можно записать в виде

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{H^s(\Omega)} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon\mu_1} [\|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_{H^1(Q)} + \beta(\|f_1 - f_2\|)], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^1(\Omega)} &\leq C_0 \gamma_0 M_\varphi^0 \sqrt{\mu_0/\varepsilon\mu_1} \\ &\times [\|\varphi_d^{(1)} - \varphi_d^{(2)}\|_{H^1(Q)} + \beta(\|f_1 - f_2\|) + C_0 \|f_1 - f_2\|]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\beta(\cdot)$  — заданная на интервале  $[0, \infty)$  непрерывная функция,  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое число.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты N 10-01-00219-а, N 11-01-98508-р-восток-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
2. Вахитов И. С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневост. мат. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 93–105.

## К ВОПРОСУ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Вдовин А. Ю., Рублева С. С.

Уральский государственный лесотехнический университет,  
ул. Сибирский тракт, 37, Екатеринбург, 620100 Россия;  
vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Рассматривается задача восстановления неизвестного воздействия  $v(\cdot)$  в системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_a, \quad v(a) = v_a, \quad (1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$ ,  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_q(t))^T$ , по неточной информации  $x_h(\cdot)$  о ее движении  $x(\cdot)$ :  $|x_h(\cdot) - x(\cdot)| \leq h$ . Оригинальный подход к решению таких задач был предложен Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским в [1]. Его особенность состоит в том, что алгоритм решения задачи трактуется как процесс позиционного управления, при этом объектом управления является специальным образом подобранная динамическая система — модель, движение которой формируется синхронно с движением системы (1). Указанное управление осуществляется по принципу обратной связи, с помощью, так называемого, экстремального сдвига, введенного Н. Н. Красовским в теории позиционных дифференциальных игр. Существенным вкладом упомянутых авторов метода явилась идея регуляризации (в смысле теории некорректных задач) экстремального сдвига. Построенная процедура обладает локальным характером, что позволяет осуществлять ее реализацию в режиме реального времени, при этом существенно, что возникает и глобальный регуляризирующий эффект. Этот концептуальный подход получил название *динамической регуляризации* [2].

В докладе обсуждаются результаты, выполненные в рамках этого подхода. Рассматривается задача восстановления неизвестного воздействия в существенно нелинейной динамической системе (1). Показывается, что в качестве модели может быть использована аффинная по управлению система. Свойства аппроксимации движений и воздействий в системах такого сорта рассматривались в [3]. Предлагается численный метод указанной задачи, а также указываются условия, при которых он обладает свойством устойчивости по отношению к ошибкам измерения.

Работа выполнена по заданию Минобрнауки России на проведение научных исследований на 2012 год по теме № 1.3.11.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Osipov Yu. S., Kryazhinskii A. V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
2. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.
3. Вдовин А. Ю., Рублева С. С. О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 3. С. 337–358.

# РАНДОМИЗАЦИЯ КАК ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Войтишек А. В.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия;  
vav@osmf.ssc.ru*

## 1. Рандомизированные методы решения задач переноса излучения.

Традиционно понятие *рандомизация* используется в вычислительной математике в связи с развитием теории методов Монте-Карло (см., например, [1]). При этом классической считается оценка  $\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m h(\xi^{(m)})$  линейного функционала  $I_h = (\varphi, h) = \int \varphi(x)h(x) dx = E\zeta$  от решения  $\varphi$  интегрального уравнения Фредгольма второго рода  $\varphi = K\varphi + f$  или  $\varphi(x) = \int k(x', x)\varphi(x') dx' + f(x)$ ; здесь  $k(x', x)$ ,  $f(x)$  — соответственно ядро интегрального оператора  $K$  и свободный член уравнения,  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$  — однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица (при этом  $N$  — случайный номер обрыва цепи) и имеющая начальную плотность  $\pi(x)$  и переходную плотность (функцию)  $p(x', x)$ ; случайные веса  $Q_m$  определяются рекуррентно:  $Q_0 = f(\xi^{(0)})/\pi(\xi^{(0)})$ ;  $Q_m = Q_{m-1}k(\xi^{(m-1)}, \xi^{(m)})/p(\xi^{(m-1)}, \xi^{(m)})$ . Случайная величина  $\zeta$  называется оценкой по столкновениям в связи с тем, в частности, что является “основной” при решении фундаментальных и прикладных задач теории переноса излучения [2]. Заметим, что оценка  $\zeta$  (и соответствующий алгоритм метода Монте-Карло, связанный с приближением  $I_h \approx Z_n = (\zeta_1 + \dots + \zeta_n)/n$ , где  $\zeta_i$  — численные реализации случайной величины  $\zeta$ ) позволяют решать задачу счетной размерности в связи с представлением приближаемого функционала в виде  $I_h = \sum_{m=0}^{\infty} (K^m f, h)$ , а специальный выбор плотностей  $\pi(x)$  и  $p(x', x)$  позволяет учесть особенности (в том числе, “сложные”, представимые в виде дельта-функций) свободного члена  $f(x)$  и ядра  $k(x', x)$ . Также особо отметим, что упомянутые преимущества метода Монте-Карло проще всего показать на примерах вычисления многократных интегралов (см., например, [1, 3]), ведь слагаемые  $(K^m f, h)$  из последней суммы представляют собой набор интегралов бесконечно возрастающей кратности.

**2. Рандомизация численных итерационных методов.** При построении разностных схем для численного решения актуальных прикладных задач возникают проблемы реализации итерационных методов  $\mathbf{x}^{(m+1)} = A\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ; при этом размеры  $T \times T$  матрицы  $A$  могут оказаться экстремально большими. В работе [4] нами исследована возможность специальной рандомизации матрицы  $A$ , основанной на случайном выборе  $L \ll T$  столбцов и построении случайной матрицы  $G$  размера  $T \times L$  такой, что  $EG = A$ . Проведено исследование по оптимальному выбору параметра  $L$ . Другой пример эффективного применения рандомизации связан с построением алгоритмов самоорганизации, к которым, в частности, относятся автоматизированные методы построения адаптивных сеток [5].

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-01-00040).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
2. Марчук Г. И. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.

3. **Войтишек А. В.** Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
4. **Булгакова Т. Е., Войтишек А. В.** Условная оптимизация рандомизированного итерационного метода // Журн. вычисл. мат. мат. физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1148–1157.
5. **Войтишек А. В., Хмель Д. С.** Аналитическое описание применения одномерной схемы Т. Кохонена для построения адаптивных сеток // Сиб. журн. вычисл. мат. 2011. Т. 14, № 2. С. 131–140.



## ОЦЕНИВАНИЕ МОМЕНТА ОСТАНОВА ИТЕРАЦИОННОГО ВЕЙВЛЕТ-АЛГОРИТМА ДЕКОНВОЛЮЦИИ

Воскобойников Ю. Е.

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Ленинградская 113, Новосибирск, 630008 Россия; voscob@mail.ru*

После дискретизации интегрального уравнения-свертки задача деконволюции сводится к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$K\varphi = f,$$

где правая часть  $f$  задана измеренными со случайной ошибкой значениями (вектором  $f$ ), а матрица  $K$  является циркулянтном.

Регуляризованное решение находится из условия минимума функционала:

$$J(\varphi) = \|K\varphi - \tilde{f}\|_2^2 + \alpha\|\varphi\|_1,$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации. В отличие от классических схем регуляризации присутствие  $l_1$ -нормы позволяет восстанавливать “негладкие” функции, но делает регуляризирующий алгоритм нелинейным. В ряде последних публикаций (например, [1]) предложен эффективный итерационный алгоритм вычисления  $\varphi_\alpha$ , представляющий собой комбинацию двух схем: итерационного алгоритма Ливенберга и алгоритма вейвлет-фильтрации.

В данной работе наряду с параметром  $\alpha$  вводится “управляющий” параметр — номер итерации останова алгоритма Ливенберга. Для оценивания номера оптимальной итерации  $n_{opt}$  (минимизирующей СКО ошибки решения) используется критерий оптимальности [2], хорошо зарекомендовавший себя при выборе параметров в линейных регуляризирующих алгоритмах. Оценка вычисляется на основе проверки статистических гипотез об оптимальности вектора невязки. Выполненный вычислительный эксперимент показал приемлемую точность оценивания оптимальной итерации (отклонения от  $n_{opt}$  составляли 1, 2 итерации), что позволяет говорить об эффективности предложенной оценки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Vonesch C., Unser M.** A fast thresholded Landweber algorithm for wavelet-regularized multidimensional deconvolution // IEEE Trans. Image Process. 2008. V. 17, N 4. P. 539–549.
2. **Voskoboinikov Yu. E.** Estimating the optimal parameter of regularizing algorithms for image restoration // Optoelectron, Instrum. Data Process. 1995. N 3. P. 64–73.

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Гаврилов С. В., Денисов А. М.

*МГУ имени М. В. Ломоносова, ГСП-1, Ленинские горы, Москва, 119991 Россия;*  
gvr1srg@gmail.com, den@cs.msu.ru

Рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной области с кусочно-постоянным коэффициентом электрической проводимости.

Пусть  $\Omega$  и  $\Omega_1$  — односвязные ограниченные области в трехмерном пространстве с границами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  соответственно, причем  $\overline{\Omega_1} \in \Omega$ . Поверхности  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  достаточно гладкие. Обозначим через  $\Omega_0$  область  $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ .

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется определить функцию  $u(M)$ , такую что:  $u \in C(\overline{\Omega})$ ,  $u(M) = u_i(M)$ ,  $M \in \Omega_i$  ( $i = 0, 1$ ), где  $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})$  ( $i = 0, 1$ ),

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad \sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_0, \sigma_1$  — заданные положительные постоянные;  $f(M)$  — функция, непрерывная и не постоянная на  $\Gamma_0$ .

Сформулируем задачу электроимпедансной томографии. Пусть в краевой задаче (1)–(3) поверхность  $\Gamma_0$ , постоянные  $\sigma_0, \sigma_1$  и функция  $f(M)$  на  $\Gamma_0$  заданы, а поверхность  $\Gamma_1$  неизвестна. Требуется определить  $\Gamma_1$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(3):

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (4)$$

где  $g(M)$  — известная функция, непрерывная на  $\Gamma_0$ ;  $n$  — внутренняя нормаль к  $\Gamma_0$ .

Для численного решения сформулированной задачи электроимпедансной томографии предложен итерационный метод, основанный на теории потенциалов, линеаризации нелинейного операторного уравнения для функции, задающей неизвестную поверхность  $\Gamma_1$ , и методе регуляризации. Итерационные методы решения задачи электроимпедансной томографии в двумерном случае рассматривались в [1, 2].

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00259).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Eckel H., Kress R.** Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem // *Inv. Problems*. 2007. V. 23. P. 475–491.
2. **Гаврилов С. В., Денисов А. М.** Численные метод определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // *Журн. вычисл. мат. мат. физики*. 2011. Т. 51, № 8. С. 1–14.

## THE OPTIMAL PERTURBATION REGULARIZATION ALGORITHM FOR FUNCTION RECONSTRUCTION IN THE DIFFUSION EQUATION

Gongsheng Li

*Institute of Applied Mathematics,  
Shandong University of Technology, Zibo, 255049, China;  
ligs@sdut.edu.cn, lgs9901@163.com*

Consider inverse problems of determining coefficient functions in 1-D advection diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - v \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t; u), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

and the fractional diffusion equation ( $0 < \gamma, \beta \leq 1$ )

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \right) + S(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

We will deal with five kinds of cases based on Eq.(1) and Eq.(2), respectively.

**Problem I.**  $D(x) = D$ , and  $f(x, t; u) = \beta(t)u$  in Eq.(1) in which case an additional condition at  $x = l$  is given as

$$u(l, t) = h(t). \quad (3)$$

The inverse problem is to determine the coefficient function  $\beta(t)$  by Eq.(1) with the additional information (3), and suitable initial boundary value conditions.

**Problem II.**  $D(x) = D$ , and  $f(x, t; u) = q(x)u$  (or  $f(x, t; u) = a(x)g(u)$ ) in Eq.(1), and additional information is given at the final time  $t = T$

$$u(x, T) = u_T(x). \quad (4)$$

The inverse problem here is to determine the source coefficient  $q(x)$  (or **nonlinear source  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$** ) by Eq.(1), and the additional information (4) with suitable initial boundary value conditions.

**Problem III.** Let  $f(x, t; u) = r(x, t)$  be known, and the inverse problem is to determine the diffusion coefficient  $D = D(x)$  also by Eq.(1) with  $v = 0$ , and the additional condition (4) with suitable initial boundary value conditions.

**Problem IV.** Set  $\gamma = 1$ ,  $D(x) = D$ , and  $S(x, t) = \exp(-\lambda t)g(x)$  in Eq.(2), and the inverse problem is to determine the space-dependent source  $g = g(x)$  by Eq.(2), and also the additional condition (4) with given initial boundary value conditions.

**Problem V.** Set  $\beta = 1$  in Eq.(2), the inverse problem is to determine the space-dependent diffusion coefficient  $D(x)$  (and the fractional order  $\gamma$ ) by Eq.(2) with zero Neumann boundary value conditions, and the additional boundary measurement

$$u(0, t) = p(t). \quad (5)$$

For the above inverse problems of determining coefficient functions, we will employ an optimal perturbation regularization algorithm to perform numerical inversions. Several factors having important impacts on the algorithm's realization are discussed, including the finite-dimensional approximate space, the regularization parameter and the data

noises, etc. The inversion results show that the inversion algorithm is of numerical convergence and numerical stability, and it is suitable for function reconstruction problems in integer-order diffusion equation, but also can be applied to inverse problems in the fractional-order diffusion equation.

This work is joint with Guangsheng Chi, Xianzheng Jia and Xiaoping Fan, and supported by the National Natural Science Foundation of China (N 11071148, N 10926194).

## КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Грибанова Е. И.**

*Уральский федеральный университет,  
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия; egribanova@list.ru*

Рассматривается задача о восстановлении неизвестных распределенных управлений в гиперболической системе по результатам приближенных наблюдений (измерений) движений этой системы.

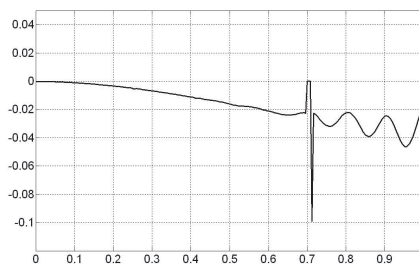
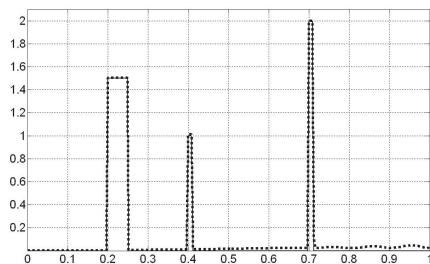
Пусть управляемая система представлена краевой задачей

$$\begin{aligned} y_{tt} &= Ly + b(x)u(t), & (t, x) \in Q = T \times \Omega, \\ y(t_0, x) &= y_0(x), \quad y_t(t_0, x) = y_1(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \\ y(t, x) &= 0, & t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\ Ly &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) - a(x)y, \end{aligned}$$

где  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  — вектор управляющего воздействия на систему, удовлетворяющий геометрическим ограничениям  $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$  при почти всех  $t \in T$ . Результаты приближенных измерений движений удовлетворяют условию

$$\int_T \|y_\delta(t, \cdot) - y(t, \cdot)\|_{w_2^1(\Omega)}^2 dt + \int_T \|\dot{y}_\delta(t, \cdot) - \dot{y}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \delta, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

Выполнена конечномерная аппроксимация задачи, основанная на методе разделения переменных. Доказана соответствующая теорема об аппроксимации. Проведены вычислительные эксперименты. На левом рисунке показан результат восстановления импульсов, на правом — погрешность восстановления. Работа продолжает исследования [1, 2].



Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержки РФФИ (проект 11-01-00073).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Vasin V. V., Korotkii M. A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2007. V. 15, N 8. P. 853–865.
2. **Короткий А. И., Грибанова Е. И.** Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2011. Т. 17, № 1. С. 99–108.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Данилин А. Н.

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта,  
НИИ прикладной информатики и математической геофизики,  
ул. Ал. Невского, 14, Калининград, 236041 Россия;  
ADanilin@kantiana.ru*

В работе представлен алгоритм решения обратной динамической задачи для системы Ламе, являющимся линеаризованным вариантом метода граничного управления [1, 2].

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с гладкой границей,  $u^f$  — решение прямой задачи для системы Ламе:

$$\rho u_{tt}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma_u^{ij},$$

$$(\sigma_u^{ij})_n |_{\Gamma \times [0, T]} = f^i, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,$$

где  $\sigma_u^{ij} = C_{kl}^{ij} (du)_{kl}$  — тензор напряжений,  $(du)_{kl} = (\partial u^k / \partial x^l + \partial u^l / \partial x^k) / 2$  — тензор деформаций,  $C_{kl}^{ij} = \lambda \delta_j^i \delta_l^k + \mu (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j)$  — тензор упругости (изотропная среда),  $f(x, t)$  — граничное управление.

Требуется по оператору реакции

$$R^{2T} f = u^f |_{\Gamma \times [0, 2T]}$$

найти  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Кинетическая и потенциальная энергия в момент времени  $T$  задаются равенствами:

$$K[f, g] = \int (C du^f, du^g)(x, T) dx,$$

$$P[f, g] = \int \rho(x) (u_t^f(x, T), u_t^g(x, T)) dx.$$

Оба функционала (квадратичных по  $f$ ) явно определяются данными обратной задачи и нелинейно зависят от  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Решение обратной задачи основано на линеаризации этих функционалов относительно априорных  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-01-0026а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Belishev M. I.** Dynamical inverse problem for a Lamé type system // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2006. V. 14. P. 751–766.
2. **Белишев М. И., Благовещенский А. С.** Динамические обратные задачи теории волн. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1999.

## ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Дементьева Е. В., Карпова Е. Д.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50, стр. 44, Красноярск, 660036 Россия;  
e.v.dementyeva@icm.krasn.ru, e.d.karepova@icm.krasn.ru*

Прямая задача для уравнений мелкой воды ставится на сфере в области произвольной формы с достаточно гладкой границей. Граница области состоит из “твердых” (береговой линии) и “жидких” (граница по морю) участков.

После дискретизации задачи по времени на каждом временном шаге в области ставится обратная задача о восстановлении граничной функции, для решения которой используются методы оптимизации и теории управления. Проблема состоит в том, что в общем случае влияние океана на открытую часть границы по морю неизвестна, то есть граничные условия на “жидкой” границе содержат граничную функцию, которую следует найти вместе с неизвестными задачи — скоростями и возвышением свободной поверхности.

Для построения численного алгоритма задача переформулирована в виде семейства задач оптимального управления, для отыскания минимума в некоторой норме погрешности между искомым возвышением свободной поверхности и наблюдаемым.

Построен и обоснован итерационный численный алгоритм, использующий информацию о данных наблюдений о возвышении свободной поверхности на части жидкой границы для восстановления граничной функции на всей жидкой границе и, следовательно, поля скоростей и возвышения свободной поверхности во всей расчетной области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач.

Поскольку задача некорректна, то рассмотрено несколько подходов к ее регуляризации. Был осуществлен поиск граничной функции  $d$  из трех различных функциональных пространств. Показаны сильные и слабые стороны каждого регуляризатора. Для этого изучалось поведение алгоритма восстановления граничной функции по данным наблюдений различной гладкости — гладким, с наложением белого шума, с пропусками в данных наблюдений.

Создано и протестировано эффективное параллельное программное обеспечение для SMP-узловых кластеров, решающее описанную задачу с помощью метода конечных элементов на неструктурированной согласованной триангуляции расчетной области. Проведены тестовые расчеты по восстановлению данных для акватории Охотского моря.

Для эффективного использования SMP-узловых кластерных систем исследовано на эффективность несколько хорошо масштабируемых параллельных численных реализаций решения задачи для библиотек MPI, OpenMP, и для их совместного использования. Получены теоретические оценки потенциального ускорения предложенных параллельных алгоритмов. Показано, что реально наблюдаемое ускорение параллельной реализации близко к теоретически ожидаемому.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант 11-01-00224).

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИИ

Денисов А. М.<sup>1</sup>, Захаров Е. В.<sup>1</sup>, Калинин А. В.<sup>1</sup>, Калинин В. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. Ломоносова, Москва, Россия;

den@cs.msu.su, zspec@cs.msu.su, alec.kalinin@gmail.com

<sup>2</sup>ИЦ ССХ им. Бакулева, Москва, Россия; vitkv@list.ru

Обратная задача электрокардиографии в форме потенциалов — это задача реконструкции потенциала на внешней поверхности сердца по измерениям потенциала на поверхности грудной клетки. В ряде работ обратная задача электрокардиографии рассматривалась в однородной среде. В этом случае она представляет собой задачу Коши для уравнения Лапласа. Ее математическая постановка применительно к геометрии человеческого торса такова. Рассмотрим область  $\Omega$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , ограниченную снаружи замкнутой поверхностью  $\Gamma_B$ , а изнутри замкнутой поверхностью  $\Gamma_H$ . Поверхность  $\Gamma_B$  представляет собой объединение двух поверхностей  $\Gamma_T$  и  $\Gamma_E$ . Интерпретация данной геометрической конфигурации следующая:  $\Gamma_H$  — поверхность сердца,  $\Gamma_E$  — часть поверхности торса, на которой производятся измерения потенциала электрического поля,  $\Gamma_T$  — верхний и нижний срезы торса. Требуется найти функцию  $u(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , такую, что

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = \psi(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_E, \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  — известная функция.

Необходимо отметить, что область грудной клетки человека представляет собой неоднородную среду с существенно изменяющимся коэффициентом электропроводности. При этом возникает задача исследования влияния неоднородностей грудной клетки на точность решения обратной задачи электрокардиографии. Для учета неоднородности грудной клетки рассмотрим обратную задачу электрокардиографии в следующей постановке. Пусть в области  $\Omega$  заданы непересекающиеся области  $\Omega_i$  с границами  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  (левое и правое легкие). Определим  $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_E$ ,  $\Gamma_3 = \Gamma_H \cup \Gamma_T$ . Требуется найти функцию  $u(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , такую, что  $u(x) = u_i(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,

$$\Delta u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$u_0(x) = \psi(x), \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad (4)$$

$$u_0(x) = u_i(x), \quad \sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = \sigma_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  — заданные постоянные коэффициенты электропроводности. В докладе рассматривается метод численного решения обратной задачи электрокардиографии в неоднородной среде. Приводятся численные результаты, показывающие необходимость учета неоднородности среды при решении обратной задачи электрокардиографии.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00259).



## ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Деревцов Е. Ю., Светов И. Е.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад.Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
dert@math.nsc.ru, svetovie@math.nsc.ru*

Общая задача интегральной геометрии состоит в определении скалярного, векторного или тензорного поля по его интегральным преобразованиям. Рассматривается частная постановка задачи, в которой требуется определить заданное на евклидовой плоскости симметричное  $m$ -тензорное поле или его часть по известным лучевым преобразованиям. Теорема разложения симметричного  $m$ -тензорного поля на соленоидальную и потенциальную части, при очень общих предположениях, получена в [1]. Показано, что по известному продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть поля, а потенциальная часть разложения является ядром преобразования. При этом, если  $m \geq 2$ , даже в случае размерности пространства  $n = 2$  оставался открытым вопрос, можно ли восстановить потенциальную часть и если можно, то по какой информации.

Известно, что операторы продольного и поперечного лучевых преобразований, действующие на векторные поля, обладают ненулевыми ядрами. Так, ядро оператора продольного лучевого преобразования состоит из потенциальных полей с потенциалом, обращающимся в нуль на границе области; ядро же поперечного лучевого преобразования состоит из соленоидальных полей с обращающейся в нуль производной по нормали к границе. Принимая во внимание разложение Гельмгольца-Ходжа [2] векторного поля на потенциальную и соленоидальную части, приходим к выводу, что по известному поперечному лучевому преобразованию можно восстановить его потенциальную часть. Тесная связь между ядрами продольного, поперечного и смешанного лучевых преобразований и разложением поля сохраняется и в случае симметричных 2-тензорных полей [3].

Оказалось возможным обобщить эти результаты и установить связь между ядрами лучевых преобразований и разложением симметричного тензорного поля произвольной валентности  $m$ . При этом увеличивается количество различных типов лучевых преобразований, совпадающее с количеством членов в разложении  $m$ -тензорного поля, состоящего из соленоидальной и  $m$  потенциальных частей. Построение различных типов (частей) поля осуществляется на основе потенциалов, к которым применяются дифференциальные операторы  $d$  внутреннего дифференцирования и  $d^\perp$  ортогонального внутреннего дифференцирования в различных сочетаниях.

Найденное детальное разложение поля, описание ядер и образов его лучевых преобразований послужило основой для получения формул обращения для лучевых преобразований симметричных тензорных полей. Таким образом, возможность восстановления соленоидальной, потенциальных частей или всего исходного поля тесно связана с исходными данными задачи, которыми являются продольное, поперечное или смешанные лучевые преобразования в различных сочетаниях.

Работа частично поддержана РАН (проект Отделения математических наук 1.3.1), РФФИ (грант 11-07-00447), СО РАН (проект совместных фундаментальных исследований СО РАН и УрО РАН 32).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Шарафутдинов В. А.** Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.

2. **Weyl Н.** The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940. N 7. P. 411–444.
3. **Деревцов Е. Ю.** Некоторые задачи нескаллярной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 81–111. Тр. 1-й Междунар. молодежной шк.-конф. “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. Ч. 1.

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МИКРОМЕХАНИКИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Димитриенко Ю. И., Соколов А. П., Шпакова Ю. В.

*МГТУ им. Н. Э. Баумана,*  
*ул. 2-ая Бауманская, 5, стр. 1, Москва, 105005 Россия;*  
dimit@serv.bmstu.ru, alsokolo@bmstu.ru, shpakovayuliya@bmstu.ru

Работа представлена серией фундаментальных исследований, направленных на развитие математических моделей [1], численных методов [2] и создание автоматизированных программных инструментов решения обратных задач механики композиционных материалов (КМ).

**Объектом исследования** являются упруго-прочностные характеристики периодических КМ [3], включая их компоненты.

В практических задачах часто требуется определять эффективные характеристики КМ при частично неизвестных характеристиках компонент КМ. Многие из этих характеристик не могут быть получены экспериментальным путем, например, модуль Юнга или предел прочности углеродного волокна в поперечном к его оси направлении для тканевого КМ.

Реализация задачи позволяет решить эту проблему и получать оценки недостающих характеристик исходных компонент КМ на базе экспериментальных данных о характеристиках самого КМ.

В основе работы лежат: методы многомасштабной асимптотической гомогенизации, методы оптимизации (Хука — Дживса), метод конечных элементов, теория прочности и упругости в механике сплошных сред. Использовались тензорно-полиномиальные критерии прочности (Малмейстера или Гольденблата — Коппова [4]).

Для решения указанной задачи был разработан специализированный алгоритм на языке C++ в рамках системы конечно-элементного анализа **GCD** и получены соответствующие численные результаты расчета модельных задач. В результате реализации алгоритма стало практически возможным сократить затраты на проведение экспериментальных исследований и повысить точность численно получаемых результатов расчетов эффективных характеристик КМ. Появилась возможность получения численных оценок свойств компонент композитов, которые не могут быть получены экспериментально, а также появилась возможность уточнения численных схем решения прямых задач поиска эффективных характеристик КМ.

Исследование выполнено при поддержке грантов Президента РФ: МК-765.2012.8, МК-6421.2012.9.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Dimitrienko Y. I., Sokolov A. P.** Elastic properties of composite materials // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2010. V. 2, N 1. P. 116–130.
2. **Димитриенко Ю. И., Соколов А. П.** Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // *Информационные технологии*. 2008. № 8. С. 31–38.
3. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. **Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980.

## АППРОКСИМАЦИЯ: ТРИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ

Егоршин А. О.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
egorshin@math.nsc.ru*

Пусть численным образом задана функция  $y(t) \in L^2[I_T] = L^2$ ,  $I_T = [0, T]$  и требуется построить ее математическую модель, то есть получить хорошо ее аппроксимирующее математическое описание. Один из способов такого математического моделирования — задание в  $L^2$  некоторого подпространства или множества (его описание задает некоторый класс допустимых математических моделей определенного вида) и искать в этом множестве точку, ближайшую (по норме в  $L^2$ ) к заданной функции  $y(t)$ .

Параметры, представляющие эту точку в множестве моделей, есть решение соответствующей обратной задачи моделирования. Пример такой аппроксимации — линейное описание функции с помощью полинома заданной степени  $n - 1$ . Тогда множество моделей — линейное подпространство, натянутое на базис из соответствующих степенных функций, а ближайшая точка в нем, аппроксимирующая заданную функцию  $y(t)$  — ортогональная проекция  $\hat{y}(t)$  функции  $y(t)$  на это подпространство.

Другой аспект подобных задач аппроксимации — приближенное восстановление функции  $y(t)$  по ее отсчетам  $y_i = y(t_i)$ , на  $I_T$ :  $t_i = ih$ ,  $i = \overline{0, L}$ ,  $T = Lh$ . Подобные задачи восстановления функций могут быть решены с помощью математической модели функции  $y(t)$ , построенной по этим отсчетам. Тогда задача поиска ближайшего элемента  $\hat{\mathbf{y}} = \{\hat{y}_i\}_0^L$  (проекции в линейном случае) в множестве модели решаются в евклидовом пространстве  $E = E^{L+1}$  исходных данных  $\mathbf{y} = \{y_i\}_0^L$ .

Доклад посвящен описанным обратным аппроксимационным задачам проектирования в  $L^2$  и  $E$ , с моделями в виде обыкновенных линейных дифференциальных (в  $L^2$ ) и разностных (в  $E$ ) уравнений (ДУ и РУ соответственно) с постоянными, но, возможно, неизвестными коэффициентами. Коэффициенты уравнений являются параметрами ядер (импульсных функций) соответствующих интегральных или дискретизированных операторов Вольтерра. Обсуждаются вариационные постановки таких задач. Показано, что в некоторых из них присутствуют три обратных задачи для аппроксимирующих уравнений указанного типа: оценивание начальных условий переходного процесса, возмущающей (входной) функции оператора и неизвестных коэффициентов уравнения.

Задачи формулируются ниже в виде пары  $\{\mathcal{J}, \mathcal{C}\}$ . Здесь  $\mathcal{J}$  — критерий оптимальности модели. В  $L^2$  это  $\mathcal{J} = J_L = \|y(t) - \hat{y}(t)\|_{L^2}^2$ , а в  $E$  это  $\mathcal{J} = J_E = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_E^2$ . Символ  $\mathcal{C}$  — условия его минимизации: ДУ для функции  $\hat{y}(t)$  или РУ для последовательности  $\hat{\mathbf{y}} = \{\hat{y}_i\}_0^L$ . Самая известная задача такого рода (с известными коэффициентами ДУ и РУ) — упомянутая аппроксимация полиномами заданной степени  $n - 1$ :

$$\{\mathcal{J}: J_E, \quad \mathcal{C}: \Delta^n \hat{y}_k = 0, \quad k = \overline{0, L-n}\}. \quad (1)$$

Здесь одна обратная задача — оценивание начальных условий этого уравнения (или коэффициентов полинома). Мы обобщаем эту задачу следующим образом [1]:

$$\{\mathcal{J}: J_E, \quad \mathcal{C}: \sum_{i=0}^n \hat{y}_{k+i} \alpha_i = 0, \quad k = \overline{0, L-n}\}. \quad (2)$$

Здесь две обратных задачи: оценка начальных условий и коэффициентов  $\alpha$  уравнения.

Следующее обобщение — неоднородные уравнения:

$$\{\mathcal{J}: J_E + \epsilon \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_E^2, \quad \mathcal{C}: \sum_{i=0}^n \hat{y}_{k+i} \alpha_i = \sum_0^m \hat{x}_{k+i} \beta_i, \quad k = \overline{0, L-n}\}. \quad (3)$$

К оценке начальных условий, коэффициентов  $\alpha$  добавилась третья обратная задача: оценка входа  $\hat{\mathbf{x}}$ . Здесь  $\mathbf{x}$  — его априорное значение (например, нулевое), а  $\epsilon$  — подбираемый параметр регуляризации.

**Теорема.** Оценка входа и начальных условий в задаче (3) сводится к задаче проектирования в  $E^{2(L+1)}$ , а задача оценки коэффициентов  $\alpha, \beta$  — к безусловной минимизации специального функционала. Он представляется в виде квазиквадратичной формы с неконстантуой на сфере матрицей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10 01 00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Егоршин А. О.** Об отслеживании параметров экстремума в вариационной задаче идентификации // Вестник НГУ. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2011. Т. 11, № 3. С. 95–114.

# ОБ ОДНОМ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЯТИ ДИАГОНАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Елеуов А. А., Урмашев Б. А.

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби,  
Алматы, Казахстан; Eleuov@mail.ru

При дискретизации краевых задач для линейных дифференциальных уравнений на отрезке возникают ленточные матрицы. Алгоритм восстановления трех диагональных матриц по двум спектрам можно найти в работе [1]. Обратные спектральные задачи для пятидиагональных унитарных матриц рассмотрены в работе [2]. В данной работе указан алгоритм однозначного восстановления пятидиагональной симметричной матрицы. В начале работы исследуются свойства собственных значений симметричной пятидиагональной матрицы  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & & & & & & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & & \\ c_0 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & c_{n-4} & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & & & \\ & & & & c_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} & & & \\ & & & & & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n & & & \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$  считаем вещественными, а элементы третьей диагонали  $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$  положительными.

Матрица  $B$  получается из матрицы  $A$  вычеркиванием первой строки и первого столбца. Матрица  $C$  получается из матрицы  $B$  вычеркиванием первой строки и первого столбца.

**Теорема 1.** Матрицы  $A$  и  $B$ , имеют вещественные простые собственные значения (являются существенно простыми матрицами), причем собственные значения матриц  $A$  и  $B$  перемежаются. Аналогичное утверждение верно и для матриц  $C$  и  $B$

**Теорема 2.** Если три последовательности являются собственными значениями матриц  $A, B, C$ , а четвертая последовательность — нули некоторого многочлена  $y_1(\lambda)$ , то по указанным последовательностям элементы матрицы  $A$  восстанавливаются однозначно.

Причем дан алгоритм восстановления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hochstadt Н. On the construction of a Jacobi matrix from spectral date // Linear Algebra Appl. 1974. V. 8, N 5. P. 435–446.
2. Голинский Л. Б., Кудрявцев М. А. Обратные спектральные задачи для одного класса пятидиагональных унитарных матриц // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 1. С. 11–18.

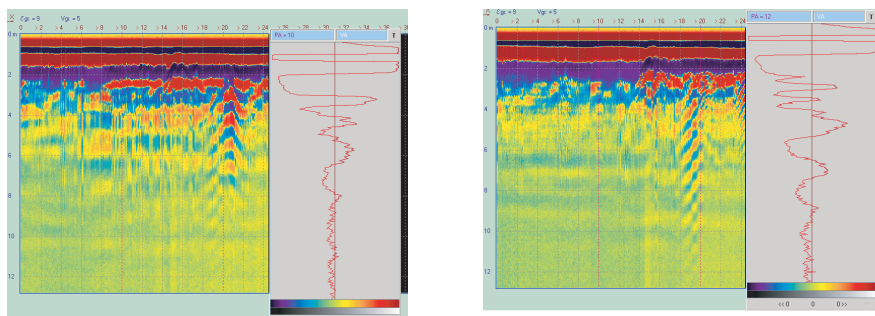
## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЯ ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ПОКРЫТИЙ

Искаков К. Т.<sup>1</sup>, Оралбекова Ж. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова,  
5, Астана, 010000 Казахстан; kazizat@mail.ru

<sup>2</sup>Казахский национальный педагогический университет им. Абая, просп. Достык,  
13, Алматы, 050010 Казахстан; Oralbekova@bk.ru

В данной работе приведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием георадара [1]. Для интерпретации данных георадара, предлагается математическая модель распространения волн, возмущенных плоской волной падающих на поверхность [2]. Для решения двумерной обратной коэффициентной задачи используется метод линеаризации.



Данные георадарных экспериментальных исследований объекта

Картинки радарограмм визуально похожи на возмущения поверхности жидкости плоской волной, фронт которой совпадает с “берегом”. Представим, что мы одновременно возмутили среду источниками, помещенными во всех точках трассы (которые на самом деле мы проходили последовательно, одна за другой). Такое одновременное возмущение многими источниками можно трактовать как возмущение поверхности среды плоской волной, падающей на поверхность. Эти соображения и позволили нам сделать выводы о наличии “трубы” — непроницаемой для электромагнитных колебаний препятствия. На тех же основаниях мы сделали вывод о возможности “щели”, узкой области под первой трассой, прозрачной для радиоволн. Там где угасание больше — там больше проводимость, а значит, вероятнее всего, влажность среды.

Для решения обратной задачи в частотной области используется метод послыльного пересчёта (см., например, [3]).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Kabanikhin S. I., Iskakov K. T., Oralbekova Z. O.** Analysis of the measurements of subsurface coatings using georadar // The 8th Congress of International Society for Analysis, Applications, and Computation, Moscow, Russia, 22–27 August 2011. P. 291–292.
2. **Романов В. Г., Кабаныхин С. И.** Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
3. **Karchevsky A. L.** A frequency-domain analytical solution of Maxwell’s equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2007. V. 48, N 8. P. 689–695.

## BREGMANIZED FORWARD-BACKWARD SPLITTING WITH ANATOMICALLY WEIGHTED HIGHER ORDER TOTAL VARIATION REGULARIZATION FOR 3D EMISSION TOMOGRAPHY

Kazantsev D.<sup>1</sup>, Hutton B. F.<sup>2</sup>, Ourselin S.<sup>3</sup>, Arridge S. R.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 6, Acad. Lavrenrieva ave., Novosibirsk, 630090 Russia; dkazanc@hotmail.com*

<sup>2</sup>*Institute of Nuclear Medicine, University College London, Hospitals NHS Trust, 235 Euston Road (T-5), London NW1 2BU, UK; brian.hutton@uclh.nhs.uk*

<sup>3</sup>*Centre for Medical Image Computing, Department of Medical Physics and Bioengineering, University College London, London, NW1 9EE, UK; s.arridge@cs.ucl.ac.uk*

In this paper we proposed a method for reconstruction of volumetric activity distribution for emission tomography (ET). We use higher order total variation (TV) regularization to avoid problems with staircase effect in the reconstructed images. Penalized likelihood optimization problem is tackled by Forward-Splitting algorithm (FBS) with additional Bregman iteration to enhance contrast characteristics of the image. Available anatomical information from the co-registered magnetic resonance (MR) image is embedded into the algorithm by additional weighting of the TV norm. Obtained algorithms are compared quantitatively in terms of bias-variance.

We consider the discrete 3D activity distribution as a vector  $\boldsymbol{\lambda}$  and  $\mathbf{g}$  is a measured projection data (sinogram). In the ET data follows Poisson distribution:  $\mathbf{g} \sim \text{POISSON}(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda})$ , where  $\mathbf{P}$  is a system (projection) matrix. To estimate  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ , the following constrained cost function needs to be minimized:

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \mathbb{D}_{KL}(\mathbf{g}, \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}) + \beta |\boldsymbol{\lambda}|_{TV_{\mu}^{4th}} \right\} \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\lambda} \geq 0,$$

where  $\mathbb{D}_{KL}(\mathbf{g})$  is a Kullback–Leibler divergence and  $|\boldsymbol{\lambda}|_{TV_{\mu}^{4th}} = \int_{\Omega} (|\lambda_{xx}|_{\mu} + |\lambda_{yy}|_{\mu} + |\lambda_{zz}|_{\mu}) dx dy dz$ , is a fourth order TV functional weighted by anatomical image  $\boldsymbol{\mu}$ . Similarly to the Bregmanized EMTV algorithm [1] we iterate for a Bregman variable  $\mathbf{v}$ :

$$\boldsymbol{\lambda}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^m}{\mathbf{P}^* \mathbf{1}_{\Sigma}} \mathbf{P}^* \left( \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}^m} \right), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{m+1} = \underset{\boldsymbol{\lambda}}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{q})^2 + \beta |\boldsymbol{\lambda}|_{TV_{\mu}^{4th}} \right\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k - \left( \mathbf{1} - \frac{1}{\mathbf{P}^* \mathbf{1}_{\Sigma}} \mathbf{P}^* \left( \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}^{m+1}} \right) \right), \quad \mathbf{v}^0 = 0; \quad (3)$$

where  $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\lambda}^{m+1/2} + \alpha \boldsymbol{\lambda}^m \mathbf{v}^k)$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{P}^* \mathbf{1}_{\Sigma} / \boldsymbol{\lambda}^m$  and  $\alpha$  is an additional parameter to control the weight of Bregman residual  $\mathbf{v}$ . One can see that the step (1) is a well known MLEM algorithm, step (2) is a weighted fourth order TV denoising model (similar to the Rudin-Osher-Fatemi) and (3) is a Bregman residual containing noise as well as information from the previous update. We compare this algorithm with recently proposed diffusion based algorithm for 3D SPECT reconstruction [2] and show some cons and pros for both methods.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 10-07-00131 and by the Engineering and Physical Sciences Research Council under Grant EP/G026483/1.



#### REFERENCES

1. **Muller J., Brune C., Sawatzky A., Kusters T., Schafers K., Burger M.** Reconstruction of short time PET scans using Bregman iteration // IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record. 2011. P. 2383–2385.
2. **Kazantsev D., Arridge S. R., Pedemonte S., Bousse A., Erlandsson K., Hutton B. F., Ourselin S.** An anatomically driven anisotropic diffusion filtering method for 3D SPECT reconstruction // Phys. Med. Biol. 2012. V. 57 (to appear).

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ В ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Казанцев И. Г.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО  
РАН, просп. Акад.Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия; kig@ooi.sssc.ru*

Модель формирования данных позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) на первичных (не рассеянных) фотонах имеет вид:

$$P^{AB} = \exp \left[ - \int_A^B \mu(x', y', z') dl' \right] \int_A^B f(x, y, z) dl, \quad (1)$$

где  $f(x, y, z)$  — распределение источников активности изотопа внутри среды с линейным коэффициентом ослабления  $\mu(x, y, z)$ ,  $A, B$  — точки детектирования,  $dl, dl'$  — элементы длины на линии  $AB$ . Задача состоит в реконструкции  $f$  при известном  $\mu$  по данным  $P^{AB}$ , регистрируемым большим множеством пар детекторов  $(A, B)$ . Физическая модель ПЭТ основана на использовании пар гамма-квантов, разлетающихся приблизительно в противоположных направлениях из точек носителя функции  $f$ . Данные детекторов  $P^{AB}$  интерпретируются как интегралы от  $f$  по прямым линиям распространения первичных фотонов с энергией  $E = 511$  кэВ.

Однако в детекторы попадают и фотоны с меньшими энергиями  $E' < E$ , претерпевшие комптоновское рассеяние. В зависимости от разрешения детектора по энергии, используется спектральное окно чувствительности  $W = [t, 511]$  с порогом  $t$  и фотоны с энергией вне окна  $W$  в алгоритмах ПЭТ не учитываются. Для попавших в окно фотонов различными методами в сканерах оценивается отношение числа первичных к рассеянным фотонам и затем данные масштабируются в соответствии с этим отношением.

С улучшением спектрального разрешения детекторов появляется возможность настраивания сканеров на регистрацию фотонов, рассеянных под определенным углом  $\theta$ , с последующим использованием информации в этих данных в дополнение к первичным фотонам. В работе [1] с соавторами получена формула (и исследована в сравнении с проекциями, генерированными статистическим методом Монте-Карло) вычисления мгновенного количества фотонов, рассеянных с углом  $\theta$ , регистрируемых детектором  $B$  при условии, что в  $A$  попали первичные фотоны:

$$\xi_{\theta}^{AB} = \int_0^{\theta} d\varphi \frac{\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)}{4\pi|AB|} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\mu(\psi, \varphi, |AS|)}{\sigma_C} \frac{\partial \sigma_C}{\partial \Omega} \times \exp \left[ - \left( \int_A^S \mu dl + \int_S^B \mu' dl \right) \right] \int_0^{|AS|} f(\psi, \varphi, r) dr, \quad (2)$$

где  $d\sigma_C/d\Omega$  — дифференциальное сечение комптоновского рассеяния, точка рассеяния  $S$  определяется в сферических координатах как  $(\psi, \varphi, |AS|)$ , расстояние от точки  $A$  до  $S$  есть  $|AS| = |AB| \sin(\theta - \varphi) / \sin \theta$ .

В данной работе выводится частный вид преобразования (2) в случае  $\mu = \mu' = \text{const} = 0,096 \text{ см}^{-1}$ , что является часто используемым допущением при моделировании эмиссионной томографии человека. Тогда модель (2) сводится к лучевому преобразованию Радона с послойной сверткой, обращение которого получено ранее в работе [2] с соавторами. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-07-000131).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Казанцев И. Г., Яровенко И. П., Прохоров И. В.** Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронной эмиссионной томографии // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 6. С. 27–37.
2. **Kazantsev I. G., Klukowska J., Herman G. T., Cernetic L.** Fully three-dimensional defocus-gradient backprojection in cryoelectron microscopy // Ultramicroscopy. 2010. V. 110. P. 1128–1142.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Касенов С. Е.

*Казахский национальный педагогический университет им. Абая,  
Алматы, Казахстан*

**Постановка исходной задачи.** Рассмотрим уравнение акустики в области  $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ , где  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ :

$$c^{-2}(x, y)U_{tt} = \Delta U - \nabla \ln(\rho(x, y))\nabla U \quad (x, y, t) \in Q.$$

Предположим, что режим колебаний гармонический:

$$U(x, y, t) = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad (x, y, t) \in Q$$

и рассмотрим уравнение Гельмгольца в области  $\Omega$ :

$$-\omega^2 c^{-2}u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y))\nabla u, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Рассмотрим начально-краевую задачу в области  $\Omega$ :

$$-\omega^2 c^{-2}u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y))\nabla u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 1) = h_2(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad u(1, y) = h_1(y), \quad y \in [0, 1]. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) является некорректной. Для численного решения задачи мы сначала сведем ее к обратной задаче  $Aq = f$  по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче. Далее мы сведем решение операторного уравнения  $Aq = f$  к задаче минимизации целевого функционала  $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ .

**Сведение исходной задачи к обратной задаче.** Покажем, что решение исследуемой задачи (1)–(3) можно свести к решению обратной задачи по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче. В качестве прямой задачи будем рассматривать следующую

$$-\omega^2 c^{-2}u = \Delta u - \nabla \ln(\rho(x, y))\nabla u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(x, 1) = q_1(x), \quad u(x, 0) = h_2(x), \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

$$u(1, y) = q_2(y), \quad u(0, y) = h_1(y), \quad y \in [0, 1]. \quad (6)$$

Обратная задача к задаче (4)–(6) заключается в определении функции  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  по дополнительной информации

$$u_x(0, y) = f_1(y), \quad y \in [0, 1], \quad u_y(x, 0) = f_2(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (7)$$

Целевой функционал имеет вид:

$$J(q_1, q_2) = \int_0^1 [u_x(0, y; q_1, q_2) - f_1(y)]^2 dy + \int_0^1 [u_y(x, 0; q_1, q_2) - f_2(x)]^2 dx. \quad (8)$$

Вычисляя градиент  $J'q$  целевого функционала, мы применяем метод координатного спуска для его минимизации. Приводятся результаты численных расчетов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
2. **Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсейтова А. Т.** Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. Алматы-Новосибирск: Международный фонд обратных задач, 2006.

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ И ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Каширин А. А., Смагин С. И.

ВЦ ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск, 680000 Россия; elomer@mail.ru,  
smagin@as.khb.ru

Рассматриваются задачи дифракции стационарных акустических волн на трехмерных включениях. При помощи специальных комбинаций потенциалов простого и двойного слоев они сводятся к двум различным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, каждое из которых содержит одну неизвестную функцию. Эти уравнения эквивалентны исходным задачам всюду, кроме счетного множества собственных частот интегральных операторов (спектра), где интегральные уравнения, в отличие от исходных задач, не являются корректно разрешимыми. Ситуация осложняется тем, что в общем случае спектр интегральных операторов заранее неизвестен, а его поиск является весьма сложной задачей.

Исследование полученных интегральных уравнений показало, что они обладают разными свойствами. Решение одного из этих уравнений всегда существует и, в силу теории Фредгольма, является суммой частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение уравнения, подставленное в соответствующую комбинацию потенциалов простого и двойного слоев, дает решение задачи дифракции. Решение второго уравнения может как существовать, так и не существовать. При этом проверка критерия разрешимости этого уравнения является отдельной трудоемкой задачей. Поэтому в дальнейшей работе используется только первое из полученных уравнений.

Для преодоления указанных сложностей предлагается метод интерполяции решения, который учитывает дискретность спектра интегральных операторов и структуру решений используемых интегральных уравнений. Идея метода заключается в том, что решения задач на спектре отыскиваются в виде линейных комбинаций решений вспомогательных корректно разрешимых уравнений с “близкими” волновыми числами. Этот метод не привязан к конкретной реализации приближенного решения вспомогательных задач и потому может быть легко использован для тех же целей в связке с другими схемами численного решения интегральных уравнений.

Для численного решения интегральных уравнений применяется специальный метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах. Он позволяет вычислять коэффициенты систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих соответствующие интегральные уравнения, по весьма простым формулам. Затем полученные СЛАУ решаются численно обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), и приближенные решения интегральных уравнений подставляются в комбинацию потенциалов простого и двойного слоев. Таким образом решения задач дифракции приближенно находятся в любой точке пространства.

Приведены результаты численных экспериментов, которые дают представление о возможностях метода интерполяции решения.

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 11-01-00757-а) и ДВО РАН (грант 12-III-A-01И-012).

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ НАВЬЕ — СТОКСА С НЕНЬЮТОНОВСКОЙ РЕОЛОГИЕЙ

Короткий А. И., Цепелев И. А.

*Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16,  
Екатеринбург, 620990 Россия; korotkii@imm.uran.ru*

Рассматривается модель динамики неоднородной несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости, эволюция состояний  $\mathbf{u}(t, \cdot) = \mathbf{u}(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ , которой во времени описывается краевой задачей [1, 2]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot [\eta_0 (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)^\gamma] + \mathbf{F}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \partial \mathbf{u}_\tau / \partial \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — модельная область изменения пространственных переменных  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости движения жидкости;  $\mathbf{F}$  — вектор плотности внешних массовых сил;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали в точках границы  $\partial \Omega$  области  $\Omega$ ;  $\mathbf{u}_\tau$  — проекция вектора скорости на касательную плоскость;  $p$  — давление;  $\eta_0$  — вязкость;  $\nabla$  — градиент;  $\nabla \cdot$  — дивергенция;  $0 < \gamma < 2$ .

Известно приближенное состояние жидкости в области  $\Omega$  в момент времени  $\vartheta$ , характеризующееся функцией  $\mathbf{v}_\delta = \mathbf{v}_\delta(\cdot)$ , удовлетворяющей условию

$$\|\mathbf{v}_\delta(\cdot) - \mathbf{u}(\vartheta, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

Требуется определить состояние жидкости  $\mathbf{u}(t_0, \cdot)$  в области  $\Omega$  в момент времени  $t_0$ . С содержательной точки зрения ретроспективная задача состоит в определении состояния среды в прошлом (в момент времени  $t_0$ ) по ее состоянию в настоящем (в момент времени  $\vartheta$ ) по доступному прямому измерению  $\mathbf{v}_\delta$  состояния среды  $\mathbf{u}(\vartheta, \cdot)$  в настоящем. С математической точки зрения задача состоит в нахождении решения краевой задачи (1)–(3) с условием  $\mathbf{u}(\vartheta, \cdot) = \mathbf{v}_\delta$ .

Исследование и решение задачи существенно отягощаются ее нелинейностью и некорректностью. Все это исключает простое аналитическое или численное решение рассматриваемой задачи и требует привлечения методов регуляризации некорректных задач.

Для решения задачи предлагается воспользоваться методом регуляризации Тихонова. Рассмотрено несколько итерационных процедур решения задачи [3, 4]. Приводятся результаты численного моделирования. О некоторых возможных приложениях задачи (см., например, [5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы межрегиональных и межведомственных фундаментальных исследований Уральского отделения РАН (проект 12-С-1-1001) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.

2. **Уилкинсон У.** Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. М.: Мир, 1964.
3. **Васин В. В., Агеев А. Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
4. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
5. **Ismail-Zadeh A. T., Schubert G., Tsepelev I. A., Korotkii A. I.** Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the earth and planetary interiors. 2004. V. 145. P. 99–114.

**РЕГУЛЯРИЗИРОВАННАЯ ФОРМА “grad–div”  
ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ  
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ  $H(\operatorname{div})$**

**Кремер И. А.**

ЗАО “Центр РИТМ”, ул. Акад. Кутателадзе, 4а,  
Новосибирск 630128, Россия; kremer@oritm.com

В области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  рассматривается следующая “grad–div” задача с ограничением

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) &= \mathbf{F}, & \operatorname{rot} \mu \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что функции  $\lambda$  и  $\mu$  положительны в  $\Omega$  и могут терпеть разрывы первого рода. Задача записывается в обобщенной формулировке с множителем Лагранжа. Требуется определить функции  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$  и  $\mathbf{p} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  такие, что выполнено

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0, & \mathbf{q} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega). \end{cases}$$

Здесь билинейные формы соответствуют исходной задаче

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega),$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = - \int_{\Omega} \mu \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{q} \, d\Omega \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad \mathbf{q} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega).$$

Используя свойства пространств  $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  и  $\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  и определенных выше билинейных форм, удается выделить задачу для множителя Лагранжа и исключить его из системы уравнений. Для оставшейся функции  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$  формулируется регуляризованная обобщенная задача

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\beta} \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{R}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \rangle, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega).$$

Здесь оператор  $\mathbf{R}: \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)'$  соответствует задаче Максвелла в регуляризованной форме [1], а действие оператора  $\mathbf{B}: \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)'$  определяется в соответствии с формулой

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle = b(\mathbf{v}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad \mathbf{q} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega).$$

В работе устанавливается эквивалентность обобщенных постановок для любого положительного значения параметра регуляризации  $\beta$ . Для численного решения регуляризованной задачи используется векторный метод конечных элементов, основанный на элементах Неделека, аппроксимирующих пространство  $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$ . Доказывается теорема сходимости. Предлагается оптимальный итерационный метод решения конечно-элементной задачи, скорость сходимости которого не зависит от величины шага сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер И. А., Урев М. В. Метод регуляризации стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл. мат. 2009. Т. 12, № 2. С. 161–170.



## ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАННЫХ КОШИ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

**Криворотко О. И.**

*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск,  
630090 Россия; krivorotko.olya@mail.ru*

В работе исследуется задача по нахождению данных Коши  $q_1(x, y)$  и  $q_2(x, y)$  волнового уравнения (1) по дополнительной информации (2) о колебаниях  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  в некоторых фиксированных моментах времени  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, & t \in (0, T_1), \\ u|_{t=0} &= q_1(x, y), & u_t|_{t=0} &= q_2(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, & t &\in (0, T_1); \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(x, y, T_1) = f_1(x, y), \quad u(x, y, T_2) = f_2(x, y). \quad (2)$$

где  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\}$ .

Доказана теорема о единственности решения задачи (1), (2). Построена регуляризация задачи в классе решений из  $C^2[0, L_1]$  с помощью разложения в ряд Фурье. Исследованы сингулярные числа оператора задачи (1), (2) и проведено сравнение с сингулярными числами задачи определения функции  $q_2(x, y)$  при  $T_2 = 0$  (то есть  $q_1(x, y) = f_2(x, y)$ ) [1]. Также применены оптимизационные методы по нахождению приближенного решения и проведено сравнение с методом усеченного сингулярного разложения. Приведены результаты численных расчетов.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00773, ФЦП 14.740.11.0350.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N.** An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2012. V. 2 (in print).
2. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ АСТРОФИЗИКИ

Куликов И. М.<sup>1</sup>, Тутуков А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6,  
Новосибирск, 630090 Россия; kulikov@ssd.sscs.ru*

<sup>2</sup>*Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая, 48,  
Москва, 119017 Россия; atutukov@inasan.ru*

Столкновение галактик является основным эволюционным фактором. Так за хаббловское время рядовая галактика испытывает до 10 столкновений с другими галактиками из своего скопления. К особенностям модели сталкивающихся галактик, кроме гравитационной неустойчивости как физического свойства всех астрофизических задач добавляется проблема моделирования произвольных ударных волн и областей с высокими градиентами плотности и давления. Кроме этого такие нестационарные и длительные по времени процессы требуют трехмерной постановки и высокого разрешения, что требует использования мощных суперкомпьютеров для их моделирования. В докладе будет сделан обзор эйлеровых, лагранжевых и эйлерово-лагранжевых методов решения уравнений гравитационной газовой динамики. Рассмотрены особенности и ограничения параллельных реализаций этих методов. Будет описан новый авторский численный метод решения уравнений гравитационной газовой динамики и созданный на основе данного метода пакет PEGAS для супер-ЭВМ. В рамках доклада будет рассмотрена задача центрального столкновения газовых компонент галактик и приведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие все возможные сценарии столкновения, и параметры, при которых они были получены. В рамках экспериментальных исследований слияния галактик был получен один из способов формирования кольцевой галактики. В рамках доклада будет представлено приближение двухкомпонентной газовой динамики для моделирования галактического и звездного газа.

Работа поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы и “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы”.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В МОДЕЛИ “ВЛАСТЬ — ОБЩЕСТВО”

**Латыпов И. И.**

*Бирская государственная социально-педагогическая академия, Россия;*

LatypovII@rambler.ru

Рассматривается модель, описывающая иерархию власти и/или властных полномочий, предложенная Михайловым А.П. [1], как совокупности иерархий (в простейшем виде “центральная властная структура — республиканская властная структура — местная властная структура”, каждая со своей вертикалью власти) [2].

Ставится обратная задача по определению функции передачи властных полномочий между отдаленными уровнями  $\chi_i^{(m)}(p_i, x, t)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\chi_i^{(0)} = 0$ :

$$\frac{\partial p_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_i(p_i, x, t) \frac{\partial p_i(x, t)}{\partial x} \right] + \int_{L_i}^{L_{i+1}} \chi_i^{(m)}(p_i, \xi, t) [p_i(\xi, t) - p_i(x, t)] \partial \xi + F_i(p_i, p_1, p_2, x, t), \quad L_i < x < L_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Omega = \{(x, t): L_i < x < L_{i+1}, i = \overline{0, n-1}; L_0 = 0, L_n = L, t > t_0\}; \quad (2)$$

начальные условия

$$p_i(x, t_0) = p_{i,0}(x) \geq 0, \quad L_i < x < L_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

граничные условия

$$-\kappa_0(p_0, x, t) \frac{\partial p_0}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\kappa_n(p_n, x, t) \frac{\partial p_n}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (4)$$

условия согласования

$$\alpha_i p_i + \beta_i \kappa_i \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow L_{i+1}^-} = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1} \kappa_{i+1} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow L_{i+1}^+}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

где  $\kappa_i(p_i, x, t) > 0$ ,  $\chi_i^{(m)}(p_i, x, t) \geq 0$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $p_1(x, t) \geq 0$ ,  $p_2(x, t) \geq 0$  монотонно убывающие по  $x$  функции. Коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i \in \{0 \vee 1\}$  задают условия согласования функции распределения властных полномочий между подобластями  $\Omega$ . Смысл введенных величин следующий:  $p_i(x, t)$  — описывает динамику распределения власти в иерархической структуре, т. е. зависимость уровня реально осуществляемой инстанцией власти от ее местоположения ( $x$ ) и времени ( $t$ );  $\kappa_i(p_i, x, t) > 0$  — коэффициент передачи властных полномочий между соседними уровнями (механизм “близкодействия”);  $\chi_i^{(m)}(p_i, x, t) \geq 0$  — коэффициент передачи властных полномочий между отдаленными уровнями (механизм “дальнодействия”) при  $m$ -приближении;  $F_i(p_i, p_1, p_2, x, t)$  — характеризует реакцию системы (общества);  $p_i(x, t_0) = p_{i,0}(x)$  — начальное распределение власти в структуре;  $p_1(x, t) \geq 0$ ,  $p_2(x, t) \geq 0$  — минимальные и максимальные властные полномочия в иерархии,  $p_1(x, t) \leq p_i(x, t) \leq p_2(x, t)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. П. Моделирование системы “власть — общество”. М.: Физматлит, 2006.
2. Латыпов И. И., Латыпова А. З. Численно-аналитическое исследование модели “власть — общество” // VI Уфимская Междунар. конф. “Комплексный анализ и дифференциальные уравнения”, посвященная 70-летию чл.-корр. РАН В. В. Напалкова. Уфа: ИМВЦ, 2011. С. 113–114.

## МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Лукинов В. Л.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6,  
Новосибирск, 630090 Россия; Vitaliy.Lukinov@ngs.ru*

В статье представлены результаты, полученные на основе применения аналитического продолжения методов Монте-Карло для решения уравнения Гельмгольца путем замены спектрального параметра [2, 4].

Построение оценок, связанных с процессом “блуждания по сферам”, для решения уравнения Гельмгольца основано на сведении исходной задачи к интегральному уравнению второго рода [1]. Обоснование оценок линейных функционалов от решения основано на условии сходимости ряда Неймана, что приводит к дополнительным ограничениям на входные параметры задачи, при которых спектральный радиус соответствующего интегрального оператора обязан быть меньше единицы. Данные оценки неудовлетворительны из-за недостаточной скорости сходимости ряда Неймана, в случае, когда спектральный радиус оператора достаточно близок к единице. В работе путем аналитического продолжения резольвенты построены новые оценки “блуждания по сферам” и вероятностное представление для решения уравнения Гельмгольца в случае выхода спектрального параметра за границу сходимости классических методов.

Новизна работы заключается в применении разработанного Г. А. Михайловым метода параметрического дифференцирования для построения скалярных оценок “блуждания по сферам” [3]. Показано, что необходимые оценки итераций резольвенты могут быть получены путем параметрического дифференцирования специальной краевой задачи. С помощью данного метода построено аналитическое продолжение оценок функционалов решения метагармонического уравнения со случайными правой частью и граничными условиями первого рода.

Получены условно оптимальные значения параметров (число траекторий; величина, определяющая погрешность границы; число итераций). Проведен ряд численных расчетов, подтверждающих теоретические утверждения.

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 11-01-00252-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Наука, 2003.
2. Сабельфельд К. К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. М.: Наука, 1989.
3. Лукинов В. Л., Михайлов Г. А. Вероятностное представление и методы Монте-Карло для решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения // РЖ-НМ. 2004. Т. 19, № 5. С. 434–449.
4. Лукинов В. Л. Аналитическое продолжение вероятностного представления резольвенты для первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Журн. выч. технологий. Т. 13, № 4. С. 51–56. Специальное издание.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛАНЕТООБРАЗОВАНИЯ

Маркелова Т. В., Снытников В. Н.

*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН,  
просп. Акад. Лавреньева, 5, Новосибирск, 630090 Россия;  
matamara@gmail.com, snyt@catalysis.ru*

На протяжении многих лет остаются актуальными вопросы формирования и эволюции планетарных систем с химической эволюцией вещества. Для изучения механизмов всех этих процессов в астрофизике необходимо создавать численные модели. Для поздних этапов эволюции протопланетного диска разработан ряд математических моделей, включающих столкновения тел, к примеру [1]. Но они не дают ответа на вопрос, как были образованы зародыши планет ( $d \approx 1$  км). Представленная в докладе модель описывает динамику массивного газопылевого диска на ранних этапах эволюции, когда масса самого диска сопоставима с массой центрального тела. В массивном диске важную роль может играть развитие гравитационной неустойчивости. Кроме того, имеют место регулярные структуры, такие как кольцевые волны плотности, спиральные рукава, коллапсирующие сгустки вещества. Из-за отсутствия непрерывной зависимости подобных решений от начальных параметров нестационарная задача их формирования является некорректной.

В работе [2] была представлена модель гравитационных систем многих тел с газом. В этой модели численно решалась система уравнений, описывающих динамику пылевой компоненты и газа, а также уравнение Пуассона для гравитационного потенциала. Для моделирования движения частиц было взято бесстолкновительное кинетическое уравнение Власова. При таком подходе частицы взаимодействуют между собой только через гравитационный потенциал. Чтобы изучить влияние неупругих столкновений частиц на общую динамику газо-пылевого диска, а так же на развитие коллективных гравитационных процессов, нами модифицирована эта модель. В докладе представлен метод решения уравнения Больцмана с парными неупругими столкновениями

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \text{St}, \quad (1)$$

где  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, m)$  — одночастичная функция распределения по координатам  $\mathbf{r}$ , скоростям  $\mathbf{u}$  и массам  $m$ ; St — интеграл, посредством которого учитываются неупругие столкновения.

В этом случае масса частицы может увеличиваться в результате ее слияния с другими, и может уменьшаться эффективная локальная длина Джинса. При слиянии также изменяется и тепловая энергия частиц. На основе разработанных алгоритмов сделана параллельная реализация программы для суперЭВМ кластерной архитектуры с распределенной памятью. Проведены численные эксперименты на базе ССКЦ. Это позволило получить оценки возможного разогрева протопланет при неупругих столкновениях.

Работа частично поддержана СО РАН (интеграционный проект, к-р Михайленко Б. Г.), РАН (программы президиума 21, 22, 28).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Энеев Т. М., Козлов Н. Н. Модель аккумуляционного процесса формирования планетарных систем // *Астрономический вестник*. 1981. Т. 15, № 2. С. 80–93.
2. Снытников В. Н., Пармон В. Н., Вшивков В. А., Дудникова Г. И., Никитин С. А., Снытников А. В. Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // *Вычислительные технологии*. 2002. Т. 7, № 3. С. 72–84.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

Маркова Е. В.

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033 Россия;  
markova@isem.sei.irk.ru*

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра вида

$$\int_0^{a(t)} K_1(t, s)x(s) ds + \int_{a(t)}^t K_2(t, s)x(s) ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $0 < a(t) < t$ ,  $t \in (0, T]$ ,  $a(0) = 0$ ,  $K_1(t, s)$ ,  $K_2(t, s)$ ,  $f(t)$  — непрерывные и достаточно гладкие функции,  $f(0) = 0$ ,  $K_2(t, t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T]$ .

Теория и численные методы решения уравнения (1) при  $K_1(t, s) \equiv 0$  подробно исследованы в монографии [1]. Специфика таких уравнений требует, в частности, адаптации численных процедур, используемых для решения классических интегральных уравнений. Основная цель данной работы — выяснение применимости этих же квадратурных методов для численного решения (1).

Для начала исследуется метод правых прямоугольников. Введем сетку узлов  $t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $nh = T$ , и, аппроксимируя интегралы в (1) суммами, в очевидных обозначениях запишем сеточный аналог:

$$h \sum_{j=1}^{l-1} K_1(t_i, t_j)x^h(t_j) + (a(t_i) - t_{l-1})K_1(t_i, a(t_i))x^h(a(t_i)) + (t_l - a(t_i))K_2(t_i, t_l)x^h(t_l) + h \sum_{j=l+1}^i K_2(t_i, t_j)x^h(t_j) = f(t_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $l = [a(t_i)/h] + 1$ . Появление слагаемых, не входящих под знак суммы, обусловлено тем, что предел  $a(t_i)$  в общем случае не попадает на узел сетки.

При этом уже для  $n = 1$  приходится решать одно уравнение с двумя неизвестными:  $x^h(a(t_1))$  и  $x^h(t_1)$ . Аналогичная проблема возникает на каждом шаге (кроме частных случаев, когда  $a(t_i)$  попадает на узел сетки). Для решения этой проблемы используются различные варианты. Например, комбинирование методов правых и левых прямоугольников, применение процедур интерполяции и экстраполяции, а также использование знания о решении уравнения (1) в нуле.

Приводятся результаты расчетов для тестовых примеров, показывающие, что сходимость адаптированного метода правых прямоугольников остается линейной.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00722-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Апарцин А. С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕЛЬЕФА  
ОКЕАНИЧЕСКОГО ДНА  
ПО ВРЕМЕНАМ ПРИХОДА ЦУНАМИ  
В УЗЛЫ СЕТКИ**

**Марчук Ан. Г.**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
mag@omzg.ssc.ru*

Проблема достоверной цифровой батиметрии для численного моделирования геофизических процессов в океане до сих пор не решена в глобальном масштабе. От качества и достоверности таких данных во многом зависит оперативный прогноз цунами, который чаще всего осуществляется путем численных расчетов на регулярных сетках. В настоящее время регистраторы цунами могут быть установлены в достаточном количестве в тех местах, где это целесообразнее. Пусть мы установили такие датчики в узлах регулярной прямоугольной сетки с заданным пространственным шагом. В случае возникновения цунами регистраторы зафиксируют время прихода волны в каждый из них. То есть мы будем знать времена вступления во все узлы нашей сетки. В докладе представлен метод восстановления значений глубины во всех узлах сетки даже в том случае, если глубина неизвестна ни в одной точке акватории. Такая постановка в классификации обратных задач относится к задачам восстановления среды и, как и любая другая подобная некорректная задача может быть решена лишь приближенно. Точность метода сильно зависит от расстояний между точками установки регистраторов. Но на практике такой сеткой мониторинга можно покрывать лишь те области океана, где достоверная информация о батиметрии скудна или вообще отсутствует. Для практической реализации такого подхода не обязательно ждать очередного катастрофического цунами, так как существующая аппаратура способна уверенно регистрировать цунами высотой всего в несколько миллиметров.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-0001).

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛАГЕРРА

Мастрюков А. Ф.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
maf@omzg.sscs.ru*

В работе рассматривается решение обратной задачи оптимизационным методом с использованием функций Лагерра. Численные расчеты проводятся для уравнений Максвелла в 1-мерной постановке в волновом и диффузионном приближениях. По известному решению в некоторой точке пространства ищется распределение диэлектрической проницаемости и проводимости среды. Минимизируется функция от гармоник Лагерра. Минимизация проводится методом сопряженных градиентов.

Приводятся результаты определения электромагнитных параметров слоистой среды. Исследуется влияние формы источника электромагнитных волн и его спектр на точность решения обратной задачи. Сравняются точность решения обратной задачи при использовании широкополосного и гармонического источников электромагнитных волн.

Показано, при решения обратных задачах для волнового уравнения и уравнения диффузии, основанных на спектральном преобразовании Лагерра использование источников волн генерирующих импульс, имеющий широкий спектр Фурье позволяет получить более высокую точность определения искомым параметров уравнений в сравнении с монохроматическим источником.

Более высокая экономичность численного алгоритма может быть достигнута, когда импульс источника волн имеет форму функции ряда Лагерра. При этом точность определения искомым параметров обратной задачи слабо зависит от номера функции ряда Лагерра.



## О РЕШЕНИИ ЖЕСТКО НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ИТЕРИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ТИХОНОВА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИНЦИПА РАВНОВЕСИЯ

Милейко А. Л., Солодкий С. Г.

*Институт математики НАН Украины,  
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601 Украина;  
anna\_mileyko@ukr.net, solodky@imath.kiev.ua*

Рассмотрим проблему приближенного решения жестко некорректной задачи, представимой в виде операторного уравнения  $I$  рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A : X \rightarrow Y$  — линейный компактный инъективный оператор, действующий между гильбертовыми пространствами  $X$  и  $Y$ . Будем также предполагать, что вместо  $y$  известно некоторое возмущение  $y_\delta \in Y$ :  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ , а вместо  $A$  — оператор  $A_h$ :  $\|A - A_h\| \leq h$ ,  $h > 0$ , где  $A_h : X \rightarrow Y$ .

Будем предполагать, что  $x_0$  принадлежит множеству

$$M_{p,\rho}^K(A) := \{x : x = \underbrace{(\ln \dots \ln(A^*A)^{-1})}_{K\text{-раз}}^{-p}v, \quad \|v\| \leq \rho\}, \quad (2)$$

при некоторых неизвестных  $0 < p \leq p_1$ ,  $K = 1, 2, \dots$  и известном  $\rho > 0$ .

Для решения задачи (1) мы будем применять итерированный метод Тихонова в комбинации с принципом равновесия. В рамках принципа равновесия в качестве параметра регуляризации берется элемент

$$\alpha = \alpha_+ := \max \{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $x_0 \in M_{p,\rho}^K(A)$ ,  $0 < p \leq p_1$ ,  $K = 1, 2, \dots$  и параметр регуляризации выбирается согласно правилу (3). Тогда для любых  $\delta, h > 0$  погрешность имеет порядок

$$O\left(\left[\underbrace{\ln \dots \ln}_{K\text{-раз}} \frac{\rho}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right]^{-p}\right).$$

В работе [1] вводится множество (1). В работе [2] для решения некорректных задач был, впервые, предложен принцип равновесия.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mair B. A.** Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators // SIAM J. Math. Anal. 1994. V. 1, N 25. P. 135–147.
2. **Pereverzev S., Schock E.** On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. 2005. N 43. P. 2060–2076.

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Михайлова Д. О.

*Институт математики и механики Уральского отделения РАН,  
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990 Россия;  
darso@rambler.ru*

Рассматривается задача о динамическом восстановлении неизвестных управлений в параболической системе по результатам приближенных измерений наблюдаемого движения системы, которые поступают в динамике в течение заданного промежутка времени. Эта задача некорректна.

Пусть управляемая система имеет вид:

$$y_t = Ly + fu, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \quad T = [t_0, \vartheta],$$

$$-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1; \quad (1)$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega; \quad y(t, x) = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega; \quad (2)$$

$$Ly = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(t, x)y) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + a(t, x)y. \quad (3)$$

Будем считать, что  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ ;  $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ;  $y_0 \in L_2(\Omega)$ ; коэффициенты оператора  $L$  удовлетворяют стандартным условиям [1, гл. 3, пар. 3], обеспечивающим существование единственного решения из энергетического класса, принадлежащего пространству  $C(T; L_2(\Omega))$ .

Априори неизвестной является функция управляющего воздействия на систему  $u \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$ , удовлетворяющая геометрическим ограничениям  $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ ,  $t \in T$ .

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением  $y = y[t]$ ,  $t \in T$ , осуществляется наблюдение в течение промежутка времени  $T$  и в соответствующие текущие моменты времени  $t \in T$  приближенно измеряются состояния системы  $y[t]$ , причем результаты этих измерений  $y_\delta[t]$  удовлетворяют следующему условию точности измерений

$$\|y_\delta[t] - y[t]\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

Требуется построить динамический алгоритм, решающий задачу восстановления управления  $u$ .

Для решения задачи предлагается воспользоваться методом динамической регуляризации [2], основанном на подходах теории позиционных дифференциальных игр и теории некорректных задач. Построен динамический регулярирующий алгоритм решения задачи восстановления, позволяющий получить поточечную сходимость, сходимость в среднеквадратичном, сходимость вариаций и кусочно-равномерную сходимость на  $T$  регуляризованных приближений.

Работа продолжает исследование [3].

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. **Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
3. **Короткий М. А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикладная матем. и мех. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пененко А. В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
aleks@ommgp.sscs.ru*

Разнообразие возникающих в приложениях постановок коэффициентных обратных задач требует разработки алгоритмов как для их решения, так и алгоритмов анализа и сравнения информативности их данных. В качестве средства такого анализа рассматривается сингулярное разложение. Для его применения обратную задачу можно переформулировать в виде квазилинейного операторного уравнения. Если обратная задача исходно формулируется в виде краевой задачи для дифференциального уравнения, то цель достигается с помощью аппарата сопряженных уравнений и функций чувствительности, из которых можно сконструировать оператор чувствительности — обобщение производной Фреше оператора прямой задачи. По точности данных обратной задачи в ходе такого анализа можно оценить количество и вид восстанавливаемых элементов разложения неизвестного коэффициента по правым сингулярным векторам оператора чувствительности.

Основное внимание в работе уделено обратной коэффициентной задаче теплопроводности. В зависимости от формулировки обратной задачи (дифференциальной [1] или дифференциально-разностной [2]) оператор чувствительности может иметь различный вид. Правильность конструкций для случая дифференциальной формы подтверждается аналитическим примером с постоянным коэффициентом в полубесконечной области, а для случая дифференциально-разностной формы — численным экспериментом.

На основе оператора чувствительности можно предложить алгоритм решения обратной задачи. В работе рассматривается итерационный алгоритм Ньютоновского типа с использованием сингулярной срезки оператора чувствительности. Его основная идея состоит в том, что неизвестный коэффициент восстанавливается на последовательности расширяющихся сингулярных подпространств оператора чувствительности, на которых число обусловленности оператора возрастает.

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований № 4 Президиума РАН и № 3 Отделения математических наук РАН, проектом РФФИ 11-01-00187, а также госконтрактом № 14.740.11.0350 по программе “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области математики” ФЦП “Научно-педагогические кадры инновационной России”.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пененко А. В.** О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента / Труды 1-й Междунар. молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. Сиб. электронные мат. известия, 2010. Ч. 1. С. 178–198.
2. **Пененко А. В.** Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами // Сиб. журн. вычисл. мат. 2012 (в печати).

**О ПРИМЕНЕНИИ АЛГОРИТМА  
СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ  
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА,  
ВОЗНИКАЮЩЕМУ В ЗАДАЧАХ  
ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ  
НА ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

Пяткин В. П., Салов Г. И.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, 630090 Россия;  
pvp@ooi.ssc.ru, sgi@ooi.ssc.ru*

Пусть наблюдателю дано зашумленное изображение  $X = X(u, v)$ , и он должен решить, присутствует на нем заданный важный объект или нет. Зашумленное (искаженное случайным шумом) изображение  $X = X(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , где  $D$  — ограниченный прямоугольник, можно рассматривать как случайный элемент, заданный на общем измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  с полной вероятностной мерой  $\mathbf{P}$  и принимающий значения в гильбертовом пространстве действительных функций, интегрируемых с квадратом на  $D$ ,  $L^2(D)$  со скалярным произведением двух элементов  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ , причем такой, что  $\mathbf{E}\|X\|^2 < \infty$ , где  $\mathbf{E}$  — оператор среднего значения (математического ожидания). Решение о присутствии объекта должно приниматься на основании значения  $F(X)$  некоторого специального функционала  $F$ , действующего на  $L^2(D)$ .

Ниже будем обозначать через  $Y$  (с индексами и без них) изображение, содержащее важный объект, а через  $Z$  — не содержащее этот объект. Как известно, каждый линейный непрерывный функционал  $F$  допускает представление вида  $F(g) = (g, h)$ , где  $h \in L^2(D)$ . Отыскание подходящего линейного функционала  $F$  приводит к следующему интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода для  $h$ :

$$\iint_D [\mathbf{E}Z(u, v)Z(s, t) - \mathbf{E}Z(u, v)\mathbf{E}Z(s, t)]h(s, t) ds dt = \mathbf{E}Y(u, v) - \mathbf{E}Z(u, v). \quad (1)$$

Предположим, что ковариационная функция  $\mathbf{E}Z(u, v)Z(s, t)$  и средние значения, входящие в (1), не известны наблюдателю (типичный на практике случай), но ему могут быть предоставлены две стохастически независимые последовательности независимых зашумленных изображений  $\{Y_n\}$  и  $\{Z_n\}$ , содержащие и не содержащие важный объект, полученные в тех же физических условиях, которые сохранятся и в ближайшем будущем. Основная трудность “известного” подхода заключается сначала в оценивании по  $\{Y_n\}$  и  $\{Z_n\}$  неизвестной ковариационной функции и средних значений, а затем и в получении приближенного решения некорректной задачи с приближенными, и притом с неизвестной точностью, данными и ядром интегрального оператора (результатами оценивания). Практически в этом нет необходимости. С помощью простой рекуррентной процедуры по  $\{Y_n\}$  и  $\{Z_n\}$  может быть сразу получена последовательность приближенных решений уравнения (1), сходящаяся в  $L^2(D)$  к  $h$ .

Предположим, что самосопряженный положительный интегральный оператор в левой части (1) является строго положительным (все его собственные значения  $> 0$ ) и  $\{a_n\}$  — последовательность положительных чисел такая, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ .

**Теорема.** Пусть существует решение  $h \in L^2(D)$  уравнения (1). Тогда для любого случайного элемента  $H_1$  с  $\mathbf{E}\|H_1\|^2 < \infty$  и последовательности случайных элементов  $H_2, H_3, \dots$ , задаваемой рекуррентной формулой

$$H_{n+1}(u, v) = H_n(u, v) + a_n \left[ Y_n(u, v) - Z_{2n}(u, v) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \iint_D [Z_{2n}(s, t) - Z_{2n-1}(s, t)] H_n(s, t) ds dt \right) \right], \quad (2)$$

имеют место соотношения  $\mathbf{P}\{\|H_n - h\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = 1, \mathbf{E}\|H_n - h\|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Утверждение вытекает из результатов работы [Салов Г. И. Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24. С. 407–413].

Другая рассматриваемая еще более сложная задача состоит в скорейшем обнаружении момента появления объекта в последовательности наблюдаемых зашумленных изображений (по минимальному числу изображений после появления объекта). В докладе приведены модельные примеры, характеризующие возможности применения алгоритма (2).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 10-07-00131).

## РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ НЕФТИ ПРИ УПРУГОМ СПОСОБЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ

Рысбайулы Б., Ажибекова А. С.

*Казахстанско-Британский технический университет,  
ул. Толе би, 59, Алматы, 050000 Казахстан;  
b.rysbaiuly@mail.ru, aliya azhibek@mail.ru*

Для исследования пласта искусственно создается нестационарный режим фильтрации и измеряется давление в зависимости от времени в одной или нескольких скважинах. На основе данных об изменении дебитов скважин и об изменении давления в определенных точках пласта могут быть получены сведения о параметрах пласта — проницаемости, пьезопроводности, о расположении границ пласта. В работах [1, 2], используя аппарат операционного исчисления, определяются некоторые параметры пласта. В настоящей работе предлагается другой метод, а именно строится функционал, значение которого стремится к нулю в процессе итераций. Минимум этого функционала дает коэффициент вязкости нефти. В области  $Q = (\rho, R) \times (0, T)$  изучается осесимметричное движение жидкости в цилиндрической системе координат [3], давление при этом удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\chi}{\mu} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right), \quad \rho < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$P(r, 0) = P_0(r), \quad P(R, t) = P_1(t), \quad \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho} = A(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Здесь  $A = q(t)/(2\rho\pi kh)$ . Чтобы определить коэффициент вязкости нефти в пласте нам необходимо еще одно условие. В качестве дополнительного условия используем измеренное (точное) значение давления на забое скважины:

$$P(\rho, t) = P_z(t). \quad (3)$$

Задача (1), (2), с дополнительным граничным условием (3) является обратной задачей нахождения коэффициента вязкости  $\mu$ .

В работе составлена сопряженная задача:

$$\frac{\partial(r\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\chi}{\mu_n} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\psi(r, T) = 0, \quad \psi(R, T) = 0, \quad \left( \frac{r\chi}{\mu_n} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho} = 2(P_n(\rho, t) - P_z(t)) \quad (5)$$

и выведена итерационная формула для вычисления коэффициента вязкости:

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} = \frac{1}{\mu_n} - \beta_n \int_0^T \int_\rho^R r\chi \frac{\partial P_n}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr dt. \quad (6)$$

Исследуются математические свойства задачи (1), (2) и (4), (5) и итерационной формулы (6). Проведены тестовые расчеты.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. Баренблатт Г. И., Борисов Ю. П., Каменецкий С. Г., Крылов А. П. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в оставленных скважинах // Изв. АН СССР. 1957. ОТН. № 11. С. 84–91.

**AN APPROXIMATE METHOD  
FOR CALCULATING THE TEMPERATURE  
OF THE UNDERGROUND PIPELINE,  
CONSIDERING THE FREEZING  
OF THE CRUSHED SOIL**

**Rysbaiuly B., Bekarystankyzy A.**

*Kazakh-British Technical University,  
st. Tole bi, 59, Almaty, Kazakhstan;*

b.rysbaiuly@mail.ru, akbayan.b@mail.ru

It is worth noting that the construction of the trench with subsequent lying of oil pipeline, and filling up with crushed soil leads to a significant change in the thermo-physical properties of the soil and the conditions of heat and mass transfer. In this case at a considerable length of the track substantially are leveled the properties of soil laid immediately surrounding the pipeline, also increased the influence of humidity because of facilitation of moisture spread of rainfall in the thickness of the crushed soil.

The main problem of the calculation and prediction of thermal modes of underground pipes is the accuracy of the prediction of thermo-physical parameters of the soil along the pipeline route, especially in the zone of freezing, thawing and wet soils. And it is not related to insufficient knowledge of physical processes. To the issues of interaction of pipes with the soil has always been given a lot of attention and were devoted the many scientific papers. But the freezing process and moisture transfer processes are unstable physical phenomena that are affected by many random factors.

**Mathematical model**

$$C(z) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad 0 < z < H.$$

Here  $0 < z < h(t)$  — thawed zone,  $h(t) < z < h_1(t)$  — phase zone,  $h_1(t) < z < H$  — frozen zone;  $h(t)$  — border of thawed and phase zones, and  $h_1(t)$  — border of phase and frozen zones. In addition  $C$  — the coefficient of bulk heat capacity,  $\lambda$  — coefficient of thermal conductivity, and  $H$  — laying depth of oil pipeline.

Mutual influence of thermal zones on each other lies in the fact that on moving boundaries  $h(t)$  and  $h_1(t)$  are necessarily fulfilled the conditions of continuity of temperature and energy

$$\begin{aligned} [\theta(z, t)]_{z=h(t)} &= 0, & [\theta(z, t)]_{z=h_1(t)} &= 0, \\ \left[ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=h(t)} &= -q_0 \gamma_0 [W_H]_{z=h(t)} \frac{dh}{dt}, & \left[ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=h_1(t)} &= 0. \end{aligned}$$

In this paper we develop a method for calculating the charging soil temperature on the surface of an underground pipeline, were proven some properties of the iterative process, and were carried out test calculations.

**REFERENCES**

1. **Gukhman A. A.** Physical principles of heat transfer. ONTI, 1934.
2. **Chudnovsky A. F.** Heat exchange in disperse media. M.: Gostekhizdat, 1954.
3. **Rysbaiuly B., Ismailov A. O.** Determination of thermal conductivity of a homogeneous soil in the process of freezing // Reports of the National Academy of Sciences of RK. 2008. V. 2. P. 26–28.



## СРАВНЕНИЕ ДВУХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Светов И. Е.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад.Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия;  
svetovie@math.nsc.ru*

**Задача векторной томографии.** Пусть некоторое векторное поле  $v$  задано в единичном круге, заполненном средой с прямолинейным характером распространения лучей. По известным значениям продольного и (или) поперечного лучевых преобразований требуется восстановить соленоидальную и (или) потенциальную часть векторного поля  $v$ .

Любое векторное поле может быть представлено в виде  $v = d^\perp\psi + d\varphi$ , где

$$d^\perp\psi = \left( -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$d\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right), \quad (2)$$

— соленоидальная и потенциальная части векторного поля  $v$ , соответственно.

Известно, что по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть  $d^\perp\psi$  векторного поля  $v$ . В то время как, по поперечному лучевому преобразованию можно восстановить лишь потенциальную часть  $d\varphi$  векторного поля  $v$ .

В данном докладе для построения аппроксимации соленоидальной и (или) потенциальной части искомого векторного поля использовались два алгоритма.

**Алгоритм 1** основан на методе наименьших квадратов, а в качестве аппроксимирующей последовательности выступают соленоидальные и потенциальные векторные поля, построенные на основе двумерных  $B$ -сплайнов с использованием формул (1) и (2), соответственно. Данный алгоритм является модификацией алгоритма решения задачи эмиссионной двумерной томографии, предложенного в [1].

**Алгоритм 2** основан на методе сингулярного разложения операторов продольного и поперечного лучевых преобразований векторных полей. Ортонормированные соленоидальные и потенциальные базисы строятся с использованием формул (1) и (2) на основе потенциалов

$$\Phi_{k,n}^{\cos,\sin}(x,y) = C_{k,n}[(1-x^2-y^2)H_k^{\cos,\sin}(x,y)P_n^{(k+2,k+1)}(x^2+y^2)],$$

$$k, n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $H_k^{\cos,\sin}(x,y)$  — гармонические полиномы степени  $k$ ,  $P_n^{(k+2,k+1)}(t)$  — полиномы Якоби степени  $n$ ,  $C_{k,n}$  — нормировочная константа. Теоретическое обоснование см. в [2].

На тестовом материале проведено численное сравнение качества восстановления векторных полей этими алгоритмами. Численные эксперименты продемонстрировали сильные и слабые стороны каждого из предлагаемых алгоритмов.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-07-00447-а), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 2012-32).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Деревцов Е. Ю., Светов И. Е., Волков Ю. С.** Использование  $B$ -сплайнов в задаче эмиссионной  $2D$ -томографии в рефрагирующей среде // Сиб. журн. индустр. матем. 2008. Т. 11, № 3. С. 45–60.
2. **Derevtsov E. Yu., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.** Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2011. V. 19, N 4/5. P. 689–715.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ В РЕФРАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ $B$ -СПЛАЙНОВ

Светов И. Е.<sup>1</sup>, Деревцов Е. Ю.<sup>1</sup>, Волков Ю. С.<sup>1</sup>, Шустер Т.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад.Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;*

*svetovie@math.nsc.ru, dert@math.nsc.ru, volkov@math.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Department of Mathematics, Carl von Ossietzky University,  
Oldenburg, 62129 Germany; thomas.schuster@uni-oldenburg.de*

**Задача двумерной векторной томографии.** Пусть единичный круг заполнен средой с рефракцией (явление рефракции моделируется заданием в рассматриваемой области римановой метрики). В среде распределено некоторое векторное поле  $w(x)$ . По известным продольным и (или) поперечным лучевым преобразованиям требуется найти соленоидальную и (или) потенциальную часть векторного поля.

Авторами доказаны некоторые свойства продольного и поперечного преобразований, такие как описание их ядер, определение взаимосвязи между этими двумя преобразованиями и их связь с преобразованием Радона. Получены оценки устойчивости для продольного и поперечного лучевых преобразований векторного поля, в случае прямолинейного характера распространения лучей.

В докладе рассматривается численное решение задачи восстановления двумерного векторного поля на основе метода наименьших квадратов (МНК), предложенного в работе [1]. Выбор аппроксимирующей последовательности как и в работах [2, 3] осуществляется на основе  $B$ -сплайновых аппроксимаций. Алгоритм позволяет восстанавливать соленоидальную часть векторного поля по его известным продольным лучевым преобразованиям, или потенциальную часть — по известным поперечным лучевым преобразованиям.

Проведено всестороннее тестирование алгоритма с целью определения пределов его применимости. Исследовано влияние на точность восстановления таких факторов, как количество элементов аппроксимирующей последовательности, гладкость восстанавливаемого векторного поля, кривизна римановой метрики.

Работа частично поддержана СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 2012-32), Отделения математических наук РАН (проект 2012-1.3.1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Derevtsov E. Yu., Kleshchev A. G., Sharafutdinov V. A.** Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 1999. V. 7, N 1. P. 83–103.
2. **Деревцов Е. Ю., Светов И. Е., Волков Ю. С.** Использование  $B$ -сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде // *Сиб. журн. индустриальной мат.* 2008. Т. 11, № 3. С. 45–60.
3. **Светов И. Е., Полякова А. П.** Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием  $B$ -сплайнов // *Сиб. журн. вычисл. мат.* 2010. Т. 13, № 2. С. 183–199.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ В РЕФРАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Седайкина В. А.

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта,  
НИИ прикладной информатики и математической геофизики,  
ул. Ал. Невского, 14, Калининград, 236041 Россия;  
VSedaikina@kantiana.ru*

В работе представлен алгоритм решения компьютерной томографии.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $R^2$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Пусть  $If$  — лучевое преобразование от функции  $f$ , заданное на границе области равенством:

$$If = \int_0^{\tau} f(\gamma(x, \xi, t)) dt,$$

где  $x \in \Gamma$ ,  $\gamma(x, \xi, t)$  — луч, выпущенный из точки  $x$  в направлении  $\xi$ ,  $\tau$  — время, при котором луч пересекает  $\Gamma$ .

Требуется восстановить функцию  $f$  по ее лучевому преобразованию  $If$ .

Решение основано на некоторой формуле обращения [1, 2] с предварительным пересчетом исходных данных. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 12-01-0026а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пестов Л. Н.** Вопросы корректности задач лучевой томографии. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2003.
2. **Pestov L., Uhlmann G.** On characterization of the range and inversion formulas for the geodesic X-ray transform // Intern. Math. Research Notices. 2004. V. 80. P. 4331–4347.

## О ПРОКСИМАЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ С АДАПТАЦИЕЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА 1-ГО РОДА

Сережникова Т. И.

*Институт математики и механики УрО РАН,  
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219 Россия;  
sti@imm.uran.ru*

Рассматривается численное решение одномерных и двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Для восстановления негладких решений рассматриваемых уравнений разработаны два алгоритма, основанные на тихоновской регуляризации со стабилизаторами: для первого алгоритма — в форме полной вариации, для второго алгоритма — в виде нормы пространства Липшица. В разработанных алгоритмах для вычисления экстремального элемента  $u^\alpha$  ( $\alpha$  — параметр регуляризации) используется субградиентный метод для минимизации целевого функционала  $\Phi^\alpha(u)$  в методе регуляризации и итерационный проксимальный алгоритм:

$$u^k = \operatorname{argmin} \{ \Phi^\alpha(u) + \beta \|u - u^{k-1}\|_H^2 : u \in U \},$$

где  $\beta > 0$ ,  $\|\cdot\|_H$  — некоторая гильбертова норма. Функционал  $\Phi^{\alpha,\beta} = \Phi^\alpha(u) + \beta \|u - v\|_H^2$  является сильно выпуклым, а параметр  $\beta$  не является малым.

Теоретические исследования рассматриваемых алгоритмов выполнены В. В. Васиным для общего случая решения линейных операторных уравнений  $Au = f$  с разрывным, в общем случае, многозначным оператором  $A^{-1}$ . В работе [1] для одномерного интегрального уравнения удалось достаточно хорошо восстановить решения с изломом (разрыв в производной) и разрывом первого рода самой функции. В ранее проведенных численных экспериментах [1, 2] в прох-алгоритме использовалась постоянная во всех точках величина параметра  $\beta$ .

Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность повышения точности восстановления изображения за счет адаптации  $\beta$ , выбора величины  $\beta$ , отличающейся в разных точках восстанавливаемого изображения.

На основе предложенных алгоритмов возможно создание эффективных технологий для качественного восстановления решений одно и двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с использованием современных суперкомпьютеров.

Работа поддержана РФФИ (проект № 012-01-00106).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Васин В. В., Сережникова Т. И.** Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 15–23.
2. **Сережникова Т. И.** Устойчивые методы восстановления зашумленных изображений // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. Вып. 9. С. 32–42.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В МОДЕЛЯХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В. М. ГЛУШКОВА

Сидлер И. В.

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
Лермонтова, 130, Иркутск, 664033 Россия;  
krlv@isem.sei.ru*

Двухсекторная модель макроэкономики В. М. Глушкова описывает взаимодействие двух групп макроэкономики: производства средств производства и производства предметов потребления. Эта модель описывается системой неклассических уравнений Вольтерра I и II рода с переменными пределами интегрирования [1, 2] (теория и численные методы рассмотрены в монографии [3]).

Решение задачи идентификации производственных функций рассматриваемой экономической системы имеет решающее значение для прикладных целей. В моделях В. М. Глушкова эти функции описывают эффективность функционирования основных производственных фондов, следовательно, учитывают влияние научно-технического прогресса. В работах [1, 2] предложена аппроксимация производственных функций в экспоненциальном виде.

Подход к решению задачи идентификации основывается на обработке данных предыстории. Для решения задач прогноза полученные результаты могут экстраполироваться на будущее с учетом тенденций настоящего момента.

Рассматривая экономическую систему с момента ее создания, представим модель в виде системы классических уравнений Вольтерра. Для идентификации ядер этих уравнений применен метод Прони — метод моделирования выборочных данных в виде линейной комбинации экспоненциальных функций [4]. Процедура Прони для подсчета  $p$  экспонент с использованием  $N$  ( $N > 2p$ ) отсчетов данных может быть представлена в виде трех этапов.

На первом этапе определяются параметры линейного предсказания, которые минимизируют сумму квадратов ошибок линейного предсказания.

На втором этапе из коэффициентов линейного предсказания формируется характеристический полином и определяются его корни, которые будут давать оценки коэффициентов затухания для каждого экспоненциального члена.

На третьем этапе экспоненциальная аппроксимация ядер становится линейной относительно оставшихся неизвестных оценок амплитуд экспонент, которые получим по методу наименьших квадратов, минимизируя сумму квадратов ошибок по каждому из параметров.

На численных примерах проведено сравнение результатов процедуры Прони с результатами пакета прикладных программ MATLAB и системы компьютерной алгебры Maple.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00722-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.
2. Яценко Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наук. думка, 1991.
3. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.
4. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ КВАДРАТУР

Сизиков В. С.

*Санкт-Петербургский национальный  
исследовательский университет ИТМО,  
Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101 Россия;  
sizikov2000@mail.ru*

Численное решение сингулярных интегральных уравнений (СИУ) обычно осуществляется методом квадратур или аппроксимации с аналитическим вычислением некоторых несобственных интегралов, причем для устранения особенностей используется *сдвиг сеток узлов* [1, 2]. В данной работе (как и в работе [3]) предлагается вариант, в котором сетки узлов могут совпадать, а особенности устраняются за счет использования *обобщенной квадратурной формулы*. Рассмотрим в качестве примера СИУ Абеля

$$\int_x^R \frac{s}{\sqrt{s^2 - x^2}} y(s) ds = f(x), \quad 0 \leq x \leq R. \quad (1)$$

Введем, вообще говоря, неравномерные и несовпадающие (в частности, совпадающие) *сетки узлов* по  $x$  и  $s$ :  $0 \leq x_1 \leq s_1 < x_2 \leq s_2 < \dots < x_i \leq s_i < \dots < x_n \leq s_n \leq R$ . На некотором промежутке  $[s_j, s_{j+1})$ ,  $j \in [1, n-1]$ , полагаем  $y(s) = y(s_j) \equiv y_j = \text{const}$ . Имеем:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x^2}} y(s) ds = \left( \sqrt{s_{j+1}^2 - x^2} - \sqrt{s_j^2 - x^2} \right) y_j, \quad (2)$$

$$j \in [1, n-1], \quad x \leq s_j < s_{j+1} \leq R,$$

— *обобщенная квадратурная формула левых прямоугольников*. Интеграл (1) есть сумма интегралов (2):

$$\int_{x_i}^R \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y(s) ds = \sum_{j=i}^{n-1} \left( \sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2} - \sqrt{s_j^2 - x_i^2} \right) y_j = f_i, \quad (3)$$

$$i \in [1, n-1],$$

— СЛАУ относительно  $y_j$  с верхней треугольной матрицей. Ее рекуррентное решение

$$y_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{p_{n-1, n-1}}, \quad y_i = \frac{1}{p_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} p_{ij} y_j \right), \quad (4)$$

$$i = n-2, n-3, \dots, 1,$$

$$p_{ij} = \sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2} - \sqrt{s_j^2 - x_i^2}, \quad (4)$$

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} \quad (\text{линейная экстраполяция}).$$

Получены оценки погрешностей решения СИУ Абеля обобщенным методом квадратур.

Данная методика применена к некоторым другим СИУ и использована в задаче дифракции рентгеновских лучей на пленках, в задаче инфракрасной томографии горячего осесимметричного газа и др.

Работа была поддержана РФФИ (грант 09-08-00034) и DTU (project 010246).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
2. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994.
3. Сизиков В. С., Смирнов А. В., Федоров Б. А. Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур // Изв. вузов. Математика. 2004. № 8. С. 62–70.



# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫСОТНЫХ ПРОФИЛЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО СОДЕРЖАНИЯ НДО В АТМОСФЕРЕ ПО ИК СПЕКТРАМ, РЕГИСТРИРУЕМЫМ НА УРАЛЬСКОЙ АТМОСФЕРНОЙ ФУРЬЕ СТАНЦИИ В КОУРОВКЕ

Скорик Г. Г.<sup>1</sup>, Грибанов К. Г.<sup>2</sup>, Рокотян Н. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН,

*ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219 Россия;*

skorik@imm.uran.ru

<sup>2</sup>Лаборатория физики климата и окружающей среды ИЕН УрФУ,

*пр. Ленина, 51, Екатеринбург, 620083 Россия;*

kgribanov@remotesensing.ru, nikita@rokotyan.com

Исследуется задача восстановления высотного профиля концентрации тяжелой воды (НДО) в атмосфере по инфракрасным спектрам пропускания, полученным с помощью Фурье-интерферометра наземного базирования Bruker IFS 125M.

Прямая задача моделирования спектра пропускания  $P(\nu)$  решается с помощью специализированного программного пакета FIRE-ARMS [1] с использованием базы спектральных линий HITRAN 2004 [2]. Спектр моделируется в специально подобранных микроокнах с линиями НДО/Н<sub>2</sub>O, интенсивности которых слабо зависят от вариаций температуры.

В силу того, что концентрация НДО в атмосфере относительно невелика, задача восстановления высотного профиля тяжелой воды становится линейной относительно оптической толщины  $\tau(\nu) = -\ln P(\nu)$

$$\int_0^H A(\nu, h) N_{\text{НДО}}(h) dh = -\ln P(\nu) + \ln P_0(\nu), \quad (1)$$

где  $P_0(\nu)$  — измеренный спектр,  $P_0(\nu)$  — модельный спектр пропускания без учета НДО, рассчитанный с высотными профилями температуры, давления, концентрации Н<sub>2</sub>O, полученными из данных реанализа атмосферы [3, 4]. Высотные профили остальных газов берутся средними для данного сезона и климатической зоны или восстанавливаются по другим частям спектра.

Задача (1) является некорректно поставленной и решается с помощью метода Тихонова со специальным стабилизатором, основанном на данных о взаимной корреляции концентрации НДО на различных высотах. Для более точного восстановления концентрации НДО, вначале аналогичным методом корректируется высотный профиль  $N_{\text{Н}_2\text{O}}(h)$ . Это позволяет точнее восстанавливать относительную концентрацию  $\delta D_{\text{НДО}} = ((N_{\text{Н}_2\text{O}}/N_{\text{НДО}})/R_0 - 1) \times 100 \%$ , где  $R_0 = 3.1069 \cdot 10^{-4}$  — стандартное отношение в океане.

Данным методом было обработано около 200 спектров, полученных на Уральской атмосферной Фурье станции в Коуровке в 2010–2011 годах.

Работа поддержана УрФУ (грант правительства РФ, договор 11.G 34.31.0064) и частично РФФИ (грант 12-01-00106).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Gribanov K. G., Zakharov V. I., Tashkun S. A., Tyuterev V. G.** A new software tool for radiative transfer calculations and its application to IMG/ADEOS data // JQSRT. 2001. V. 68, N 4. С. 435–451.

2. **Rothman L. S.** The HITRAN 2004 molecular spectroscopic database // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2005. V. 96. P. 139–204.
3. **NCEP** reanalysis data provided by the NOAA/OAR/ESRL PSD, Boulder, Colorado, USA. <http://www.esrl.noaa.gov/psd/>.
4. **Kalnay et al.** The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1996. V. 77. P. 437–470.

## ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

Собачкина Н. Л.

*Сибирский федеральный университет,  
ул. Ак. Куренского, 26, Красноярск, 660074 Россия;  
sobachkinanat@mail.ru*

Данная работа посвящена изучению сопряженной начально-краевой задачи, возникающей при совместном движении двух бинарных смесей с плоской границей раздела под действием термоконцентрационных сил. Система уравнений двумерного термодиффузионного движения бинарной смеси допускает четырехпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, порожденную операторами  $\partial/\partial x, t\partial/\partial x + \partial/\partial u, \partial/\partial \theta, \partial/\partial c$ . Относительно данной подалгебры существуют частично-инвариантные решения вида:

$$\begin{aligned} u &= xu(y, t), & v &= v(y, t), & p &= p(y, t), \\ \theta &= a(y, t)x^2 + b(y, t), & c &= h(y, t)x^2 + g(y, t), \end{aligned}$$

где  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$  соответственно;  $p$  — давление;  $\theta, c$  — отклонения температуры и концентрации от их равновесных значений. Это решение применяется для описания однонаправленного движения бинарных смесей с плоской поверхностью раздела между двумя твердыми стенками  $y = 0$  и  $y = h$ . Пусть смесь 1 занимает слой  $0 < y < l_0$ , а смесь 2 — слой  $l_0 < y < h$ . Предполагается, что на границе раздела коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации. Термоконцентрационный эффект порождает движение смесей, в котором поверхность раздела движется по закону  $y = l(t)$ . Таким образом, это решение описывает движение жидкостей вблизи точки локального нагрева  $x = 0$  твердых стенок.

Подстановка вида решения в систему уравнений движения с учетом граничных условий приводит к нелинейной начально-краевой задаче для определения функций  $u_j, v_j, p_j, a_j, b_j, h_j, g_j$  ( $j = 1, 2$ ) только двух переменных в области с неизвестной границей раздела  $l(t)$ . Показано, что стационарное состояние может быть только покоем. При специальных начальных данных найдены нестационарные решения. Одно из них описывает изотермическое движение смесей и имеет простое аналитическое выражение. В другом решение для температур и концентраций находятся в виде рядов Фурье. В обоих решениях граница раздела изменяется по закону  $l = l_0/1 + kt$ ,  $k = \text{const} > 0$ . Эти решения использовались в качестве тестовых при численном решении общей задачи.

С помощью специальной замены переменных задача преобразуется к начально-краевой задаче для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в фиксированных областях, а именно, рассматривается на отрезках  $[0, 1]$  по пространственной переменной  $y$ . Приближенное решение искалось в виде рядов по смещенным полиномам Лежандра. Удастся численно построить поля скоростей, температур и концентраций, а также проследить их поведение в зависимости от входящих в систему безразмерных параметров: чисел Марангони, Прандтля, Соре и Шмидта.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00283 и проектом № 38 фундаментальных исследований СО РАН.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛИНОМАМИ ВОЛЬТЕРРА

Солодуша С. В.

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033 Россия;  
solodusha@isem.sei.irk.ru*

Рассматривается полиномиальное интегральное уравнение Вольтерра вида

$$V_{1,1}x_1 + \sum_{i=2}^p V_{2,1i}(x_1, x_i) + V_{2,1}x_1^2 = f(t) - \sum_{i=2}^p V_{1,i}x_i - \sum_{i=2}^p V_{2,i}x_i^2 - \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^{i-1} V_{ji}(x_j, x_i), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$V_{1,i}x_i \equiv \int_0^t K_i(t, s)x_i(s) ds, \quad V_{2,i}x_i^2 \equiv \int_0^t \int_0^t K_{ii}(t, s_1, s_2)x_i(s_1)x_i(s_2) ds_1 ds_2,$$

$$V_{2,ji}(x_j, x_i) \equiv \int_0^t \int_0^t K_{ji}(t, s_1, s_2)x_j(s_1)x_i(s_2) ds_1 ds_2,$$

$$i \neq j, \quad f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-h), \quad \varepsilon(t) = y^* - y(t),$$

которое возникает при моделировании нелинейной динамической системы типа “черного ящика” квадратичным полиномом Вольтерра и ставится задача об определении управляющего воздействия  $x_1^*(t)$  с учетом апостериорных данных об отклонении выходной переменной  $y(t)$ . В (1)  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{2, p}$ , считаются заданными, ядра Вольтерра  $K_{ii}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , симметричны по переменным  $s_1, s_2$ ,  $K_1(t, t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Сигнал  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon(\xi) = 0$ ,  $\xi \in [-h, 0]$ , считаем рассогласованием или ошибкой управления,  $h$  — известное постоянное запаздывание,  $y^* = 0$  — желаемое значение выходной переменной  $y(t)$ , причем  $y(0) = 0$ ,  $y(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}$ . Как отмечено в [1], непрерывное решение полиномиальных уравнений Вольтерра I рода носит локальный характер. В докладе рассматривается численное решение уравнения (1). В качестве “эталонной” динамической системы рассмотрена математическая модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата, предложенная в [2]. Для идентификации ядер Вольтерра использовались алгоритмы, описанные в [3, 4]. Приведены результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие специфику данного класса интегральных уравнений. Работа продолжает исследования, начатые в [5].

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 12-01-00722-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Апарцин А. С.** Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 69–81.
2. **Таиров Э. А.** Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 150–156.

3. **Апарцин А. С., Солодуша С. В.** К идентификации несимметричных ядер Вольтерра в интегральных моделях нелинейной динамики // Тр. Сиб. конф. по прикладной и индустриальной математике. Новосибирск, 1997. Т. 1. С. 1–13.
4. **Солодуша С. В., Спиряев В. А., Шербинин М. С.** О моделировании нелинейных динамических систем с векторным входом полиномами Вольтерра // Материалы Всероссийской научной конференции “Математика. Механика. Информатика”. Челябинск: ЧелГУ, 2007. С. 181–187.
5. **Солодуша С. В.** Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 133–140.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСSEИВАТЕЛЕЙ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ Е- И Н- ПОЛЯРИЗАЦИЯХ

Соппа М. С.

В докладе рассматривается численное решение обратной задачи восстановления импедансного покрытия при заданных характеристиках электромагнитного рассеяния цилиндрического объекта. Математическая модель рассеяния плоской монохроматической волны включает в себя уравнение Гельмгольца, модифицированные граничные условия и условие затухания на бесконечности. Для замыкания обратной задачи считаются известными результаты измерения интенсивности отраженного электромагнитного поля в некотором наборе точек.

Для построения численного решения используется метод граничных элементов. На основе интегрального представления для рассеянного поля записывается основное соотношение, содержащее в правой части данные измерений. Производится обращение операторов прямой задачи. Результат обращения подставляется в уравнение для рассеянного поля. В итоге получаем вспомогательное линейное интегрооператорное уравнение для функции поверхностного импеданса.

В случае Е- и Н- поляризованной волны оператор решения соответствует интегральным уравнениям с различными ядрами. Однако, используя возникающие в этих обратных задачах соотношения двойственности, можно получить формулы пересчета с Е- поляризации на Н, и наоборот. Это дает возможность проводить дополнительный анализ и тестирование, а также верифицировать полученные решения, пользуясь алгоритмом двойственной задачи.

Используя функциональные соотношения подобия, полученные для решения обратной задачи при Е- и Н- поляризациях, получаем возможность построения решения, которое дает одинаковую диаграмму рассеяния как для Е-, так и для Н- поляризации. Объектом рассеяния является замкнутая цилиндрическая поверхность. Установленные функциональные связи позволяют получить интегрооператорное уравнение, которому должно удовлетворять искомое распределение поверхностного импеданса. Найденное таким образом покрытие обеспечивает диаграмму рассеяния, не меняющуюся при смене поляризации зондирующего сигнала.

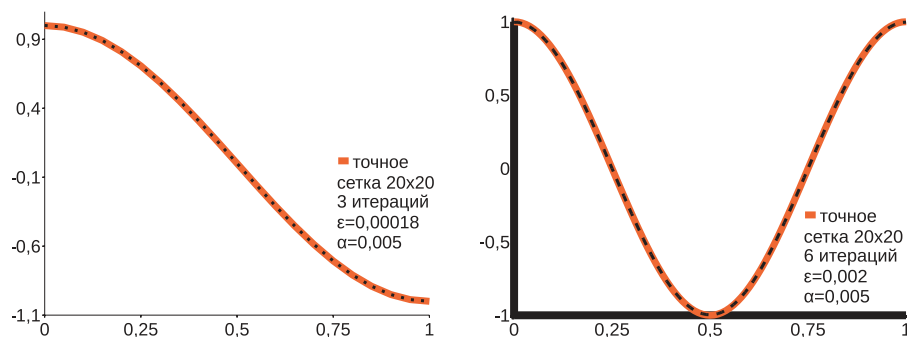
## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Стародубцева Ю. В.

*Уральский федеральный университет,  
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия;  
starodubtsevayv@ya.ru*

В некоторой прямоугольной области  $\Omega$  рассматривается движение высоковязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. На боковых границах области  $\Omega$  выполняется условие теплоизоляции, на верхней границе известны температура и потока тепла. На всей границе области выполняются условия непротекания и идеального скольжения для скорости движения среды. Требуется определить температурный режим на нижней границе области. Эта обратная граничная задача некорректна. Математическая модель установившегося движения жидкости описана в [1].

Для решения задачи предлагается воспользоваться методом Ньютона — Канторовича [2]. На рисунках приведены результаты восстановления гладких граничных режимов  $v_1 = \cos(\pi x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  и  $v_2 = \cos(2\pi x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\varepsilon$  — относительная погрешность восстановления,  $\alpha$  — параметр регуляризации во вспомогательной задаче квазиобращения [3] при обращении оператора производной.



Работа выполнена при финансовой поддержке Программы межрегиональных и межведомственных фундаментальных исследований Уральского отделения РАН (проект 12-С-1-1001) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Стародубцева Ю. В. Численное моделирование задачи реконструкции граничных режимов // Тез. докл. Межд. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посв. памяти В. К. Иванова, Екатеринбург, 31 октября — 5 ноября 2011 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. фед. ун-та, 2011. С. 171–172.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
3. Короткий А. И., Ковтунов Д. А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.

*Институт математики и механики УрО РАН,  
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990 Россия;  
subb@uran.ru, tokmancev@mail.ru*

Рассматриваются математические модели динамических процессов, которые имеют вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами. На фиксированном отрезке времени задана статистика измерений динамики процесса и известна погрешность этих измерений. Рассматриваются обратные задачи динамики, а именно, задачи построения движений модели, максимально близких к заданной статистике.

Предлагается новый подход к решению таких задач с использованием теории оптимального управления. На движениях рассматриваемой управляемой системы вводится функционал невязки, который оценивает разницу между движением системы и заданной статистикой. Рассматривается соответствующая задача оптимального управления на минимум этого функционала.

Для решения этой задачи предлагается численный метод построения оптимального синтеза (универсальной обратной связи) на базе характеристик соответствующего уравнения Беллмана. Построенный позиционный закон управления используется для достижения оптимального результата из всех точек, лежащих в окрестности статистических данных, отвечающей допустимым погрешностям измерений. В основе численного метода лежит процедура попятного интегрирования характеристической системы уравнения Беллмана.

В качестве решения рассматриваемой задачи динамической реконструкции предлагаются траектории управляемой системы, порождаемые оптимальным синтезом и отличающиеся от статистических данных на величину, не превосходящую допустимую погрешность измерений.

Представлены результаты анализа макроэкономической модели и численного решения задачи реконструкции динамики этой модели по заданной дискретной статистике.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00214), Программой Президента РФ по поддержке ведущих школ НШ-5927.2012.1 и Программой сотрудничества УрО и СО РАН “Качественная теория и численные методы для задач динамики, управления и оптимизации”.



## ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

Табаринцева Е. В., Камалтдинова Т. С.

*Южно-Уральский Государственный Университет,  
просп. им. Ленина, 76, Челябинск, 454080 Россия;  
7413604@mail.ru*

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A$  — линейный самосопряженный, положительный оператор с областью определения  $D(A) \subset H$ ,  $\overline{D(A)} = H$ , и областью значений  $R(A) \subset H$ , такой, что обратный оператор  $A^{-1}$  вполне непрерывен.

Рассмотрим задачу вычисления элемента  $v \in H$ ,  $v = u(T)$ , где  $u(t) \in C([0, T] \rightarrow H) \cap C^1((0, T) \rightarrow H)$ ,  $u(t)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(0) = f_0, \quad f_0 \in H. \quad (2)$$

Задача (1), (2) поставлена некорректно. Предположим, что при  $f = f_0$  существует  $v \in H$  такое, что  $v = u(T)$ , но вместо  $f_0$  известны  $f_\delta \in H$  и  $\delta$ , такие, что  $\|f_0 - f_\delta\| \leq \delta$ . Требуется по  $f_\delta$  и  $\delta$  определить приближенное решение  $v_\delta \in H$  и оценить уклонение  $\|v_\delta - v\|_H$ .

Для решения данной задачи используем метод квазиобращения, аналогичный предложенному М. М. Лаврентьевым [1].

Следуя [1], в качестве приближенного решения исходной неустойчивой задачи будем рассматривать элемент  $v_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(T)$ , где  $u_\delta^\alpha(t)$  — решение корректно поставленной задачи

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = Au_\delta^\alpha(t) - \alpha A^2 u_\delta^\alpha(t), \quad \alpha > 0; \quad (3)$$

$$u(0) = f_\delta, \quad f_\delta \in H. \quad (4)$$

Параметр  $\alpha = \alpha(f_\delta, \delta)$  при этом выберем из уравнения

$$\|f_\delta^\alpha - f_0\| = 3\delta, \quad (5)$$

где  $f_\delta^\alpha = z_\delta^\alpha(0)$ ,  $z_\delta^\alpha(t)$  — решение следующей задачи (1), (6)

$$\frac{dz_\delta^\alpha(t)}{dt} = Az_\delta^\alpha(t), \quad z_\delta^\alpha(T) = v_\delta^\alpha. \quad (6)$$

В дальнейшем,  $v_\delta^{\alpha(f_\delta, \delta)}$  обозначим через  $v_\delta$ .

Для  $v_\delta$  получена следующая оценка. Если  $v \in D(A^p)$ ,  $p > 0$ , где  $D(A^p)$  — область определения оператора  $A^p$ , то существует константа  $a > 0$  такая, что

$$\|v_\delta - v\| \leq a \ln^{-p}(1/\delta).$$

Работа поддержана РФФИ (грант 01-96-000).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР, 1962.

## ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тамасян Г. Ш., Долгополик М. В.

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Университетский просп., 35, Санкт-Петербург, 198504 Россия;  
grigoriytamasjan@mail.ru, maxim.dolgorolik@gmail.com*

Известно, что ряд задач математической физики можно свести к вариационной задаче, т. е. к исследованию на экстремум функционала при определенных условиях.

Рассмотрим множество  $M$  функций  $u(x, y)$  от двух переменных, которые дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Определим на  $M$  функционал

$$I(u) = \iint_D F(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy, \quad (1)$$

где  $D$  — область, удовлетворяющая условию  $D \cup \partial D \subset \mathbb{D}$ ,  $\partial D$  — граница области  $D$ ,  $F(x, y, u, p, q)$  — функция, непрерывная вместе со своими первыми производными. Пусть на границе множества  $D$  задана функция  $\psi(x, y)$ . Обозначим через  $\Omega$  совокупность тех функций  $u$  из множества  $M$ , которые удовлетворяют условию

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

**Задача.** Среди всех функций множества  $\Omega$  найти ту, которая доставляет экстремум функционалу  $I(u)$ .

Пусть  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$  — фиксированные константы. Рассмотрим в качестве области  $D$  прямоугольник  $0 < x < T_1$ ,  $0 < y < T_2$ . Обозначим через  $z = u''_{xy}$ , тогда функцию  $u \in \Omega$  можно представить в виде

$$u(x, y) = -\psi(0, 0) + \psi(x, 0) + \psi(0, y) + \int_0^x \int_0^y z(\tau, \gamma) d\gamma d\tau. \quad (2)$$

Обозначим через  $C(\mathbb{D})$  — множество непрерывных на области  $\mathbb{D}$  функций. Используя представление (1), введем множество

$$Z = \{z \in C(\mathbb{D}) \mid u(x, T_2) = \psi(x, T_2), x \in [0, T_1], \quad u(T_1, y) = \psi(T_1, y), y \in [0, T_2]\}.$$

Далее, для краткости записи, вместо выражения (1) будем писать  $u$ . Рассмотрим функционал

$$\Phi_\lambda(z) = I(u) + \lambda \varphi(z), \quad (3)$$

где  $\lambda > \lambda^* \geq 0$  — некоторая константа ( $\lambda^*$  — константа точного штрафа [1]),

$$\varphi(z) = \sqrt{\int_0^{T_2} [u(T_1, y) - \psi(T_1, y)]^2 dy} + \sqrt{\int_0^{T_1} [u(x, T_2) - \psi(x, T_2)]^2 dx}.$$

Можно показать, что исходная задача эквивалентна задаче поиска экстремума функционала  $\Phi_\lambda(z)$  на всем пространстве  $C(\mathbb{D})$ . Заметим, что функционал (2) является существенно негладким [1].

Используя классическую вариацию функции  $z$ , можно получить необходимые условия экстремума функционала (2). С помощью этих условий конструируются прямые методы (наискорейшего и гиподифференциального спусков), а также можно получить известные классические результаты, например, уравнение Эйлера — Остроградского.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-01-00752).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005.

## VARIATIONAL INTERPOLATION AS A METHOD FOR SOLVING INVERSE PROBLEM: NUMERICAL EXPERIMENTS

Uchaikin V. V.

*Ulyanovsk State University, L. Tolstoy, 42, Ulyanovsk, 432017 Russia;*  
vuchaikin@gmail.com

Let  $\mathcal{L} = \{L\}$  be the family of operators and  $\mathcal{L}^+ = \{L^+\}$  be the corresponding family of adjoint (in the Lagrange sense) operators dependent on parameters  $\alpha_i, j = 1, 2, \dots, n$ . The duality principle, based on two possible representations of a functional

$$J = (D, f) = (f^+, S)$$

from solutions of the equations

$$Lf = S, \quad L^+ = D,$$

allowed to formulate an effective version of perturbation method and apply it to solving inverse problems (see [1] and details of the problem statement therein). Namely, this method give the way to find a the desired operator under condition that it lies in a vicinity of the known (*basic*, or *unperturbed*) operator. In [2], this idea was developed in the following way: there are chosen a few reference operators  $L_j$  instead of priming one and used a set of known functionals related to various pair of functions  $S, D$ . With the use of the stationary representation

$$J = \frac{(f^+, S)(D, f)}{(f^+, Lf)}$$

and linear forms

$$f = \sum c_j f_j, \quad f^+ = \sum c_j^+ f_j^+,$$

the parameters  $\alpha_i$  for desired operators can be found.

Some results of experimental calculations are represented and discussed. They show that an appropriate choice of reference operators provide essentially widening of domain of operator space where the desired operator can be found with satisfactory accuracy.

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No 10-01-00608, and 12-01-00660-a.

### REFERENCES

1. **Marchuk G. I.** Methods of computational mathematics. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
2. **Uchaikin V. V.** Variational method of interpolation of nuclear-engineering calculations // Atomic Energy. 1989. V. 67, N 1. P. 54–55 (in Russian).

**ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ  
КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ  
В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Филатова В. М.**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта,  
НИИ прикладной информатики и математической геофизики,  
ул. Ал. Невского, 14, Калининград, 236041 Россия;  
ViFilatova@kantiana.ru*

В работе приводится алгоритм и примеры численного решения обратной динамической задачи о восстановлении коэффициента поглощения неоднородной мембраны.

Пусть  $D$  — ограниченная область на плоскости с границей  $\Gamma$  и  $u^f$  — решение начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \Delta u + \sigma u_t &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u_\nu|_{\Gamma \times [0, T]} &= f, \end{aligned}$$

где  $u_\nu$  — нормальная производная,  $1/\sqrt{\rho(x)}$  — скорость звука,  $\sigma(x)$  — коэффициент поглощения. Требуется определить коэффициент поглощения во всей области  $D$  по заданному оператору реакции  $R$ ,  $Rf = u^f|_{\Gamma \times [0, 2T]}$ , при условии  $T/2 > T^*$ ,  $T^*$  — акустический радиус области. При этом скорость остается неизвестной.

Решение основано на одной из версии метода граничного управления [1–3].

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-01-0026а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Belishev M. I.** Recent progress in the boundary control method // Inverse Problems. 2007. V. 23, N 5. P. R1–R67.
2. **Pestov L., Bolgova V., Kazarina O.** Numerical recovering a density by BC-method // Inverse Problems and Imaging. 2010. V. 4, N 4. P. 703–712.
3. **Pestov L.** Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method // Inverse Ill-Posed Problems. 2012. ТВА.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКИ

Хасанов Т.

*Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН,  
Новосибирск, Россия; hasanov@isp.nsc.ru*

В настоящее время поляризационная оптика эффективно используется в различных областях, физики, химии, биологии медицины, нанотехнологии и других. Большинство приложений поляризационной оптики опираются на численное решение обратных задач, но, к сожалению, они не всегда разрешимы. Неразрешимость некоторых задач обусловлена физической природой того или иного явления. Напомним, что основными разделами поляризационной оптики являются эллипсометрия отражения (эллипсометрия), эллипсометрия пропускания (поляриметрия) и эллипсометрия рассеяния [1]. В частности, практически все объекты исследования эллипсометрии являются однослойными или многослойными изотропными и анизотропными отражающими системами. Все эти системы описываются трансцендентными уравнениями. Вот почему даже для простейшей отражающей системы, например, изотропная пленка на изотропной подложке возникают необходимости решения некорректных задач. Для такой, казалось бы, простой системы до сих пор остается нерешенной задача одновременного и однозначного вычисления показателя преломления и толщины пленки из результатов эллипсометрических измерений, когда толщина меньше 40 нм [2]. Другой важной проблемой остается общее решение нахождения истинного положения плоскости, которая совпадает с направлением вектора электрического поля световой волны и начальными азимутальными углами на лимбах поляризующих элементов эллипсометра. Недавно было развито новое направление в исследовании слабо поглощающих анизотропных систем — сочетание поляриметрии и эллипсометрии [3]. Его реализация в решении актуальных вопросов нанотехнологии требует привлечения принципиально новых подходов и методов численного решения обратных и некорректных задач. Другие похожие на вышеупомянутые проблемы освещены в работах [4]. В докладе подробно раскрываются вышеперечисленные проблемы, и предлагается некоторые пути для их решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Хасанов Т.** Поляриметрия и эллипсометрия в исследовании поляризующих оптических систем // Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.-м.н. Новосибирск, 2010.
2. **Мутилин С. В., Хасанов Т.** Показатель преломления тонкой однородной пленки  $\text{SiO}_2$  // *Опт. и спектр.* 2008. Т. 105, Вып. 3. С. 512–517.
3. **Хасанов Т.** Способ точного определения оптических постоянных одноосных кристаллов из параметров компенсатора // *Опт. и спектр.* 2007. Т. 102, вып. 1. С. 138–141.
4. **Хасанов Т.** Измерение оптических постоянных подложек на основе отражения // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения.* 2011. Т. 8. С. 62–71.

## ОБРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Хужаеров Б. Х., Холияров Э. Ч., Эломов Ф. З.

*Самаркандский государственный университет,  
Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140100 Узбекистан;  
b.khuzhayor@mail.ru, e.kholiyarov@mail.ru, f.elomov@mail.ru*

Рассмотрена граничная обратная задача нелинейно упругого режима фильтрации однородной жидкости в пористой среде.

Пористая среда считается одномерным объектом  $[0, \infty)$  и на  $x = \infty$  граничные условия известны. В точке  $x = d$ ,  $d \in (0, \infty)$ , заданы значения давления жидкости, т.е. “исходные данные” —  $f(t)$  и начальное распределение давления  $p(x, 0) = p_0$ . Требуется определить давление и скорость фильтрации в точке  $x = 0$ .

Данная постановка задачи может быть интерпретирована как определение характерных параметров в нефтедобывающей скважине. Задача при этом сводится к определению поля давления в области  $[0, d)$  и скорости фильтрации в добывающей скважине ( $x = 0$ ) на основе измерений давления в наблюдательной скважине ( $x = d$ ) и режима изменения давления на границе пласта.

Таким образом, граничная обратная задача для нелинейно упругого режима фильтрации ставится так:

— уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi^{\gamma-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, t_m], \quad (1)$$

где  $\chi = k_0 / (\mu_0 m_0 \beta)$ ,  $\varphi = \exp[-\beta(p_0 - p)]$ ,  $\alpha = a_k + \beta_f - a_\mu$ ,  $\beta = \beta_m + \beta_f$ ,  $\gamma = \alpha / \beta$ ,  $k_0$ ,  $m_0$ ,  $\mu_0$  — первоначальные (при давлении  $p = p_0 = \text{const}$ ) значения проницаемости ( $\text{м}^2$ ), пористости и вязкости ( $\text{МПа} \cdot \text{с}$ ) соответственно;  $t$  — время, с;  $x$  — линейная координата, м;  $p$  — текущее давление, МПа;  $\beta_f$  — коэффициент сверхсжимаемости жидкости,  $\text{МПа}^{-1}$ ;  $a_k$ ,  $\beta_m$ ,  $a_\mu$  — коэффициенты изменения проницаемости, пористости и вязкости соответственно,  $\text{МПа}^{-1}$ ;

— дополнительные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in [0, \infty), \quad p(\infty, t) = p_0, \quad t \in [0, t_m], \quad (2)$$

$$p(d, t) = f(t), \quad t \in [0, t_m]. \quad (3)$$

Требуется найти давление и скорость фильтрации в добывающей скважине ( $x = 0$ ).

Для того, чтобы подготовить исходные данные для решения обратной задачи, т. е.  $f(t)$  в (3), решается прямая задача (1), (2), применяя метод конечных разностей. В качестве исходных данных для обратной задачи принимаются значения давления в точке  $d$ , т.е.  $f(t_j) = p_n^j$ ,  $t_j$  — дискретные значения времени.

Результаты расчетов при различном уровне погрешностей в исходных данных показали, что при отсутствии возмущения исходных данных, полученные решение обратной задачи имеют более устойчивый характер. С увеличением расстояние  $x = d$  возникает неустойчивость решения. Для устранения неустойчивости применен метод шаговой регуляризации, что дает условно устойчивое решение. Однако случайные возмущения исходных данных приводят к существенной неустойчивости процесса вычисления. Решение с использованием метода шаговой регуляризации и одновременно сглаживания исходных данных имеет более устойчивый характер.

## ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ КОШИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Чанышев А. И.<sup>1</sup>, Абдулин И. М.<sup>1</sup>, Даниловский К. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт горного дела СО РАН,  
Красный проспект, 54, Новосибирск, 630091 Россия;  
i.m.abdulin@mail.ru*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия*

Традиционными в теории упругости и пластичности являются краевые задачи: первая, вторая, третья (смешанная краевая задача). Всюду предполагаются заданными границы области деформирования. Кроме того, после выделения неголоморфной части решения сводятся к отысканию аналитических (голоморфных) функций, ограниченных во всей области деформирования. На самом деле в геомеханике не всегда возможно точно описать область деформирования и решения, например на “бесконечности” могут быть неограниченными с неизвестным характером роста или убывания. В этой ситуации привлекательными становятся задачи Коши, когда на одной и той же границе задается и сама функция, и ее производная по нормали, все остальное, включая напряженно-деформированное состояние, определяется через эти данные.

В работе получены аналитические решения задач а) о разрушении массива пород с цилиндрической выработкой с заданными на ее границе векторами смещений и напряжений; б) об упругом деформировании полуплоскости с заданными на ее границе условиями Коши. Построены численно-аналитические схемы решения задачи Коши для полуплоскости и полупространства, подобные методу Эйлера решения дифференциальных уравнений первого порядка. Приводится сравнение численного и аналитического решений для полуплоскости.

## ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА. ПРИМЕР АДАМАРА

Чанышев А. И.<sup>1</sup>, Даниловский К. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт горного дела СО РАН,  
Красный проспект, 54, Новосибирск, 630091 Россия;  
i.m.abdulin@mail.ru*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия*

Известны классические постановки задач для уравнения Лапласа: Дирихле, Неймана, Робена, которые предполагают знание всей геометрии области и ограниченность решения. Другая постановка — задача Коши, в которой известен только один контур, ограничивающий область, неизвестны другие контуры и, кроме того, решения обязательно должны иметь горизонтальную асимптоту или быть ограниченными. В рамках такого подхода по значениям функции и ее нормальной производной, заданных на всем известном контуре (задача Коши), определяются неизвестные контуры и распределение функции в самой области. Приводятся общие решения и конкретные примеры решения задачи Коши для круга, полуплоскости, для областей, отображаемых на круг. Построен также конечно-разностный алгоритм решения задачи Коши для двухмерного и трехмерного уравнения Лапласа. Дано сравнение приближенного решения с аналитическим, полученным для полуплоскости. Обсуждается пример Адамара.



## МИГРАЦИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В УСЛОВИЯХ МИРОВОГО ОКЕАНА

Чиглинцева А. С., Русинов А. А., Тазетдинов Б. И.

*Бирская государственная социально-педагогическая академия,  
ул. Интернациональная, 10, Бирск, 452450 Россия;  
changelina@rambler.ru, irtysh2009@mail.ru, bulatbirsk@yandex.ru*

В современном мире возникла новая проблема, связанная с техногенными катастрофами — утечка газа из скважин в морских глубинах. Об этом свидетельствует недавняя катастрофа в Мексиканском заливе, которая привела к серьезным экологическим последствиям [1]. Для устранения подобных аварий, различными нефтяными и газовыми компаниями, а также ведущими учеными были предложены идеи, многие из которых не принесли желаемого результата.

В данной работе предлагается технологическая схема и соответствующая математическая модель процесса образования гидрата на поверхности метановых пузырей, которая позволит устранить такого рода аварии. Установлено, что в процессе всплытия метанового пузыря к поверхности океана в районах аварий, в зависимости от глубины, создаются термобарические условия для образования и разложения гидрата на поверхности пузыря [2, 3].

Согласно представленной схеме, к месту утечки газа, опускается металлическая конструкция, имеющая форму цилиндра, внутри которой имеется система алюминиевых решеток для сбора гидратных пузырей и как следствие приведет к полному закрытию места утечки газа.

С другой стороны, ежедневные выбросы метана с морского дна, вносят негативный вклад в окружающую среду, а именно: миграция метанового пузыря к поверхности океана сопровождается сначала образованием гидрата на пузыре, а при его дальнейшем всплытии с глубин менее 300 метров — разложением гидратной оболочки [3]. В дальнейшем это приводит к выбросу метана в атмосферу, который вносит существенный вклад в глобальное потепление.

В данной работе построенная теория процесса миграции газового пузыря в условиях образования и разложения гидрата позволит эффективно решить проблему устранения спонтанных выбросов метана из природных подводных источников, а также областей утечки газа с подводных скважин и трубопроводов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Дмитриевский А. Н.** Газогидраты морей и океанов — источник углеводородов будущего. М.: ИРЦ Газпром, 2009.
2. **Sauter E. J., Muzyakshinb S. I. et al.** Methane discharge from a deep-sea submarine mud volcano into the upper water column by gas hydrate-coated methane bubbles // *Earth and Planetary Science Lett.* 2006. N 243. P. 1–36.
3. **Gumerov N. A., Chahine G. L.** Dynamics of bubbles in conditions of gas hydrate formation // *Fluid Dynamics.* N 5. P. 664–669.

## МНОГОШАГОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Чистяков П. А.**

*Институт математики и механики УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, 16,  
Екатеринбург, 620990 Россия; p\_a\_v\_e\_l@isnet.ru*

Рассматривается обобщение итерационных методов решения линейных операторных уравнений вида

$$Ax = y, \tag{1}$$

изложенных в работах [1–3], на случай  $B$ -симметричного и  $B$ -положительного оператора  $A$ . Здесь  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ . Пространства  $X$  и  $Y$  — банаховы,  $X$  предполагается равномерно выпуклым и гладким.

**Определение 1.** Оператор  $A$  называется  $B$ -симметричным, если при любых  $x_1, x_2 \in X$  выполнено равенство  $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$ .

**Определение 2.** Оператор  $A$  называется  $B$ -положительным (не строго), если для каждого  $x \in X$  выполнено  $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$ , причем  $\langle Ax, Bx \rangle = 0$  в том и только в том случае, когда  $Ax = 0$ .

**Определение 3.** Отображение  $J_p: X \rightarrow 2^{X^*}$ , определяемое по формуле

$$J_p(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\},$$

называется дуальным отображением пространства  $X$  степени  $p$ .

Через  $J_{*q}$  обозначаем дуальное отображение пространства  $X^*$  степени  $q := p/(p-1)$ .

Предлагается следующий итерационный метод нахождения  $\hat{x}$  — нормального решения (решения минимальной нормы) уравнения (1):

$$x_{n+1} := J_{*q} \left[ J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i} \right],$$

где вектор параметров шагов  $\mu = (\mu_{n,1}, \dots, \mu_{n,N_n})$  минимизирует выпуклую непрерывно дифференцируемую функцию  $h: \mathbb{R}^{N_n} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$h(t_1, \dots, t_{N_n}) := \frac{1}{q} \left\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B \xi_{n,i}, y \rangle.$$

**Теорема.** Пусть при любом  $n \in \mathbb{N}$  одно из направлений  $B^* A \xi_{n,i}$  совпадает с  $B^*(Ax_n - y) = B^*(Ax_n - \hat{x})$ . Если для некоторого фиксированного  $n_0 \in \mathbb{N}$  и бесконечного числа индексов  $n \geq n_0$  вектор  $J_p(x_n) - J_p(x_{n_0})$  включается в пространство направлений поиска, тогда  $\{x_n\}$  сходится к  $\hat{x}$  сильно по норме пространства  $X$ .

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00106).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Schöpfer F., Schuster T.** Fast regularizing sequential subspace optimization in Banach spaces // Inverse Problems. 2009. V. 25, N 1. P. 1–22.
2. **Schöpfer F., Schuster T., Louis A. K.** Metric and Bregman projections onto affine subspaces and their computation via sequential subspace optimization methods // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, N 5. P. 479–506.
3. **Чистяков П. А.** Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, N 3. С. 303–318.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА

Чубатов А. А.<sup>1</sup>, Кармазин В. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Армавирская государственная педагогическая академия, Армавир, Россия;  
chaa@inbox.ru

<sup>2</sup> Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия;  
karmazin@kubsu.ru

Уравнение турбулентной диффузии описывает процесс распространения примеси в атмосфере [1]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} = K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) + f(x, y, z)g(t), \quad (1)$$

где  $q = q(x, y, z, t)$  — концентрация примеси,  $(v_x; v_y; v_z)$  — скорость ветра,  $K_x, K_y, K_z$  — коэффициенты диффузии, функции  $f(x, y, z)$  и  $g(t)$  определяют расположение и интенсивность источника.

В работе [2] рассматривалась задача экспресс идентификации интенсивности источника  $g(t)$  при известных замерах концентрации  $q_{ji} = q(x_j, y_j, z_j, t_i)$  и ступенчатых коэффициентах чувствительности  $\phi_{ji} = Q(x_j, y_j, z_j, t_i)$ ,  $Q(x, y, z, t)$  — решение прямой задачи (1) при единичной интенсивности  $g(t) = 1$ . Коэффициенты чувствительности характеризуют причинно-следственные связи прямой задачи (1) и содержат информацию о параметрах модели: коэффициенты диффузии, скорость ветра, геометрию области, расположение источника и датчика, за исключением интенсивности источника.

Задача идентификации интенсивности сводится к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \frac{\partial Q(x_j, y_j, z_j, t - \tau)}{\partial t} g(\tau) d\tau = q(x_j, y_j, z_j, t). \quad (2)$$

Во многих практических случаях параметры модели (1) неизвестны, поэтому возникает необходимость в восстановлении функции  $Q(x, y, z, t)$  из уравнения (2) на основе экспериментально известных значений интенсивности  $g(t_i)$  и замеров концентрации  $q_{ji}$ .

Задача восстановления функции  $Q(x, y, z, t)$  является некорректно-поставленной и для ее решения использовались специальные методы: метод глобальной и последовательной регуляризации Тихонова [3], метод функциональной аппроксимации и метод регуляризации на основе расширенных систем [4, 5]. Проведены вычислительные эксперименты, построены устойчивые численные приближения функции  $Q(x, y, z, t)$  при наличии погрешностей в замерах концентрации и интенсивности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (проект № 09-01-96506, “Разработка экспрессных методов мониторинга источников загрязнения атмосферы”).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

2. **Чубатов А. А., Кармазин В. Н.** Устойчивая оценка интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1, № 4. С. 391–403.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
4. **Vjooik A.** Numerical stability of methods for solving augmented systems // Contemporary Math. 1997. V. 204. P. 51–60.
5. **Морозов В. А.** Алгоритмические основы методов решения некорректных задач // Вычисл. методы и программирование. 2003. Т. 45. С. 130–141.

## ГЕМОДИНАМИКА АНОМАЛИЙ СОСУДОВ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Чупахин А. П.<sup>1</sup>, Черевко А. А.<sup>1</sup>, Хе А. К.<sup>1</sup>, Телегина Н. Ю.<sup>1</sup>,  
Кривошапкин А. Л.<sup>2</sup>, Орлов К. Ю.<sup>2</sup>, Панарин В. А.<sup>2</sup>,  
Баранов В. И.<sup>3</sup>, Воробцова Н. Н.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*

<sup>2</sup>*ННИИПК им. Е. Н. Мешалкина*

<sup>3</sup>*НИИ физиологии СО РАМН*

<sup>4</sup>*Новосибирский государственный университет*

В докладе излагаются результаты работы по проекту, посвященному комплексному исследованию патологических изменений сосудов головного мозга человека: клинико-физиологический анализ, математическое и компьютерное моделирование для разработки новых подходов к диагностике, прогнозированию и лечению.

Исследование кровоснабжения мозга имеет важное фундаментальное и прикладное клиническое значение. Современные методы визуализации и физиологического контроля динамики аномалий сосудов головного мозга открывают новые возможности, однако многообразие заболеваний и наличие большого числа факторов, влияющих на их развитие, чрезвычайно осложняют принятие решения.

При определении показаний для хирургического лечения неразорвавшихся артериальных аневризм следует учитывать совокупность факторов риска их потенциального разрыва. Гемодинамическим факторам здесь отводится ведущая роль, поэтому создание гемодинамической модели артериальных аневризм представляется важной задачей.

В последнее десятилетие достигнут значительный успех в лечении церебральных артериовенозных мальформаций (АВМ), связанный, в первую очередь, с внедрением в клиническую практику новых эмболизирующих материалов. Возможные осложнения эмболизации связаны с перипроцедуральными кровоизлияниями, вызванными изменением гемодинамики в АВМ и здоровых сосудах мозга. При этом предоперационное математическое моделирование изменений гемодинамики в узле АВМ и окружающем мозге в процессе эмболизации является актуальной задачей.

Актуальной задачей является моделирование гемодинамики аневризм артерии (АА) головного мозга. Аневризма — местное расширение сосуда. Это заболевание является одним из самых частых и опасных заболеваний сосудов головного мозга. На сегодняшний день эффективным способом лечения (АА) является их эмболизация и установка стента, изменяющего поток крови и параметры сосуда, что способствует тромбированию аневризм. Для понимания механизмов, ответственных за появление, рост и разрыв аневризм нужно сопоставлять результаты математического моделирования с клиническими наблюдениями. Выполнено компьютерное моделирование стентирования АА, основанное на реальных клинических данных. Целью исследования является выделение значимых признаков успешной операции.

Представлены результаты измерений давления и скорости в сосудах головного мозга при наличии артериальных аневризм и артериовенозных мальформаций. Полученная информация обрабатывается, очищается от шумов, в ней выделяются значимые фрагменты, делается её компьютерный анализ на предмет обнаружения закономерностей. На основе работы создана система представления значимой информации о кровотоке в сосудах мозга во время операции в реальном режиме времени.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00026, ИП СО РАН № 44, Программы ОЭММПУ РАН № 13.4.

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

Шерина Е. С., Старченко А. В.

*Томский государственный университет,  
просп. Ленина, 36, Томск, 634050 Россия;  
eka.sherina@gmail.com, starch@math.tsu.ru*

В работе рассмотрена обратная задача электроимпедансной томографии (ЭИТ), которая нацелена на восстановление неизвестного распределения электрической проводимости внутри исследуемого электропроводящего объекта [1]. Источником электрического поля является система электродов с инжектируемым током, прикрепленных к поверхности объекта. Исходные для проведения реконструкции структуры объекта данные представлены электрическими измерениями только на границе объекта. Обсуждается случай, в котором расположение неоднородностей внутри объекта считается заранее известным, необходимо определить соответствующие значения электрической проводимости.

Математическая модель ЭИТ представляет собой обратную коэффициентную задачу для эллиптического уравнения относительно функции электрической проводимости. В исследованиях использован вариант модели с идеально проводящими электродами, называемый в научной литературе *shunt model* [1].

В силу недостаточной точности и количества входных данных обратная задача ЭИТ имеет некорректный характер. Предложен численный метод ее решения, основанный на алгоритме дифференциальной эволюции (ДЭ) [2]. Стохастический подход минимизирует целевую функцию, которая связывает измеренную на границе разность электрических потенциалов и разность электрических потенциалов, вычисленных при тех же токовых конфигурациях. Алгоритм ДЭ оперирует популяцией постоянного размера из векторов, принадлежащих множеству допустимых решений задачи. Поиск “оптимального” решения основан на циклическом изменении популяции по эволюционным законам и оценке целевой функции для каждого элемента популяции. Метод ДЭ регулируется несколькими управляющими параметрами: константами скрещивания и мутации, размером популяции. Численная реализация алгоритма состоит из следующих повторяющихся шагов: 1) генерация начальной популяции решений; 2) модификация популяции; 3) решение совокупности прямых задач ЭИТ для расчета значений целевой функции для каждого элемента популяции; 4) оценка конкурентоспособности представителей популяции по значениям целевой функции; 5) проверка условий и выбор “лучшего” представителя популяции, обеспечивающего минимум целевой функции.

Для практической реализации математической модели и численного метода решения задач ЭИТ построена неструктурированная треугольная сетка с помощью сеточного генератора GMSH. Дискретизация исходной дифференциальной задачи выполнена на основе метода конечных объемов для случая кусочно-постоянной функции электрической проводимости [3]. Несимметричная разреженная СЛАУ решалась стабилизированным методом бисопряженных градиентов Bi-CGSTAB.

Алгоритм реализован программно на языке C++, проведено тестирование работоспособности метода на задаче по минимизации функции Розенброка, выполнен подбор оптимальной комбинации управляющих параметров метода. Оценена применимость метода ДЭ для решения обратной задачи ЭИТ тестированием на заранее подготовленных данных, исследовано несколько модификаций ДЭ по операциям

мутации и скрещивания, изучено влияние управляющих параметров на скорость сходимости и эффективность поиска параметра электрической проводимости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Borcea L.** Electrical impedance tomography // *Inverse Problems*. 2002. N 18. P. 99–136.
2. **Storn R.** Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *J. Global Optimization*. 1997. N 11. P. 341–356.
3. **Шерина Е. С.** Исследование неоднородной структуры биологического объекта при пропускании электрического тока небольшой силы // *Материалы 5-й Сиб. конф. по параллельным и высокопроизводительным вычислениям*. Томск, 2009. С. 131–135.

## INVERSE PROBLEM FOR 2D HELMHOLTZ EQUATION

Shishlenin M. A.

*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia;  
mshishlenin@ngs.ru*

The Cauchy problem for the Helmholtz equation is a well known example of an ill-posed problem. As for other elliptic partial differential equations, its solution is unique, but does not depend continuously on the Cauchy data in standard norms. Analytically, the Cauchy problem for the Helmholtz equation was studied by Fritz John [1].

Let us consider *the continuation problem* for the Helmholtz equation in the domain  $(x, y) \in (0, 1)^2$ :

$$\omega_k u + \Delta u = 0; \tag{1}$$

$$u(0, y) = f(y); \tag{2}$$

$$u_x(0, y) = 0; \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \tag{4}$$

Here  $\omega_k = \varepsilon k^2 - i\sigma$ .

The problem is to continue function  $u(x, y)$  inside the domain  $(x, y) \in (0, 1)^2$  from the boundary conditions (2)–(4).

Let us formulate *the forward problem*: find function  $u(x, y)$  from (1), (3), (4) and the boundary condition

$$u(1, y) = q(y). \tag{5}$$

It is known that the forward problem (1), (3)–(5) is well-posed.

Let us consider *the inverse problem*: find the boundary condition  $q(y)$  from (1)–(5). We write the inverse problem (1)–(5) in operator form

$$Aq = f, \tag{6}$$

$$A : q(y) = u(1, y) \rightarrow f(y) = u(0, y).$$

It was proved [2], that the operator of inverse problem is a compact.

We consider the inverse problem (1)–(5) in a discrete form. The discrete inverse problem is reduced to the system of linear algebraic equations. We apply SVD analysis for inverse problem solution. Numerical results are presented.

The work was supported by RFBR (grant 12-01-00773), and by Federal Target Grant “Scientific and educational personnel of innovation Russia” for 2009–2013 (government contract N 14.740.11.0350).

### REFERENCES

1. **John F.** Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 551–585.
2. **Isakov V., Kindermann S.** Subspaces of stability in the Cauchy problem for the Helmholtz equation // Meth. Appl. Anal. 2011. V. 18, N 1. P. 1–30.



## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СВЕТОРАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БИОЛОГИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ С ПОМОЩЬЮ СКАНИРУЮЩЕГО ПРОТОЧНОГО ЦИТОМЕТРА

Юркин М. А., Гилев К. В., Строкотов Д. И.,  
Москаленский А. Е., Конохова А. И., Мальцев В. П.

*Институт химической кинетики и горения СО РАН,  
ул. Институтская 3, Новосибирск, 630090 Россия  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090 Россия; yurkin@gmail.com*

Сканирующий проточный цитометр — уникальный прибор, позволяющий измерять индикатрису светорассеяния одиночных частиц в потоке [1]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [S_{11}(\theta, \varphi) + S_{14}(\theta, \varphi)] d\varphi, \quad (1)$$

где  $S$  — матрица Мюллера,  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы рассеяния,  $\theta \in [10^\circ, 70^\circ]$ . Для многих биологических и медицинских применений требуется определение характеристик частиц, заданных определенной моделью, по измеренной индикатресе. Это представляет собой параметрическую обратную задачу светорассеяния, которая сводится к нелинейной регрессии. В наших приложениях для описания модели используется от 2 до 4 параметров, однако сумма квадратов как функция этих параметров имеет много локальных минимумов.

Для частиц имеющих сферическую симметрию (микрочастицы [2] и лимфоциты крови [3]) решение прямой задачи (вычисление индикатрисы) занимает порядка 1 мс, используя теорию Ми. Поэтому мы использовали метод глобальной оптимизации DiRect для нелинейной регрессии и Байесовский подход для оценки погрешности определяемых параметров.

Для частиц более сложной формы (тромбоцит — сплюснутый сфероид, эритроцит — двояковогнутый диск, и палочковидные бактерии) вычисление индикатрисы занимает порядка 1 мин, используя, например, метод дискретных диполей. Однако, в конкретных приложениях требуется характеристика многих объектов, описываемых одной моделью (например, сфероид). Поэтому для каждой из указанных выше моделей (описываемых 4 параметрами) мы рассчитали базу данных из  $10^5$ – $10^6$  индикатрис. При этом обработка экспериментальной индикатрисы сводится к поиску ближайшей в базе данных, а условная вероятность в Байесовском подходе вычисляется по расстоянию от экспериментальной индикатрисы до всех элементов в базе данных.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-04-00737-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Maltsev V. P. Scanning flow cytometry for individual particle analysis // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71. P. 243–255.
2. Konokhova A. I., Yurkin M. A., Moskalensky A. E., Chernyshev A. V., Tsvetovskaya G. A., Chikova E. D., Maltsev V. P. Light-scattering flow cytometry for identification and characterization of blood microparticles // J. Biomed. Opt. (accepted).
3. Strokotov D. I., Yurkin M. A., Gilev K. V., van Bockstaele D. R., Hoekstra A. G., Rubtsov N. B., Maltsev V. P. Is there a difference between T- and B-lymphocyte morphology? // J. Biomed. Opt. 2009. V. 14. 064036.

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСЕССИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ-В-ЯЧЕЙКАХ

Якункин Н. И.

*Новосибирский государственный технический университет,  
просп. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630064 Россия;  
yakunkin@list.ru*

Во многих приложениях физики плазмы, необходимо, для корректного описания процессов, использовать кинетическую модель плазмы. Как известно, для сглаживания стохастических эффектов необходимо использовать большое число (до тысячи и более) частиц в ячейке, что для многомасштабных задач, таких как, например, моделирование взаимодействия двухкомпонентного холодного пучка плазмы с сильным неоднородным магнитным полем, приводит к чрезвычайным трудностям с точки зрения вычислений. Поскольку многие физические установки для удержания плазмы обладают осевой симметрией, зачастую естественным выбором является цилиндрическая система координат, позволяющая уменьшить размерность задачи, и уйти от дополнительных неустойчивостей связанных с третьей координатой.

Тем не менее такой подход сопряжен с некоторыми трудностями — помимо известных особенностей в интегрировании уравнения движения [1] при использовании метода частиц-в-ячейках для моделирования осесимметричных задач физики плазмы, крайне важным является выбор функции ядра — так например обычная билинейная интерполяция не является корректной с точки зрения описания заданной плотности плазмы при сколь угодно большом количестве частиц вблизи оси симметрии [2, 3]. При этом, чтобы остаться в рамках численной схемы без трудоемкого решения уравнения Пуассона, необходимо [3–5] выполнение дискретного аналога закона сохранения заряда (1) для полученных токов. Также важным условием является простота расчета функции ядра

$$\frac{\rho_h^{i+1} - \rho_h^i}{\tau} = \operatorname{div}_h J_h. \quad (1)$$

В работе приводится сравнительный анализ различных ядер в цилиндрических системах координат на простых одномерных г тестах для алгоритмов взвешивания, и результаты вычислительных экспериментов для различных сеточных ядер в полностью кинетической 2D3V постановке, в частности для задачи о прохождении пучка плазмы через магнитное сопло.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-0001).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Березин Ю. А., Вшивков В. А.** Метод частиц в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1980. С. 38–40.
2. **Larson D. J. et al.** Correction factors for PIC accumulation on radial grids // *Computer Physics Communications*. 1995. V. 90. P. 260–266.
3. **Verboncoeur J. P.** Particle simulation of plasmas: review and advances. *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005. V. 47. P. 231–260.
4. **Ruyten W. M.** Density-conserving shape factors for particle simulations in cylindrical and spherical coordinates // *J. Comp. Physics*. 1993. V. 105. P. 224–232.
5. **Cornet C., Kwok D. T. K.** A new algorithm for charge deposition for multiple-grid method for PIC simulations in r-z cylindrical coordinates // *J. Comp. Physics*. 2007. V. 225. P. 808–828.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

Япарова Н. М.

*Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск,  
454080 Россия; ddjy@math.susu.ac.ru*

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A : H \rightarrow H$  — линейный, инъективный, ограниченный оператор,  $A_1 = A^*A$ ,  $\text{Sp}(A_1) = [0, \|A\|^2]$ . Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad u, f \in H. \quad (1)$$

Известно, что при  $f = f_0 \exists u_0 \in M_r$ , но вместо  $f_0$  даны  $f_\delta \in H$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$ . Требуется построить приближенное решение  $u_\delta$  уравнения (1) и оценить его отклонение от точного.

Для решения уравнения (1) был использован модифицированный метод проекционной регуляризации, заключающийся в следующем. Регуляризующее семейство  $\{P_\alpha : 0 < \alpha \leq \|A\|\}$ , определим формулой

$$P_\alpha f = \int_\alpha^{\|A\|} \sigma^{-2} dE_\sigma A^* f, \quad f \in H, \quad (2)$$

где  $\{E_\sigma : \sigma \in [0, \|A\|]\}$  — спектральное разложение единицы, порожденное оператором  $A_1^{1/2}$ , а приближенное решение  $u_\delta$  уравнения (1) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = \hat{T}_\delta f_\delta = \begin{cases} P_{\hat{\alpha}} f_\delta, & \|f_\delta\| > 3\|A\|\delta, \\ 0, & \|f_\delta\| \leq 3\|A\|\delta, \end{cases} \quad (3)$$

где параметр регуляризации  $\hat{\alpha}$  удовлетворяет уравнению  $\|Au_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 = 9\|A\|^2\delta^2$ .

**Теорема 1.** Оператор  $\hat{T}_\delta$ , определяемый формулой (3), непрерывен на пространстве  $H$ .

**Теорема 2.** Если  $u_0 \in M_r$ , а  $\omega_1(\tau, M_r)$  — модуль непрерывности обратного оператора, то

$$\|\hat{T}_\delta f_\delta - u_0\| \leq 3\|A\| \omega_1(2\delta, M_r). \quad (4)$$

Метод проекционной регуляризации был применен для численного моделирования обратной задачи тепловой диагностики

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(0, t) = 0, & x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u'_x(0, t) &= f(t), & t \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где граничное значение  $u(1, t) = u(t)$  для  $t \geq 0$  подлежит определению.

При численном моделировании этой задачи были рассмотрены различные подходы, основанные на применении преобразований Фурье и Лапласа. Для операторных уравнений, полученных в результате каждого из подходов был использован метод проекционной регуляризации. В результате был построен алгоритм численного решения обобщенной задачи (4), а также были решены обратные задачи для некоторых модельных функций.

# Секция 4

---

Прямые  
и обратные  
задачи геофизики

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКА ГЛАВНОГО ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ДАННЫМ МИРОВОЙ МАГНИТНОЙ СЪЕМКИ

Аксенов В. В.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
aksenov@omzg.sccc.ru*

В связи с отсутствием доступа к источнику Главного геомагнитного поля (ГГП), существуют его различные модели. Среди них физически возможны: магнитные массы, электрические токи и, так называемое, динамо-возбуждение ГГП.

Магнитные массы внутри Земли существовать не могут в связи с температурным размагничиванием горных пород с глубиной, динамо-возбуждение также невозможно в связи с отсутствием внутри Земли тороидального магнитного поля достаточной напряженности [1]. Остаются электрические токи, магнитное поле которых наблюдается на поверхности Земли. В 1964 г. в рамках международного сотрудничества была произведена Мировая магнитная съемка ГГП, данные которой нами были использованы для расчета магнитного момента Земли, по которому определялась глубина до источника тороидального тока в жидкой части ядра Земли. В связи со значительной удаленностью тороидального тока в глубине от поверхности Земли его магнитный момент моделируется магнитным моментом контура с током, а магнитный момент ГГП рассчитывается только для его дипольной части. Сравнение этих моментов позволило однозначно вычислить радиус тороидального тока и его глубину. Радиус составил 1437 км, а глубина до источника составила 4934 км соответственно. “Затравкой” для такого тороидального тока послужило магнитное поле Солнца и межпланетное магнитное поле напряженностью всего порядка 64 нТ. Сила тока в источнике ГГП, вычисленная по магнитному моменту его поля составила  $1,7 \cdot 10^8$  А, а плотность тока в источнике равна  $1,2 \cdot 10^{-2}$  А/м<sup>2</sup>. Конфигурация тороидального тока такова: ток расположен в торе, поперечное сечение которого около 3 км, с простираем от полюса до полюса в слое F жидкого ядра. Полюса сфокусированы небольшим тороидальным полем напряженностью в источнике 3–4 Гс. Поток электронов, образующий тороидальный ток, устойчив по отношению к внешним и внутренним воздействиям на его магнитное поле и поддерживается стабильным вращением Земли и электрическим полем напряженностью порядка  $2,5 \cdot 10^{-8}$  В/м.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксенов В. В.** Основы геомагнетизма. Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2012.

# TSUNAMI WAVEFORM INVERSION BY THE TRUNCATED SVD APPROACH AND ITS APPLICATION TO THE 2011 TOHOKU EVENT

Voronina T. A.

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
SB RAS, prosp. Acad. Lavrent'eva, 6, Novosibirsk, 630090 Russia; vta@omzg.ssc.ru*

One of the most important issues of the tsunami modeling is gaining some insight of a tsunami source. Modern tsunami early warning systems generally employ a seismic method to determine source parameters. DART buoys help to gain an additional source information in the case of trans-oceanic tsunamis but would not be effective in the near-field, where a warning should be issued in 15-20 minutes.

This paper proposes an approach to solving the problem of reconstructing an initial tsunami waveform in tsunami source area by the inversion of the wave records observed on a set of the coastal wave gauges or of GPS-displacements, which become available already in a few minutes after an event, providing additional constraints on source parameters.

In the present study, the problem of tsunami source reconstruction is formulated as an inverse problem of mathematical physics for the initial water displacement reconstruction in a source area by the inversion of water-level oscillations observed on a number of points distributed in the ocean. It is well known that this inverse problem is ill-posed and imposes some restrictions on the use of mathematical techniques. Tsunami wave propagation is considered within the scope of the linear shallow-water theory. The direct problem is approximated by a finite difference technique. The ill-posed inverse problem of reconstructing initial tsunami waveforms is regularized by means of the least square inversion using the truncated SVD approach [1]. In this method, the inverse operator is replaced by its restriction on a subspace spanned by a finite number of the first right singular vectors. The so-called *r*-solution [2] is a result of the numerical process. The quality of the solution is defined by relative errors of the tsunami source reconstruction.

How accurately a tsunami source can be recovered using records at a given tide gauge network? To answer this question there has been carried out a series of numerical experiments with synthetic data and real bathymetry of the 2011 Tohoku event. By analyzing the characteristics of a given tide gauges network, the above-proposed method makes possible to control numerical instability of the solution and therefore to obtain an acceptable result in spite of the ill-posedness of the problem. It has been revealed that the accuracy of tsunami source reconstruction strongly depends on the signal-to-noise ratio, the azimuthal and temporal coverage of assimilated tide gauge stations relative to the target area and bathymetric features along the wave path.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 12-07-00406, by the Siberian Branch of the RAS (project 117), by the Siberian Branch and the Far-Eastern Branch of the RAS (project 37), by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (No. 16.740.11.0057).

## REFERENCES

1. **Voronina T.** Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2011. V. 19, N 4/5. P. 615–629.
2. **Cheverda V. A., Kostin V. I.** *r*-pseudoinverse for compact operators in Hilbert space: existence and stability // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 1995. V. 3, N 2. P. 131–148.

## НЕСКОЛЬКО ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

Гласко Ю. В.

*Научно-исследовательский вычислительный центр  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,  
Ленинские горы, Москва, 119192 Россия; glaskoju@mail.ru*

Обратная задача интерпретации в геофизике имеет целью локализацию и определение плотностных параметров источников локальной гравитационной аномалии на дневной поверхности Земли. В рамках принципа декомпозиции В.Н. Страхова проблема имеет 3 этапа. 1. Снятие регионального фона. 2. Пересчет локальной аномалии с дневной поверхности на границу охватывающей источники области  $V$ . 3. Концентрация с  $\Gamma \equiv \partial V$ . Все три задачи являются обратными.

В данном сообщении мы рассмотрим 2-х и 3-х мерные проблемы концентрации.

Пусть нам априори известна область  $V$ , которая включает  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — объекты вызывающие локальную гравитационную аномалию на дневной поверхности. Проблема концентрации заключается в определении параметров  $p = \{\Omega_j, \delta_j(\omega)\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\delta_j(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_j$  — плотности, по известному распределению плотностей  $\delta_\Gamma(s^*)$  на поверхности  $\Gamma \equiv \partial V$ :  $s^* \in \partial V$ :

$$Ap = \delta_\Gamma(s^*)$$

Здесь  $A$  — оператор, действующий из тихоновского пространства либо тихоновского произведении нескольких  $T_{3\frac{1}{2}}$  на гладкую поверхность.  $T_{3\frac{1}{2}}$  погружается в тихоновский куб — метризуемый компакт. При сеточной реализации  $A$  методу конечных разностей предпочтем метод конечных элементов и метод выметания масс Д. Зидарова.

Рассмотрим обратную задачу концентрации для куба  $V = [0; 1] \times [0; 1] \times [1/3; 4/3]$  содержащего объект  $\Omega$  плотности  $\delta(\omega) = 1$ ,  $\omega \in \Omega$ .  $\Omega$  аппроксимируем шаром.  $\delta(\omega)$  определяется в сжимающемся компакте.  $\oint_{s^* \in \Gamma} \delta(s^*) = 1$ . Априорная информация о расположении источника так же, как и распределение плотностей дается поверхностью значений плотностей  $\delta_\Gamma(s^*)$  на границе  $\Gamma$ .

Для концентрации плотностей будем использовать метод статистической регуляризации, сочетающий метод статистических испытаний Монте-Карло, топологическую стабилизацию (система сжимающихся компактов) и метод квазирешений В.К. Иванова. Целью каждого из  $M$  экспериментов метода Монте-Карло является минимизация функционала  $\rho^2(A\delta(\omega), \delta_\Gamma(s^*)) = \|A\delta(\omega) - \delta_\Gamma(s^*)\|_{L_2}^2$ . Мы предполагаем, что  $\delta(\omega)$  равномерно распределены в априори заданных интервалах, что обеспечивает корректность для плотности распределения вероятности от  $\delta(\omega)$ .

Оптимальный эксперимент —  $M = 300$  опытов. Средняя погрешность  $\epsilon$  определения  $\delta(\omega)$  при точном задании  $\delta_\Gamma(s^*)$  составляет 4,2 %. В случае приближенного задания плотности  $\tilde{\delta}_\Gamma(s^*)$ :  $\|\tilde{\delta}_\Gamma - \delta_\Gamma\| \leq 1\%$ ,  $\epsilon \leq 15\%$ .

Для двухмерного случая рассматривается квадрат  $V = [0; 1] \times [1/3; 4/3]$ . Оптимальное количество опытов Монте-Карло равно 300. При точном задании  $\delta_\Gamma(s^*)$ :  $\epsilon = 3.3\%$ . В случае задания  $\|\tilde{\delta}_\Gamma - \delta_\Gamma\|_{L_2} \leq 1\%$   $\epsilon \leq 10\%$ .

Метод опробован на материалах месторождения Уртабулак Бухаро-Хивинской нефтегазоносной области Узбекистана.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПОШАГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА

Демидов Г. В., Мартынов В. Н., Михайленко Б. Г.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6,  
Новосибирск, 630090 Россия; vnm@nmsf.ssc.ru*

В предыдущих публикациях Б. Г. Михайленко [1] был предложен метод решения динамических задач теории упругости, основанный на преобразовании Лагерра по времени. В данной работе мы предлагаем модификацию этого подхода, которая состоит в том, что преобразование Лагерра применяется на последовательности временных интервалов [2]. Полученное решение в конце одного временного отрезка используется в качестве начальных данных для решения задачи на следующем временном отрезке. При реализации данного подхода возникает необходимость выбора четырех параметров: количества проекций преобразования Лагерра, масштабного множителя, необходимого для аппроксимации решения функциями Лагерра, экспоненциального коэффициента весовой функции, использующейся для нахождения решения на конечном временном интервале и длительности этого интервала. Предложен способ выбора данных параметров для устойчивости расчета. Исследовано влияние выбранных параметров на точность вычислений при использовании разностных схем второго и четвертого порядка аппроксимации. Показано, что использование такого подхода позволяет получить решение с высокой точностью на больших интервалах по времени. Предложен алгоритм реализации данного подхода в случае двумерной динамической задачи теории упругости.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-05-00937), программой президиума РАН 2.2.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mikhailenko B. G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Lett. 1999. V. 12. P. 105–110.
2. **Демидов Г. В., Мартынов В. Н.** Пошаговый метод решения эволюционных задач с использованием функций Лагерра // Сиб. журн. вычисл. мат. 2010. Т. 13, № 4. С. 413–422.



**ESTIMATION OF DEEP HEAT FLOW  
AND HEAT PROPERTIES OF SEDIMENTS  
FROM LONG-TERM TEMPERATURE MONITORING**

**Duchkov A. A.<sup>1</sup>, Duchkov A. D.<sup>1</sup>, Karchevsky A. L.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Trofimuk Institute of Petroleum-Gas Geology and Geophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 3, Novosibirsk, 630090 Russia;  
DuchkovAA@ipgg.nsc.ru, DuchkovAD@ipgg.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia;  
karchevs@math.nsc.ru*

We analyzed field data of temperature monitoring in sediments of Lake Teletskoye. Sediment temperatures down to 1.05 m deep were measured for more than 2 years.

We formulated an optimization-type inverse problem for estimating undisturbed temperature gradient and thermal diffusivity of sediments. Iterative minimization of the inverse problem resulted in a deep temperature gradient estimate of  $G = 95$  mK/m. This value corresponds to high heat flow and thus indicates a rift origin of Lake Teletskoye.

The first and second authors were partly supported by the Siberian Branch of the RAS (project 45). The third author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 11-01-00105 and by the Siberian Branch of the RAS (project 14).

## ТЕОРЕМА О СФЕРИЧЕСКОМ СРЕДНЕМ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОРИСТОУПРУГОСТИ

Жабборов Н. М.<sup>1</sup>, Имомназаров Х. Х.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> НУУЗ им. Мирзо Улугбека, Ташкент; jabborov61@mail.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
imom@omzg.sscs.ru

Дилатансия — это нелинейное разуплотнение среды за счет образования трещин сдвига вследствие превышения наибольших касательных напряжений некоторого порога. К области дилатансии относят множество точек упруго пористой среды, для которых при заданном поле напряжений  $\{\sigma_{ij}\}$  в среде выполнено следующее условие:

$$D_\tau \equiv \tau - \alpha(P + \rho g z) - Y \geq 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  плотность породы,  $g$  ускорение свободного падения,  $z$  глубина точки,  $P$  гидродинамическое давление,  $\alpha$  коэффициент внутреннего трения,  $Y$  сцепление породы,  $\tau$  интенсивность касательных напряжений

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2}.$$

Условие (1) совпадает с критерием Шлейхера-Надаи разрушения материала под действием скальвующих нагрузок. Критерий удовлетворительно описывает начало процесса разрушения горных пород. Критерий применим и в стадии “предразрушения” (при нагрузке до 60–90 % от критической) для качественного описания формы областей активизации раскрытия трещин.

В данной работе, используя предложенный метод [1, 2], получено соотношения о среднем для уравнений статики упруго-пористого тела. А именно, получены соотношения для вектора смещений упруго-пористого тела и порового давления. Знания этих величин достаточно с одной стороны для оценки резервуаров в нефтедобыче и с другой стороны для определений области дилатансии в задачах прогноза землетрясений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сабельфельд К. К., Шалимова И. А. Векторная теорема о среднем для систем дифференциальных уравнений и векторные алгоритмы блуждания по сферам // Методы статического моделирования. 1986. С. 78–85.
2. Сабельфельд К. К., Шалимова И. А. Теорема о сферическом среднем для систем эллиптических уравнений и уравнения термоупругих колебаний // Численные методы статического моделирования. 1987. С. 88–94.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Жабборов Н. М.<sup>1</sup>, Имомназаров Х. Х.<sup>2</sup>, Коробов П. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> НУУз им. Мирзо Улугбека, Ташкент; jabborov61@mail.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
imom@omzg.sscs.ru

В работах [1, 2] на основе законов сохранения, инвариантности уравнений относительно преобразований Галилея, термодинамического равновесия и условия термодинамической согласованности построена нелинейная двухскоростная модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Двухскоростная гидродинамическая теория при условии равновесия фаз по давлению, была построена в работе [3]. Уравнения движения двухскоростной среды с одним давлением в системе в изотермический случай имеет вид [3]

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} + \rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + \mathbf{f}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{v}$  — вектора скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями  $\tilde{\rho}$  и  $\rho$ ,  $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$  — общая плотность континуума;  $p = p(\bar{\rho}, (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2)$  — уравнение состояния континуума;  $\mathbf{f}$  — вектор массовой силы, отнесенной к единице массы.

В данной работе найдены новые законы сохранения для уравнения движения двухскоростной среды с одним давлением [4].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
2. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 94–105.
3. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
4. Жабборов Н. М., Коробов П. В., Имомназаров Х. Х. Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 2. С. 156–163.

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧАНДЛЕРОВСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОЛЮСА МЕТОДОМ КОРРЕКТИРУЮЩЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Зотов Л. В.

*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ,  
Университетский просп. 13, Москва 630090, Россия;  
tempus@sai.msu.ru*

В движении полюса Земли одной из основной составляющих является Чандлеровское колебание. Амплитуда этого резонансного колебания достигает 0.2 угловых секунды. Земля является вязко-упругим телом и Чандлеровское колебание должно затухать за характерное время 50 лет, однако этого не происходит. Считается, что оно поддерживается гидро-атмосферным возбуждением.

Восстановление причин Чандлеровского колебания является некорректной обратной задачей. В данной работе она решается методом корректирующей фильтрации, когда инверсный оператор корректируется в частотной области фильтром Пантелеева, в целях подавления годовой, низкочастотной и прочих шумовых компонент.

В результате выявлено наличие 18.6-летней амплитудной модуляции Чандлеровского возбуждения, происходящей синхронно с приливными вариациями в цикле прецессии узлов Лунной орбиты. Проведено также исследование атмосферного и океанического углового моментов.

## РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ ДЛЯ СОВМЕЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
imom@omzg.sscs.ru, alex\_mikh@mail.ru*

При моделировании сейсмических полей в реальных средах необходимо учитывать механизмы поглощения упругой энергии в среде и соответствующие законы дисперсии. Такая модель может быть описана в рамках совмещенной модели для общей теории вязкоупругости и пористой среды, заполненной вязкой жидкостью. Такой подход позволяет объяснять наблюдаемые эффекты сейсмических исследований свойств горных пород при наличии поглощения энергии распространяющихся сейсмических волн. В данном докладе рассматривается алгоритм численного решения двухмерной динамической задачи распространения сейсмических волн для совмещенной математической модели вязкоупругой и пористой среды с учетом диссипации энергии. В качестве модели пористой среды используется модель, предложенная в 1989 году В. Н. Доровским [1]. В данной модели есть три типа колебаний: поперечный и два типа продольных. При этом упругие параметры среды взаимнооднозначно выражаются этими тремя скоростями упругих колебаний. Это обстоятельство является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей сейсмических волн и физических плотностей пористого тела и насыщающей жидкости. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей матрицы, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости [2]. Математическая модель для вязкоупругой среды записывается через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений, используя принцип суперпозиции Больцмана в интегралах свертки с функциями последействия [3]. Это позволяет рассматривать самые общие связи между напряжением и деформацией с помощью задания произвольных функций последействия. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования преобразования Лагерра по времени и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работе [4], а затем развит и для задач вязкоупругости [5].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Доровский В. Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
2. **Imomnazarov Kh. Kh.** Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Letters. 2000. V. 13, N 3. P. 33–35.
3. **Carcione J. M., Kosloff D., Kosloff R.** Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1988. N 95. P. 597–611.
4. **Mikhailenko B. G.** Spectral Laguerre method for the approximation solution of time-dependent problems // Appl. Math. Letters. 1999. N 12. P. 105–110.
5. **Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V.** Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. 2003. N 51. P. 37–48.

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОРИСТЫХ СРЕД

Имомназаров Х. Х.<sup>1</sup>, Янгибоев З. Ш.<sup>2</sup>

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
imom@omzg.sscs.ru*

<sup>2</sup>*Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан*

Пусть полупространство  $z > 0$  заполнено неоднородной пористой средой. Уравнения распространения сейсмических SH волн с учетом поглощения энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения  $b(z)$ , имеют вид [1, 2]

$$\rho_s(z) u_{tt} = (\mu(z) u_z)_z - \rho_l(z) b(z) (u_t - v_t), \quad (1)$$

$$\rho_l(z) v_{tt} = \rho_l(z) b(z) (u_t - v_t). \quad (2)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — компоненты векторов скоростей смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями  $\rho_s(z)$  и  $\rho_l(z)$  соответственно. Предположим, что пористая среда покоится при  $t < 0$ :

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Пусть на границе  $z = 0$  приложена сила:

$$\mu u_z|_{z=0} = \delta(t). \quad (5)$$

Здесь  $\delta(t)$  — функция Дирака.

Используя методику, предложенную в [3] для обратной задачи теории упругости, построены регуляризирующие алгоритмы следующих обратных задач:

**Задача 1.** Требуется по информации

$$u|_{z=0} = \phi(t), \quad (6)$$

восстановить  $\mu(z)$  из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\rho_l(z)$ ,  $b(z)$ ).

**Задача 2.** Требуется по информации (6) восстановить  $b(z)$  из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\rho_l(z)$ ,  $\mu(z)$ ).

**Задача 3.** Требуется по информации (6) восстановить  $\rho_s(z)$  из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_l(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $b(z)$ ).

**Задача 4.** Требуется по информации (6) восстановить  $\rho_l(z)$  из (1)–(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $b(z)$ ).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993. № 1. С. 100–111.
2. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science Publishers, 1995.
3. Пестов Л. Н. Об одном способе регуляризации одномерной задачи теории упругости // Труды ВЦ СО РАН, Новосибирск. Мат. модел. в геофизике. 1993. Т. 1. С. 112–124.

## КИНЕМАТИКО-ГРАВИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЛАНЕТ

**Кочнев В. А.**

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок,  
Красноярск, 660036 Россия; kochnev@icm.krasn.ru*

В работе [1] было высказано предположение, что жидкая, ионизированная под действием высоких температур субстанция ядра генерирует главное магнитное поле Земли. Субстанция движется под влиянием тех же сил, что и пассатные и приливные течения океана на экваторе, то есть под влиянием горизонтальных составляющих гравитационных сил Луны и Солнца. В данной работе представлена эмпирическая математическая модель связи параметров магнитного поля планет с гравитационными и кинематическими параметрами Солнца, планет и их спутников. Ниже приведена формула для расчета эмпирических коэффициентов  $K_N$ .  $K_0$  и  $K_3$ , которые могут использоваться для оценки отношений индукций магнитного поля на экваторе и магнитных моментов планет относительно Земли.

$$K_N = \frac{\sum \Delta g_{hor}(pl)(T_e/T_{pl}) \left(\frac{r_{pl}}{r_e}\right)^N}{\sum \Delta g_{hor}(e)}; \quad (1)$$

$$\Delta g_{hor} = -\frac{3}{2} \Delta g_{sp} \frac{r}{R} \sin 2\theta; \quad \Delta g_{sp} = G \frac{m_s}{R^2}$$

где  $\Delta g_{hor}$  — горизонтальная (приливая) компонента ускорения тела единичной массы на поверхности планеты и Земли (e);  $\theta$  — угловая координата точки, для которой рассчитывается горизонтальная составляющая  $\Delta g_{hor}$ .

Примем  $\theta = 45^\circ$ ,  $m_s$  — масса спутника,  $R$  — среднее расстояние между спутником и планетой,  $G$  — гравитационная постоянная. Формулы для расчета взяты из работы [2].  $T_{pl}$  и  $T_e$  — интервал времени между моментами встречи 0 меридиана с проекцией спутника на шар. Иногда это почти период. Для пары Земля — Луна  $T_e = 1,03$  сут. Ниже приведены значения  $B_{pl}/B_e$  и  $K_0$  для всех планет и гравитирующих объектов.

Планеты	Источники гравитации	$B_{PL}/B_e$	$K_0$
Меркурий	Солнце	0.007	0.012
Венера	Солнце	< 0.00009	-0.007
Земля	Солнце, Луна	1	1
Марс	Солнце, Фобос	0.0016	0.039
Юпитер	Ио	14	13.94
Сатурн	Титан	0.7	0.95
Уран	Титания	0.7	0.13
Нептун	Тритон	0.45	1.44

Коэффициент корреляции относительных магнитных полей на экваторе с расчетными коэффициентами  $K_0$  равен 0.997, а относительных магнитных моментов с  $K_3$  стремится к 1, что свидетельствует о достаточно тесной, почти функциональной связи между параметрами. Таким образом, по кинематико-гравитационной модели для возникновения магнитного поля необходимы следующие условия: 1) жидкое ядро, атомы которого ионизированы под действием высокой температуры; 2) вращение планеты вокруг своей оси; 3) наличие одного или нескольких внешних объектов (Солнце или спутники), создающих горизонтальные силы, вызывающие движение жидкости как на поверхности планеты, так и в жидком ядре.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочнев В. А., Гоз И. В.** Модель источников магнитного поля ядра Земли, полученная в результате решения обратной задачи магнитометрии // Мат. 38-й сессии Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей”. Пермь, 2011.
2. **Бутиков Е. И.** Физика океанских приливов в компьютерных моделях. Санкт-Петербург: СПбГУ, 2007.



## РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПОВЕРХНОСТИ СУШИ ПРИ ОБРАБОТКЕ САМОЛЕТНЫХ АЭРОГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Козодеров В. В.<sup>1</sup>, Кондранин Т. В.<sup>2</sup>,  
Сушкевич Т. А.<sup>3</sup>, Дмитриев Е. В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Ленинские горы, МГУ, 1, Москва, 119991 Россия; vkozod@mes.msu.ru

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт  
(Национальный исследовательский университет), Институтский пер., 9,  
Долгопрудный, 141700 Россия; kondr@kondr.ector.mipt.ru

<sup>3</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,  
Миусская пл., 4, Москва, 125047 Россия; tamaras@keldysh.ru

<sup>4</sup>Институт вычислительной математики РАН,  
ул. Губкина, 8, Москва, 119333 Россия; yegor@mail.ru

Получение гиперспектральных изображений или спектроскопия изображений с сотнями спектральных каналов в видимой и ближней инфракрасной области — одно из перспективных направлений самолетного мониторинга для распознавания объектов поверхности суши. Самолетные гиперспектральные данные позволяют использовать тонкую структуру регистрируемых спектров. Имея спектральное разрешение порядка нанометра, эти данные содержат информацию о линиях и полосах поглощения излучения в оптической области спектра, которые характерны для объектов атмосферы и поверхности суши. Вместе с тем, большое число спектральных каналов усложняет проблему распознавания, поскольку данные этих каналов могут быть взаимно зависимы. Следствие такой зависимости — неустойчивость решаемых алгебраических уравнений (линейных и нелинейных), относящихся к различным каналам и обучающим пикселям, которые характеризуют выбранные классы объектов. Проводится оптимизация каналов, чтобы гарантировать высокую точность используемых методов распознавания образов.

Исходные положения решения региональных прикладных проблем распознавания образов объектов поверхности суши на основе гиперспектральных изображений были показаны в работе [1]. Методы распознавания образов включают стадии классификации объектов и их идентификации на основе априорной информации и обучающих процедур нахождения связей между регистрируемыми спектрами и характерными признаками этих объектов. Следующая стадия обработки данных подразумевает оценку количественных параметров выделенных классов для объектов поверхности суши. Детальное описание рассматриваемого модельного приближения взаимодействия прямого и рассеянного солнечного излучения с такими сложными средами, как лесной полог, дано в работе [2]. Соответствующие приложения обработки данных самолетного гиперспектрального зондирования высокого пространственного разрешения вместе с наземными данными лесотаксации на конкретных участках выделенной территории, а также вместе с вычислительными процедурами обработки данных показаны в работе [3]. Эти и другие публикации авторов проекта прояснили характерные особенности аэрогиперспектрометрии для нахождения связей между приемными устройствами и проблемами распознавания образов.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-07-12006-офи-м, 11-07-00382-а и 12-01-00009-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (г/к П349 и 14.740.11.1091).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козодеров В. В., Кондранин Т. В., Райкунов Г. Г. и др.** Аэрокосмическая гиперспектрометрия: летные испытания аппаратуры, программно-алгоритмическое обеспечение обработки данных // Исследование земли из космоса. 2010. № 5. С. 59–68.
2. **Kozoderov V. V., Dmitriev E. V.** Remote sensing of soils and vegetation: pattern recognition and forest stand structure assessment // Intern. J. Remote Sensing. 2011. V. 32, N 20. P. 5699–5717.
3. **Козодеров В. В., Кондранин Т. В., Дмитриев Е. В., Каменцев В. П.** Исследование лесных и торфяных пожаров по данным гиперспектрального аэрозондирования // Исследование земли из космоса. 2011. № 5. С. 70–79.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
В КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНЫХ  
КВАЗИФРАКТАЛЬНЫХ СРЕДАХ**

**Кризский В. Н., Яматов Р. Р., Бикбаева А. Р., Лутфуллин Р. Н.**

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия,  
пр. Ленина, 49, Стерлитамак, 453103 Россия;  
Krizsky@rambler.ru, YamatovRim@ya.ru*

Рассматривается способ вычисления геофизических полей в кусочно-анизотропных средах. Математическая модель распространения таких полей представляет краевую задачу математической физики эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типа. Способ основан на методах интегральных представлений, интегральных уравнений с использованием функции Грина [1, 2] и позволяет построить рекуррентные процедуры упрощения/усложнения геометрии области исследования.

Универсальность подхода к моделированию стационарных и нестационарных геофизических полей позволяет разработать программное обеспечение расчета комплекса полей (акустических, температурных, диффузионных, электрических, магнитных), применяемых для структурной интерпретации исследуемого района. Алгоритмы допускают распараллеливания и могут быть реализованы для многопроцессорных компьютерных систем и вычислительных кластеров.

Осуществлена апробация при решении прямых и обратных задач стационарной геоэлектрики в присутствии квазифрактальных анизотропных локальных включений Жюлиа [3].

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Кризский В. Н.** О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Ч. I. Стационарные поля // Вестник Башкирского государственного университета. 2009. Т. 14, № 3. С. 726–730.
2. **Кризский В. Н.** О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Ч. II. Нестационарные поля // Вестник Башкирского государственного университета. 2009. Т. 14, № 4. С. 1302–1306.
3. **Кризский В. Н., Яматов Р. Р.** Математическое моделирование геоэлектрических полей в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах Жюлиа // Вестник ЮУрГУ. 2011. № 25 (242). С. 43–51.

## РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ БОКОВОГО КАРОТАЖНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Лабутин И. Б.<sup>1</sup>, Суродина И. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука  
СО РАН, просп. Акад. Копылова, 3, Новосибирск, 630090 Россия;  
ilya.labutin@gmail.com*

<sup>2</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
sur@ommfa01.sccc.ru*

Изучение геологического строения месторождений, выделение нефтяных и газовых пластов, изучение геоэлектрических структур впадин в настоящее время невозможно без соответствующего двумерного и трехмерного моделирования. Моделирование показаний зондов бокового каротажного зондирования и установок Шлюмберже (для задач вертикального электрического зондирования) сводится к решению уравнения Пуассона.

Для решения уравнения Пуассона применяется предобусловленный метод сопряженных градиентов. Непредобусловленные методы сопряженных направлений достаточно легко распараллеливаются, но при этом скорость сходимости невысокая, особенно для плохо обусловленных матриц. Задача построения эффективного, хорошо распараллеливаемого предобуславливателя является актуальной. Стандартные техники предобуславливания, такие как LU-разложение, неполная факторизация и симметричная последовательная верхняя релаксация (SSOR) остаются весьма трудоёмкими для распараллеливания. Предобуславливатели, связанные с нахождением приближённой обратной матрицы (AINV), хорошо распараллеливаются, но техника построения такой матрицы весьма трудоёмка. Мы предлагаем простой способ построения и уточнения приближенной обратной матрицы с помощью алгоритма Хотеллинга [1]. В качестве начального приближения  $D_0$  к обратной матрице можно взять предобуславливатель Якоби или SSOR-AI [2]. Если выполнено условие  $\|E - AD_0\| \leq q < 1$ , где  $A$  — матрица решаемой системы уравнений, то можно построить последовательность:  $D_m = 2D_{m-1} - D_{m-1}AD_{m-1}$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Проведенные эксперименты показали высокую эффективность при решении двумерных [3] и трехмерных уравнений Пуассона на GPU. Быстрое решение данных прямых задач даёт возможность решать обратную задачу восстановления геоэлектрических параметров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Hottelling H.** Analysis of a complex of statistical variables into principal components // J. Educ. Psych. 1933. V. 24. P. 417–441, 498–520.
2. **Helfenstein R., Koko J.** Parallel preconditioned conjugate gradient algorithm on GPU // J. Computat. Appl. Math. 2011. doi:10.1016.j.cam, 2011.04.025.
3. **Суродина И. В., Лабутин И. Б.** Разработка параллельных алгоритмов для решения задач каротажа на графических процессорах // Сборник трудов PAVT-2012. 2012. С. 690–697. <http://pavt.susu.ru/2012/short/106.pdf>.

## ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

**Макаренко Н. И.**

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090 Россия;  
makarenko@hydro.nsc.ru*

Рассматривается математическая модель волновых движений невязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Хорошо известно, что для двумерных установившихся течений исходные гидродинамические уравнения Эйлера эквивалентным образом сводятся к квазилинейному эллиптическому уравнению второго порядка для функции тока (уравнению Дюбрей — Жакотэн — Лонга). Коэффициенты указанного нелинейного уравнения содержат функцию, характеризующую распределение плотности жидкости по линиям тока. Прямая задача подразумевает отыскание точных решений типа уединенных внутренних волн и нахождение зависимости между скоростью и амплитудой волны (дисперсионной кривой) по заданному профилю плотности. Это достаточно хорошо изученная задача волновой гидродинамики, имеющая многочисленные приложения в океанологии (см. [1, 2] и имеющиеся там ссылки). Постановка обратной задачи предполагает восстановление профиля плотности жидкости по известным кинематическим характеристикам волнового движения. В случае, когда известна дисперсионная кривая для внутренних уединенных волн, обратная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром специального вида. В данной работе анализируются свойства единственности решений указанного уравнения.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00671).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Makarenko N.** Equivariant cosymmetry and front solutions of the Dubreil — Jacotin — Long equation // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.* 2003. V. 337, N 11. P. 753–756 (Pt 1); V. 337, N 12. P. 815–818 (Part. 2).
2. **Makarenko N. I., Maltseva J. L., Kazakov A. Yu.** Conjugates flows and amplitude bounds for internal solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys.* 2009. V. 16. P. 169–178.

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КРИВЫХ И В КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СЕЙСМИКЕ (ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА)

Меграбов А. Г.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия; mag@sscc.ru*

**Плоский случай.** Обнаружен [1] закон сохранения (дивергентное тождество)

$$\operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0 \quad (1)$$

для семейства  $\{L_\tau\}$  гладких плоских кривых  $L_\tau$  с ортами Френе  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  (касательной и нормали), сплошь заполняющих область  $D$  на плоскости  $x, y$ . Здесь  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{S}^* = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_\nu = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\nu}) = -\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{K}_\tau = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} = k \boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{K}_\nu = (\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu} = -k \boldsymbol{\tau}$  — векторы кривизны кривых  $L_\tau$  и ортогональных к ним кривых  $L_\nu$ ,  $k$  и  $k_\nu$  — их кривизны,  $\alpha$  — угол наклона  $\boldsymbol{\tau}$  к оси  $x$ ,  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ . Все векторы и  $\alpha, k, k_\nu$  — функции  $x, y$ . Т. е. сумма  $\mathbf{S}^*$  векторов кривизны двух кривых из взаимно ортогональных семейств является соленоидальным полем. В случае, когда кривые  $L_\tau$  являются векторными линиями произвольного гладкого векторного поля  $\mathbf{v}(x, y) = |\mathbf{v}| \boldsymbol{\tau}$  с модулем  $|\mathbf{v}| \neq 0$  и направлением  $\boldsymbol{\tau}$ , тождество (1) равносильно тождеству

$$\operatorname{div} \{(\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2 - \operatorname{grad} \ln |\mathbf{v}|\} = 0. \quad (2)$$

В случае  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u(x, y)$  (2) получено из равносильной формулы, выражающей гауссову кривизну  $K(x, y)$  поверхности с метрикой  $dl^2 = n^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$  через другие дифференциальные инварианты группы Ли  $G$  ( $G$  — расширение группы конформных преобразований  $x, y$  и группа эквивалентности уравнения эйконала и других уравнений). На этой основе в кинематической сейсмике (геометрической оптике) открыт закон сохранения для поля времен  $\tau$  (для решений уравнения эйконала  $|\operatorname{grad} \tau|^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x, y)$  с показателем преломления  $n(x, y)$ ,  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \tau = n \boldsymbol{\tau}$ ) вида  $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$ , где  $\mathbf{T} = \Delta \tau \operatorname{grad} \tau / n^2 - \operatorname{grad} \ln n$ . Он равносильен найденному геометрическому свойству кривых лучей  $L_\tau$  и фронтов  $L_\nu$ : сумма  $\mathbf{S}^*$  их векторов кривизны является соленоидальным полем, т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0$  ( $\mathbf{T} = -\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$ ). Отсюда  $\partial(\operatorname{div} \mathbf{Q})/\partial t = 0$ , где  $\mathbf{Q} = \Delta \tau \operatorname{grad} \tau / n^2$ ,  $t$  — параметр точечного источника,  $\Delta \ln n = \operatorname{div} \mathbf{Q}$  и следуют формулы для интегральных характеристик среды в обратных задачах.

**Трехмерный случай.** Получены аналогичные (1) законы сохранения вида  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , где  $\mathbf{F}$  явно выражается через орты Френе  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  (касательной, главной нормали и бинормали, функции  $x, y, z$ ) семейства пространственных кривых  $L_\tau$  и, кроме  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$  или  $\mathbf{S}^* = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_\nu + \mathbf{K}_\beta$  ( $\mathbf{K}_\beta = (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \boldsymbol{\beta}$ ), содержит кручение  $\varkappa = \varkappa(x, y, z)$  кривых  $L_\tau$ . Например,  $\operatorname{div} \{\boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \mathbf{S}^* - \varkappa \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} - k \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}\} = 0$ . В плоском случае  $\varkappa = 0$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \text{const}$  и они переходят в (1). Из них получаем законы сохранения для произвольного гладкого векторного поля  $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \boldsymbol{\tau}$  и для поля времен  $\tau$  (решений  $\tau$  уравнения эйконала  $|\operatorname{grad} \tau|^2 = n^2(x, y, z)$ ). Они связаны с 10-параметрической группой Ли  $G_{10}$ , являющейся расширением группы конформных преобразований  $x, y, z$  и группой эквивалентности.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00648).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Меграбов А. Г. Дивергентные формулы (законы сохранения) в дифференциальной геометрии плоских кривых и их приложения // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 3. С. 313–317.
2. Меграбов А. Г. Некоторые дифференциальные тождества и их приложения к уравнению эйконала // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 4. С. 461–465.

**РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ  
И АКУСТО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН  
ДЛЯ МОДЕЛИ “ЗЕМЛЯ — АТМОСФЕРА”  
ПРИ НАЛИЧИИ ВЕТРА**

Михайленко Б. Г., Михайлов А. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
mikh@sscc.ru, alex\_mikh@mail.ru*

При моделировании сейсмических волновых полей внутри упругой среды обычно полагают, что поверхность среды граничит с вакуумом и задают граничные условия на свободной поверхности. Тем самым полагают, что на границе сейсмические волны абсолютно отражаются, при этом пренебрегают эффектом генерации упругими волнами акусто-гравитационных волн в атмосфере и их взаимодействием на границе. В последнее время появились теоретические и экспериментальные исследования, в которых показана высокая степень взаимосвязи между волнами в литосфере и атмосфере. В работе [1] описан эффект акусто-сейсмической индукции, при которой акустическая волна от вибратора благодаря явлению рефракции в атмосфере возбуждает интенсивные поверхностные сейсмические волны на большом расстоянии. В свою очередь, литосферные сейсмические волны от землетрясений и взрывов генерируют атмосферные акусто-гравитационные волны, которые особенно интенсивны в верхних слоях атмосферы с малой плотностью. Теоретическим исследованиям волновых процессов на границе упругого полупространства с однородной атмосферой посвящены работы [2, 3]. В них установлены и исследуются свойства поверхностной волны Стоунли — Шолтэ и модифицированной волны Лэмба.

В данном докладе рассматривается решение 2.5D динамической задачи распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для совмещенной математической модели “Земля-Атмосфера” при наличии ветра в атмосфере. Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений. Система уравнений, описывающая распространение акусто-гравитационных волн в неоднородной неионизированной атмосфере, записывается через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений, давления и изменения плотности воздуха с вертикальной стратификацией и при наличии ветра, направленного в горизонтальной плоскости.

Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования интегральных преобразований Лагерра и Фурье с конечно-разностным методом. Подобный подход к решению задачи для вертикально-неоднородной модели в цилиндрической системе координат без учета ветра в атмосфере был рассмотрен в работе [4].

Работа поддержана РФФИ (грант 11-05-00937).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев А. С., Глинский Б. М., Дряхлов С. И. и др.** Эффект акустосейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 5. С. 664–667.
2. **Гасилова Л. А., Петухов Ю. В.** К теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль разных границ раздела в атмосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 1. С. 14–23.
3. **Разин А. В.** Распространение сферичного акустического дельта-импульса вдоль границы газ-твердое тело // Изв. РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 73–77.
4. **Михайленко Б. Г., Решетова Г. В.** Математическое моделирование распространения сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля — атмосфера // Геология и геофизика. 2006. Т. 47, № 5. С. 547–556.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СКВАЖИН С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА МЕТОДОМ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ

Морозов П. Е.

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН,  
ул. Лобачевского, 2/31, Казань, 420111 Россия; morozov@mail.knc.ru*

В основе метода фильтрационных волн давления лежит зондирование окрестности скважины периодическими возмущениями [1]. Так, в результате работы скважины с дебитом меняющимся по гармоническому закону в ее окрестности устанавливается квазистационарный режим фильтрации, при котором давление в призабойной зоне изменяется с тем же периодом, что и дебит скважины. По замерам амплитуды изменения давления в скважине и сдвигу фаз при различных периодах воздействия определяются фильтрационно-емкостные параметры пласта. В данной работе анализируются особенности амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик при периодическом воздействии на окрестность скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва.

Представим дебит скважины в комплексной форме  $q(t) = Q e^{i\omega t}$ , где  $Q$  — амплитуда колебания дебита,  $\omega$  — частота. Для комплексной передаточной функции, которая определяется как отношение амплитуды колебания давления к амплитуде колебания дебита, получено следующее аналитическое выражение:

$$H(i\omega_d) = \frac{i\omega_d \bar{p}_d(i\omega_d)}{1 - C_d \omega_d^2 \bar{p}_d(i\omega_d)}, \quad (1)$$

где  $\omega_d = \omega \mu \beta x_f^2 / k$  — безразмерная частота,  $C_d = C / (2\pi \beta h x_f^2)$  — безразмерный коэффициент влияния объема ствола скважины,  $k$  — проницаемость пласта,  $h$  — толщина пласта,  $\mu$  — вязкость,  $\beta$  — упругоэластичность,  $x_f$  — полудлина трещины. Изображение по Лапласу функции изменения давления  $\bar{p}_d(u)$  в скважине, работающей с постоянным дебитом  $Q$ , определяется из решения системы интегральных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \bar{p}_d(u) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{q}(x', u) K_0(\sqrt{u|x_d - x'|}) dx' \\ & - \frac{\pi}{F_{cd}} \int_0^{x_d} \int_0^{x'} \bar{q}(x'', u) dx'' dx' + \frac{\pi x_d}{u F_{cd}}, \quad (2) \\ & \int_{-1}^1 \bar{q}(x', u) dx' = \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

где  $p_d = 2\pi k h (p_k - p) / (Q \mu)$ ,  $t_d = k t / (\mu \beta x_f^2)$ ,  $x_d = x / x_f$ ,  $F_{CD} = k_f w / (k x_f)$  — безразмерная проводимость трещины,  $k_f$  — проницаемость трещины,  $w$  — раскрытие трещины,  $p_k$  — пластовое давление,  $q(x_d, t_d)$  — приток к трещине,  $K_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода 0-го порядка.

Для билинейного режима течения к трещине справедлива следующая асимптотическая формула

$$H(i\omega_d) = \frac{\pi}{\sqrt{2 F_{CD}} \sqrt[4]{i\omega_d} + \pi C_d i\omega_d} \quad (\omega_d \gg 1). \quad (3)$$



На основе полученных выражений передаточной функции построены диагностические графики амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик, которые могут быть использованы в методе фильтрационных волн давления для определения проводимости и длины трещины гидроразрыва.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-05-00878-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Овчинников М. Н.** Интерпретация результатов исследования пластов методом фильтрационных волн давления. Казань: Новое знание, 2003.
2. **Cinco-Ley H., Meng H.-Z.** Pressure-transient analysis of wells with finite-conductivity vertical fractures in double porosity reservoirs / SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2-5 October, Houston, Texas, 1988. Paper SPE18172.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПОЛЕВЫХ ДАННЫХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Неведрова Н. Н., Санчаа А. М.

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука  
СО РАН, просп. Акад. Копюга, 3, Новосибирск, 630090 Россия;  
NevedrovaNN@ipgg.nsc.ru, SanchaaAM@ipgg.nsc.ru*

Для интерпретации полевых данных электромагнитных зондирований широко используются различные программно-алгоритмические комплексы моделирования и инверсии, базирующиеся на модели горизонтально слоистых сред. Практически во всех этих комплексах имеется блок автоматической интерпретации, основанный на минимизации невязки между теоретической и полевой кривой зондирования. Такой способ интерпретации является наиболее быстрым, но как показывает опыт, для большинства геофизических задач не оптимален, так как не позволяет получить необходимое решение. Это связано с целым рядом обстоятельств, и, в общем, свидетельствует о некорректности решения обратной задачи геоэлектрики. Всегда необходим анализ полученных полевых данных, их сортировка. На первом этапе выделяются наиболее неискаженные кривые, для которых возможна интерпретация с использованием горизонтально-слоистой модели. Их обработка при максимально полном использовании априорных данных дает возможность оценить геоэлектрические параметры объекта исследования в первом приближении. Далее необходимо исследование характерных искажений полевых кривых относительно графиков зондирования над слоисто-однородной моделью. Рассмотрим конкретный пример. Полевые данные метода сопротивлений получены на территории Курайской межгорной впадины. С помощью интерпретации в программном комплексе решения обратных задач СОНЕТ были построены геоэлектрические разрезы по профилям в южной части впадины. Впадина расположена в сейсмоактивной зоне, структура поверхности опорного горизонта (фундамента) обусловлена тектоническими движениями. Глубины до фундамента на разрезах варьируют в среднем от 100 до 500 и более метров. В целом ряде случаев в соседних пунктах зондирования наблюдается резкое изменение общей мощности осадков. При рассмотрении полевых кривых были выявлены следующие характерные искажения. Тип 1 присутствует при наличии уступа в высокоомном фундаменте, когда центр установки зондирования расположен над поднятым крылом. При этом наклон правой восходящей ветви к горизонтальной оси составляет менее 45 градусов, что обусловлено влиянием более мощных проводящих осадков на больших разносах. Тип 2 проявляется при наличии уступа в высокоомном фундаменте, когда центр установки зондирования расположен над опущенным крылом, наклон правой восходящей ветви составляет более 45 градусов. В этом случае влияют высокоомные породы, находящиеся на больших разносах на меньшей глубине. Для анализа описанных искажений используются программы двумерного и трехмерного моделирования. Была выбрана программа 3DDCXH, созданная профессором Клаусом Спитцером (Германия) [1]. Она предназначена для 3D моделирования методом сопротивлений. Прямая задача решается на основе алгоритма конечных разностей, используя метод сопряженных градиентов. Было выполнено моделирование по программе 3DDCXH, с помощью которого оценены реальные размеры сложных ступенчатых структур в фундаменте Курайской депрессии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Spitzer K.** A 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modeling using conjugate gradient methods // *Geophys. J. Int.* 1995. V. 123. P. 903–914.

## ПАРАКСИАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ДВУМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ПЕРЕМЕННЫМ ВОЛНОВЫМ ЧИСЛОМ В БИЭЙКОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Сердюков А. С.<sup>1</sup>, Айзенберг А. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2,  
Новосибирск, 630090 Россия; alexanderserdyukov@yandex.ru

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука  
СО РАН, просп. Акад. Копюга, 3, Новосибирск, 630090 Россия;  
AizenbergAM@ipgg.nsc.ru

Аналитические методы решения двумерного уравнения Гельмгольца с переменным волновым числом (квантово-механическим потенциалом) имеют фундаментальное значение в развитии теоретических и прикладных исследований волновых процессов в оптике, акустике, сейсмике, электродинамике, квантовой механике. Наиболее универсальным методом аналитического решения этого уравнения является метод мультипликативного разделения переменных, который сводит двумерное уравнение Гельмгольца в частных производных к эквивалентной системе двух обыкновенных уравнений второго порядка. После основополагающих работ Робертсона (1927) и Эйзенхарта (1934-1935) по разделяющим системам координат стало ясно, что точное решение может быть найдено только для узкого вырожденного класса переменных волновых чисел. Отсутствие перспективы на получение решений в общем случае послужило одной из главных причин падения интереса к точным аналитическим методам. Преимущественное развитие получили приближенные аналитические (асимптотические, высокочастотные) методы теории распространения и дифракции волн. В ходе развития этих методов естественно возникла эвристическая концепция поперечной диффузии Леонтовича и Фока (1944-1945), в рамках которой структура решения в пограничных слоях уже имеет мультипликативный вид: произведение решений одномерного уравнения переноса и параболического уравнения поперечной диффузии.

Позднее теория краевых волн [1] позволила преобразовать параболическое уравнение в уравнение Куммера с помощью введения безразмерной биейкональной переменной, которая выражается через разность между двумя различными эйконалами. Такие эйконалы можно условно называть геометрическим и дифракционным. Эта безразмерная переменная позволяет параметризовать пограничные слои в поперечном направлении инвариантно по отношению к неоднородности среды. В работе [2] показано, что такое точное аналитическое решение двумерного уравнения Гельмгольца с постоянным волновым числом как контурный интеграл Рубиновича может быть представлено в виде специальной функции от двух безразмерных биейкональных переменных, которые выражаются через сумму и разность геометрического и дифракционного эйконалов.

В нашей работе получено параксиальное разделение биейкональных переменных в двумерном уравнении Гельмгольца с гладким переменным волновым числом. Показано, что биейкональные координаты в локальной окрестности любой точки соответствуют эллиптическим координатам уравнения Гельмгольца с постоянным волновым числом, “замороженным” в этой точке.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Klem-Musatov K., Aizenberg A., Pajchel J., Helle H. B.** Edge and tip diffractions: theory and applications in seismic prospecting. SEG, 2008. Geophysical monograph series, N 14.
2. **Aizenberg A. M.** A system of irregular fundamental solutions to wave equation in a 3-D inhomogeneous medium // Russian geology and geophysics. 1993. V. 34, N 4. P. 105–113.

## AVERAGING OF MAXWELL'S EQUATIONS WITH MULTISCALE ISOTROPIC RANDOM CONDUCTIVITY AND PERMITTIVITY

Soboleva O. N., Kurochkina E. P.

<sup>1</sup>*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Lavrentieva, 6, Novosibirsk, 630090 Russia;  
olga@nmsf.ssc.ru*

<sup>2</sup>*Institute of Thermophysics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Kutateladze, 1, Novosibirsk, 630090 Russia;  
Kurochkina@itp.nsc.ru*

Wave propagation in complex media is a problem of great interest in electromagnetics. In order to compute the electromagnetic fields in an arbitrary medium, it is required to solve numerically Maxwell's equations for given coefficients. The large-scale medium heterogeneities as compared to a wavelength are taken into account in these models with the help of some boundary conditions. The problems for a complex medium require high computational costs due to variations of coefficients on all the scales. In addition, the spatial distributions of small-scale heterogeneities are not exactly known. It has been experimentally shown that the irregularity of electric conductivity and permittivity increases as the scale of measurement decreases. It is customary to assume these parameters to be random fields characterized by the joint probability distribution functions. The small-scale heterogeneities are taken into account by the effective parameters. Simple equations are found on the scales that can be numerically resolved. The solution to these equations must be close to the averaged solution of the problem with all scales. This is a well-known procedure of subgrid modeling, homogenization, coarse grids. To apply the above-mentioned methods, we need a “scale regular” medium. It has been experimentally shown that many natural media are “scale regular”, in the sense that their parameters, for example, permeability, porosity, density, electric conductivity can be described by fractals and multiplicative cascades [1, 2].

In the present paper, the electric conductivity and permittivity are approximated by a multiplicative continuous cascade. We obtain formulas of effective coefficients in the Maxwell's equations when the following condition  $\sigma(\mathbf{x})/(\omega\varepsilon(\mathbf{x})) \ll 1$  is satisfied, where  $\sigma$  is the electric conductivity;  $\omega$  is the cyclic frequency;  $\varepsilon(\mathbf{x})$  is the permittivity;  $\mathbf{x}$  is the vector of spatial coordinates.

The first author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 11-01-00641a.

### REFERENCES

1. Bekele A., Wolcott M. J. // *Terramechanics*. 2005. V. 42, N 339.
2. Biswal B., Manwart C., Hilfer R. // *Physica A*. 1998. V. 255, N. 221.

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ДИСТАНЦИОННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ И ПОВЕРХНОСТИ  
ЗЕМЛИ МЕТОДАМИ ГИПЕРСПЕКТРОМЕТРИИ  
И ПОЛЯРИМЕТРИИ**

Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Максакова С. В.

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,  
пл. Миусская, 4, Москва, 125047 Россия; tamaras@keldysh.ru*

Обсуждается информационно-математический аспект аэрокосмического экологического мониторинга Земли, а именно: фундаментальные основы решения прямых и обратных задач теории переноса излучения в природных средах с гиперспектральным разрешением и учетом поляризации на основе математического моделирования и супервычислений с массовым параллелизмом. Это долгосрочная стратегия в области международной космической деятельности и “computer science”. Основная фундаментальная проблема связана с развитием нового научного, технологического и технического направления в развитии современного дистанционного зондирования с широкой сферой приложений в разных областях знаний, разработкой методов и средств для экспертизы, прогнозирования и критериев оценки опасности процессов, обусловленных глобальными изменениями климата, биосферы, экологии и последствиями катастрофических явлений, заменой натуральных испытаний вычислительным экспериментом и имитационным моделированием. В перспективе экологическая и технологическая безопасность не только в масштабах России, но и всей планеты переходит в разряд стратегических и важнейших социально-экономических факторов, а математические модели становятся эффективным инструментом исследований и решения научных и практических задач.

Современные фундаментальные междисциплинарные исследования в высокотехнологичной области аэрокосмического дистанционного зондирования Земли и объектов природно-техногенной сферы объединяют теоретическую и прикладную математику, теорию информатики и информационные технологии, физику взаимодействия излучения с веществом и молекулярную спектроскопию, науки о Земле и биосфере и нанотехнологии.

Прежде чем обрабатывать и интерпретировать данные спутниковых измерений, полученные с помощью оптико-электронных, спектровидеополариметрических, многоугловых и гиперспектральных систем наблюдений, необходимо проводить предварительный анализ на основе “сценарного” подхода с помощью комплексного математического моделирования радиационного поля Земли с высоким спектральным разрешением во всем диапазоне солнечного коротковолнового (ультрафиолет (УФ), видимый, ближний инфракрасный (ИК)) и собственного длинноволнового (инфракрасный, миллиметровые волны (ММВ)) излучения с учетом многократного рассеяния, поглощения, поляризации и рефракции и последних достижений в молекулярной спектроскопии атмосферных газов, аэрозолей, примесей и загрязнений атмосферы, облаков и земной поверхности (суша, океан) с целью обеспечения теоретико-расчетных исследований процессов переноса электромагнитного излучения (фотонов) в гетерогенных природных средах и формирования спектральных радиационных характеристик системы “атмосфера — земная поверхность (суша, океан)” в рамках кинетической теории переноса на базе общих краевых задач для скалярного и векторного интегро-дифференциального уравнения переноса — линеаризованного приближения уравнения Больцмана с бинарными столкновениями [1].

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 11-01-00021, 12-01-00009, 11-07-12006-офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сушкевич Т. А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Ухинов С. А.<sup>1,2</sup>, Чимаева А. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
sau@osmf.sscs.ru, asc@osmf.sscs.ru*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия*

В атмосферной оптике рассматривается задача восстановления матрицы аэрозольного рассеяния атмосферы по наземным наблюдениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца, то есть в различных направлениях, составляющих с зенитом тот же угол, что и направление на Солнце. Для оценки индикатрисы рассеяния (первой компоненты матрицы рассеяния) построено несколько итерационных алгоритмов [1], в которых с помощью математического моделирования методом Монте-Карло [2] последовательно уточняются значения индикатрисы на основании информации об угловом распределении интенсивности излучения на подстилающей поверхности и предположения, что доля однократно рассеянного излучения достаточно велика. Поляризация излучения молекулами воздуха учитывается при этом полностью. В [3] предложены модификации построенных методов для задачи восстановления второй компоненты матрицы рассеяния по наблюдениям поляризационных характеристик проходящего в альмукантарате излучения.

В данной работе проводится исследование влияния погрешности данных наблюдений на восстановление компонент матрицы рассеяния.

Работа первого автора частично поддержана РФФИ (грант 12-01-0034), работа второго автора частично поддержана РФФИ (грант 12-01-0034, 12-01-00727).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Chimaeva A. S., Mikhailov G. A., Ukhiniov S. A. Monte-Carlo algorithms for reconstruction of the scattering indicatrix adjusted for polarization // Russian J. Numerical Analysis Math. Modelling. 2009. V. 24, N 5. P. 455–465.
2. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976 [Springer-Verlag, 1980].
3. Ухинов С. А., Чимаева А. С. Определение второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния по наземным наблюдениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца методом Монте-Карло / Сб. материалов междунар. конф. “Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения”, 4-7 июля 2011, Красноярск. С. 111–115.

## LINE-BY-LINE МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Фомин Б. А.<sup>1</sup>, Фалалеева В. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Главная аэрологическая обсерватория,  
ул. Первомайская, 3, Долгопрудный, 141700 Россия;  
b.fomin@mail.ru

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт,  
пер. Институтский, 9, Долгопрудный, 141700 Россия;  
victory@phystech.edu

Представлена спектральная математическая модель для моделирования переноса излучения в 1-D неоднородных атмосферах. Модель основана на спектральном методе Line-by-Line и методе Монте-Карло для строгого рассмотрения как селективного газового поглощения, так и молекулярного рассеяния и рассеяния макрочастицами солнечной и тепловой радиации. Эта модель также принимает во внимание эффекты поляризации. Рассмотрено применение этой модели в дистанционном зондировании Земли и атмосферы, а также как компьютерный код для валидации компьютерных кодов переноса излучения, используемых в Моделях Мирового климата (GCMs).

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 11-01-00021, 12-01-00009).

## СОВМЕЩЕННЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ В РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Хайретдинов М. С.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН;  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
marat@opg.sscs.ru*

Одна из основных задач мониторинга разного типа сейсмических событий связана с восстановлением их параметров с повышенной точностью в очаге по данным регистрации сейсмических сигналов с помощью сети сейсмических станций либо малой сейсмической группы. Задача оценивания неизвестных параметров источника сводится к решению нелинейной системы условных уравнений [1]:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\eta}(X, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

где  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$  — вектор времен пробега сейсмических сигналов,  $\boldsymbol{\eta}(X, \boldsymbol{\theta})$  —  $N$ -мерный вектор вычисляемых времен пробега (теоретический годограф) или функция регрессии,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$  — вектор невязок,  $\boldsymbol{\theta} = (x, y, z, v, t)^T$  —  $m$ -мерный вектор оцениваемых параметров,  $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$  — матрица координат датчиков (или точек излучения),  $N$  — число датчиков (или точек излучения). В качестве оцениваемых параметров выступают пространственные координаты источника —  $x, y, z$ , скоростная характеристика среды  $v$  и время в источнике  $t$ . В ряде случаев скорость в среде является известной. При оценивании параметров пользуются сведениями о распределении ошибок  $\varepsilon_i = t_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) - \eta(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ . Решение уравнения (1) сводится к решению обратной задачи. При этом точность решения зависит, в первую очередь, от ошибок оценивания вектора времен  $\mathbf{t}$ , скорости  $v$ , шумов измерения  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , выбора геометрии расстановки датчиков на дневной поверхности Земли. По отношению к сейсмическим волнам, описываемым импульсными сигналами, ошибки оценивания времен могут быть вычислены в виде:

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_{im}}{2\Delta f(2E/N_0)}. \quad (2)$$

Здесь  $\tau_{im}$  — длительность волнового импульса,  $\Delta f$  — ширина его спектра,  $E/N_0$  — отношение энергии импульса к спектральной плотности внешнего шума. Как следует из (3) уменьшение погрешности можно достичь за счет увеличения соотношения энергий сигнала и шума, расширения спектра частот  $\Delta f$ , занимаемого импульсом, а также за счет сжатия волнового импульса во времени путем приведения его к  $\delta$ -образному импульсу. С учетом (2) решение задачи (1) с повышенной точностью возможно на основе совмещения алгоритмов помехоустойчивого измерения параметров сейсмических волн и оценивания параметров источника. В докладе рассматриваются алгоритмы решения.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 10-07-00387, 12-01-00773).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Khairtdinov M. S., Omelchenko O. K., et al. A computing technology to determine the parameters of the borehole bottom and medium // Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. Geoph. 2005. Iss. 10. P. 19–26.



# АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

**Шимелевич М. И., Оборнев Е. А.**

*Российский государственный геологоразведочный университет,  
ул. Миклуто-Маклая, 23, Москва, 117997 Россия;  
shimelevich-m@yandex.ru, eugenyo@mail*

Обратная задача геоэлектрики в заданном классе параметризованных геоэлектрических сред на практике сводится к решению операторного уравнения I рода относительно вектора  $s = (s_1, \dots, s_N)$  параметров среды вида:

$$A_N s = e, \quad s \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad e \in \mathbb{R}^M, \quad (1)$$

где  $A_N$  — непрерывный нелинейный оператор прямой задачи, свойства которого зависят от закона  $F_N$  и детальности  $N$  параметризации среды рассматриваемого класса геоэлектрических сред,  $e = (e_1, \dots, e_M)$  — вектор исходных данных, определенных с некоторой погрешностью  $\delta$ ,  $S$  — замкнутое ограниченное множество априорных ограничений вида:  $s_n^{\min} \leq s_n \leq s_n^{\max}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . В работе рассматриваются методы построения эффективно параметризованных сред, для которых расчетные оценки значений модуля непрерывности обратного оператора  $\beta_N^a(\delta)$  на определенных подмножествах  $S^a \subseteq S$  не превышают заданной величины  $\varepsilon_0(\delta)$  [1]. Приближенное решение задачи (1) ищется в виде заданной функции (нейросети) от  $e_1, \dots, e_M$  [2]:  $\tilde{s}_n \approx \sum_{l=1}^L v_{nl} g\left(\sum_{m=1}^M w_{lm} e_m\right)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , где  $g$  — заданная монотонная функция, например,  $g(x) = 1/(1+e^{-x})$ ,  $L$  — параметр, который характеризует сложность нейросети,  $V = \{v_{nl}\}$ ,  $W = \{w_{lm}\}$  — матрицы свободных (настраиваемых) коэффициентов нейросети. Для определения свободных коэффициентов решается оптимизационная задача обучения нейросети методом обратного распространения ошибки [2]. Теоретическое обоснование применения нейросетевых конструкций для построения конечномерных отображений опирается на теоремы Колмогорова [3] и Цыбенко [4]. Для найденного приближенного нейросетевого решения задачи (1) вычисляется апостериорная оценка погрешности [5]. В работе представлены примеры построения численных решений 2D и 3D обратных задач МТЗ и расчета их погрешностей для модельных данных в классах эффективно параметризованных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-07-00662) и использовании ресурсов МСЦ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шимелевич М. И., Оборнев Е. А., Оборнев И. Е., Родионов Е. А. Априорные оценки степени практической неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики / Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 39-й сессии Междунар. науч. семинара им. Д. Г. Успенского. Воронеж: Науч. кн., 2012. С. 282–285.
2. Шимелевич М. И., Оборнев Е. А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. 2009. № 12. С. 22–38.
3. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. С. 953–956.
4. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Math. Control, Signals, Systems. 1989. V. 2. P. 303–314.
5. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

## ВЕРИФИКАЦИЯ СТРИМЛЕТНОЙ МОДЕЛИ

Шупикова А. А., Казанский А. В.

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041 Россия; antoninash@inbox.ru*

Цель данной работы заключается в верификации новой скоростной стримлетной модели [1], предназначенной для моделирования струйных течений и вихрей в океане по измерениям скорости. При этом нужно учесть, что такие измерения редки, асинхронны и неполны. Другой проблемой является задача ассимиляции натуральных данных для обеспечения реалистичности: требуется выделять поле скорости крупномасштабных объектов из смеси разномасштабных движений.

Указанные проблемы являются типичной обратной задачей, решение которой характеризуется большой неопределенностью. В последнее время для ее преодоления были предложены так называемые “объектные” модели различных океанических полей, представляющие собой простые нелинейные аналитические функции, из комбинации которых можно получать сложные поля. Примеры таких полей можно найти в [2]. Отметим, что объектные модели описывают только крупномасштабные структуры, автоматически фильтруя мелкомасштабные возмущения, нарушающие устойчивость численных моделей. Поэтому объектные модели весьма перспективны для инициализации и реинициализации современных вихреразрешающих численных моделей.

Одной из разновидностей таких моделей являются скоростные объектные модели, например [2, 3], которые, однако, не обладают достаточной универсальностью: набор используемых в них функций подбирался эмпирически для каждого синоптического объекта отдельно. В отличие от этого, стримлетная модель является универсальной, позволяя описывать объекты, различающиеся механизмом образования, размером и глубиной залегания.

Более того, стримлетная модель имеет ясное физическое обоснование: вихревые линии и линии тока когерентных течений формируют так называемые поверхности Лэмба [1], которые являются изотактическими (равной скорости). Стримлеты содержат осевую линию максимальной скорости, определяющую координаты потока. Поперечное сечение струй и вихрей можно представить в виде наклонного конуса с эллиптическим основанием. Таким образом, поперечное сечение струи описывается небольшим числом параметров, а не функций. Для подгонки этого конуса скорости к данным наблюдений нами используется алгоритм симплексного спуска Нелдера-Мида.

Как показали наши исследования, стримлетная модель одинаково хорошо работает как для струйных течений, так и для вихрей различного происхождения, масштаба и глубины залегания. Еще одним преимуществом модели является то, что с ее помощью можно восстанавливать поле скорости по частичным данным, например, восстанавливать глубинное поле скорости лишь по поверхностным измерениям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00590-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Казанский А. В., Шупикова А. А.** О структуре поля скорости струйных течений и вихрей в океане // Докл. АН. 2010. № 6. С. 808–812.
2. **Gangopadhyay A., Robinson A. R.** Feature-oriented regional modeling of oceanic fronts // Dyn. Atmos. Oceans. 2002. N 36. P. 201–232.
3. **Dengler M., Schott F. A., Eden C., et al.** Break-up of the Atlantic deep western boundary current into eddies at 8 °C // Nature. 2004. N 432, 3134.

# Секция 5

---

## Вычислительные методы в задачах механики

## ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ СТОКСА В ЦИЛИНДРЕ С МАЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Аксенова Е. И.

aksenov@tpprf.ru

При исследовании задач с особенностями в коэффициентах и со спецификой области ставится задача построения схем с такой же скоростью сходимости, как и в регулярном случае. В данном случае она решена для нестационарного уравнения Стокса в цилиндрических координатах в области с малым отверстием, для которого осевая симметрия не предполагается.

В отличие от общепринятого подхода при определении обобщенного решения задачи не требуется принадлежности вектор-функции скорости функциональному пространству соленоидальных функций.

Доказывается теорема существования и единственности обобщенного решения, исследуется его гладкость в зависимости от гладкости исходных данных. Все оценки обобщенного решения являются равномерными по малому параметру — радиусу малого отверстия цилиндра.

Для численного решения задачи построена неявная проекционно-разностная схема на равномерной по каждой переменной сетке. Используемые пространства конечных элементов учитывают особенности решения исходного уравнения. Доказывается выполнение условия устойчивости, известного как условие Ладыженской — Бреци — Бабушки.

При условиях, обеспечивающих существование и единственность обобщенного решения, доказывается однозначная разрешимость и устойчивость построенной схемы. Все оценки для приближенного решения являются равномерными по малому параметру — радиусу малого отверстия цилиндра.

Оценки для обобщенного и приближенного решений, результаты об аппроксимации конечными элементами используются для вывода равномерных по малому радиусу отверстия оценок скорости сходимости для скорости жидкости и давления в различных весовых нормах, включая негативные. При этом требования на исходные данные являются минимальными.

Результаты остаются справедливыми для цилиндра без отверстия и переносятся на неравномерные сетки при ограничении для минимального шага сетки по каждой из переменных.

## ANALYSIS OF INVERSE PROBLEMS FOR THE EQUATIONS OF ANISOTROPIC ACOUSTICS

Alekseev G. V.<sup>1</sup>, Romanov V. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics,  
Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,  
Radio St., 7, Vladovostok 690041, Russia;  
alekseev@iam.dvo.ru*

<sup>2</sup>*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia;  
romanov0511@gmail.com*

In this paper the coefficient inverse problems are considered for the model of anisotropic acoustics which described by the following equations

$$\nabla p = i\omega\rho_0\tilde{\rho}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad i\omega p = \lambda_0\lambda(\mathbf{x})\operatorname{div}\mathbf{v}. \quad (1)$$

Here  $p$  is a scalar pressure,  $\mathbf{v}$  is the vector fluid velocity,  $\lambda$  is the inhomogeneous fluid bulk modulus relative to  $\lambda_0$ ,  $\rho$  is an inhomogeneous generalized fluid mass density tensor relative to  $\rho_0$  and  $\omega$  is angular frequency. We assume that in spherical coordinates  $\tilde{\rho}$  is the diagonal tensor,  $\tilde{\rho} = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_2)$ , where  $\rho_1$  and  $\rho_2$  are corresponding mass densities. In this case the equations (1) can be reduced to the following equation for  $p$ :

$$Lp \equiv \rho_2(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\rho_1(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\varphi}p + \frac{r^2\rho_2(r)}{\lambda(r)}k_0^2p = 0. \quad (2)$$

Here  $\Delta_{\theta,\varphi}$  is the Beltrami–Laplace operator in spherical coordinates and  $k_0 = \omega\sqrt{\rho_0/\lambda_0}$  is the wave number. It is assumed that a uniform fluid of isotropic density  $\rho_0$  and bulk modulus  $\lambda_0$  fills the exterior  $\Omega_e = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: r = |\mathbf{x}| < a, r > b\}$  of  $\Omega$ . Equation (2) was used recently in a number of papers (see, e.g., [1, 2]) devoted to constructing so-called cloaking anisotropic shells.

We assume that some of functions  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  and  $\lambda$  are unknown and it is required to find them and the solution of (1) using additional information about a state of the system. For solving this inverse problem we apply the nonlinear optimization techniques. Based on this approach we formulate general control problem for model (1) in which mentioned functions play the role of controls and the minimized cost functional has the form

$$\|p^s - p^d\|_Q^2 = \int_Q |p^s(x) - p^d(x)|^2 dx.$$

Here  $p^d$  is a given field in a domain  $Q \subset \Omega_e$  while  $p^s$  is a scattered field.

The main goal of the paper is to perform an analysis of uniqueness and stability of solutions to respective control problems. First we prove the existence of the solution and derive the optimality system which describes the first-order necessary conditions of extremum. Then based on the optimality system analysis we derive a special inequality for the difference of solutions to the original and perturbed control problems. Using this inequality we establish sufficient conditions for the data which provide uniqueness and stability of optimal solutions.

The first author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 10-01-00219-a and Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

under grant N 12-I-0-03-006. The second author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant N 11-01-00105-a and the Visby Program.

#### REFERENCES

1. **Cummer S. A., Schurig D.** One path to acoustic cloaking // *New J. Phys.* 2007. V. 9, N 45.
2. **Alekseev G. V., Romanov V. G.** On one class of cloaking acoustic shells for the model of anisotropic acoustics // *Sib. J. Industrial Math.* 2011. V. 14, N 2. P. 15–20.

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Алексеев Г. В., Терешко Д. А.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7,  
Владивосток, 690041 Россия; alekseev@iam.dvo.ru*

Целью данного исследования является разработка алгоритмов и численное решение обратных задач для нестационарной модели вязкой теплопроводной жидкости. Указанные задачи связаны с проблемой поиска распределенных и граничных источников тепла, обеспечивающих создание на некотором множестве наблюдений  $Q$  заданного поля температуры  $T_d$ . В ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  рассматривается начально-краевая задача

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\beta T \mathbf{G} \text{ в } \Pi, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Pi, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = g \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = f \text{ в } \Pi, \quad (3)$$

$$T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega, \quad T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N,$$

описывающая процесс распространения тепла в вязкой жидкости в приближении Обербека–Буссинеска. Здесь  $\mathbf{u}$ ,  $p$  и  $T$  — вектор скорости, давление и температура жидкости,  $\nu = \operatorname{const} > 0$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  — объемный коэффициент теплового расширения,  $\mathbf{G}$  — вектор ускорения свободного падения,  $\lambda = \operatorname{const} > 0$  — коэффициент теплопроводности,  $f$  — объемная плотность источников тепла,  $g$ ,  $\psi$  и  $\chi$  — некоторые функции,  $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Pi = \Omega \times (0, t_{\max})$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, t_{\max})$ ,  $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{\max})$ ,  $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{\max})$ .

С математической точки зрения обратная задача нахождения распределенных и граничных источников тепла  $f$  и  $\psi$  либо потока тепла  $\chi$  сводится к задаче условной минимизации функционала качества

$$J(T, f, \psi, \chi) = \int_0^{t_{\max}} \int_Q |T - T_d|^2 d\Omega dt + \mu_1 \int_0^{t_{\max}} \int_\Omega f^2 d\Omega dt$$

$$+ \mu_2 \int_0^{t_{\max}} \int_{\Gamma_D} \psi^2 d\Gamma dt + \mu_3 \int_0^{t_{\max}} \int_{\Gamma_N} \chi^2 d\Gamma dt$$

на слабых решениях исходной начально-краевой задачи. Здесь  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — положительные константы, имеющие смысл параметров регуляризации,  $T_d$  — измеренное либо требуемое на некотором множестве наблюдений  $Q$  поле температуры. На основе методов, разработанных в [1, 2], выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума первого порядка. Предложен численный алгоритм решения указанной системы оптимальности, проведен ряд вычислительных экспериментов для определения зависимости точности решения обратной задачи от значений параметров регуляризации  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  и размера множества наблюдений  $Q$ .

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 10-01-00219-а) и грантом ДВО РАН в рамках программы 17 “Динамические системы и теория управления” фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 12-I-П17-03).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев Г. В., Терешко Д. А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
2. **Алексеев Г. В., Терешко Д. А.** Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1645–1664.



## ОПТИМАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ РЕГУЛЯТОРА

Амирханова Г. А., Махамбетова М. Д., Гречко С. М.,  
Жумалина А. С., Ахметжанов М. А.

*Институт проблем информатики и управления,  
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010 Казахстан; gulshat.aa@gmail.com*

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(v) = J(v_1, \dots, v_l) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^l (w_{si} S_i^2 + w_{vi} v_i^2) dt + \Lambda(\delta(T) S(T)) \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{dt} &= S_i, \\ \frac{dS_i}{dt} &= \frac{1}{H_i} [-D_i S_i - f_i(\delta_i) - N_i(\delta) + v_i], \quad i = 1, \dots, l, \quad t \in [0, T], \\ \delta &= (\delta_1, \dots, \delta_l), \quad S = (S_1, \dots, S_l), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w_{si}$ ,  $w_{vi}$  — положительные постоянные весовые коэффициенты;  $f_i(\delta_i)$  —  $2\pi$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция;  $N_i(\delta)$  —  $2\pi$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция относительно  $\delta_{ij}$ ; относительно слагаемой  $N_i(\delta)$  выполняется условие интегрируемости:

$$\frac{\partial N_i(\delta)}{\partial \delta_k} = \frac{\partial N_k(\delta)}{\partial \delta_i} \quad (i \neq k), \quad (3)$$

где  $T$  — длительность переходного процесса, считается известной.

Заданы начальные условия

$$\delta_i(0) = \delta_{i0}, \quad S_i(0) = S_{i0}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (4)$$

а  $\delta(T)$ ,  $S(T)$  заранее неизвестно.

**Теорема.** Для того, чтобы управление  $v_i^0(S_i) = -s_i/w_{vi}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , и соответствующее решение системы (2)–(4) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы  $\Lambda(\delta(T), S(T)) = K(\delta(T), S(T))$  и  $w_{Si} = 2D_i + 1/w_{vi} > 0$ ,  $i = 1, \dots, l$ , где

$$\begin{aligned} K(\delta, S) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l H_i S_i^2 + \sum_{i=1}^l \int_0^{\delta_i} f_i(\delta_i) d\delta_i \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ \delta_j=0, j>i}}^l \int_0^{\delta_i} N_i(\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \xi_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_l) d\xi_i \end{aligned}$$

— функция Беллмана, причем

$$J(v^0) = \min_v J(v) = K(\delta_0, S_0).$$

Особенностью этих моделей является то, что они относятся к моделям, для которых не удается построить функции Ляпунова в форме первого интеграла и они относятся к классу неконсервативных систем.

## СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ В РАСЧЕТАХ МАТРИЦЫ ПЕРЕНОСА УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Беляев Ю. Н.

*Сыктывкарский государственный университет,  
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Россия;  
ybelayayev@mail.ru*

Волновое поле в упругой среде, слоистой по толщине  $z$ , описывается основным уравнением вида

$$\frac{d}{dz} \Psi(z) = W \Psi(z).$$

Здесь  $\Psi$  — вектор-столбец, элементами которого являются компоненты тензора напряжений и вектора деформаций, а  $W \equiv \|w_{ij}\|$  — *волновая матрица*, порядок  $n$  которой, в зависимости от решаемой задачи, принимает значения от 2 до 6. Волновое поле  $\Psi(z)$  на глубине  $z$  связано с полем на поверхности  $z = 0$  *матрицей переноса*  $T$ , известной также как *матрица распространения* или *матрица рассеяния*:  $\Psi(z) = T \Psi(0)$ .

Матрица переноса однородного слоя, согласно представляемого в данной работе метода, вычисляется по формуле [1]:

$$T = \exp(Wz) = \sum_{l=0}^{n-1} W^l \left( \frac{z^l}{l!} + \sum_{g=0}^l (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g}(W) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{z^j B_{j-1-g}(W)}{j!} \right), \quad (1)$$

где  $\sigma_j(W)$  — элементарные симметрические многочлены матрицы  $W$  (суммы  $C_n^j$  главных миноров определителя матрицы  $W$ ), а *симметрические многочлены  $n$ -го порядка*  $B_j(W)$  матрицы  $W$  определяются рекуррентными формулами [2]:

$$\begin{aligned} B_j &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2; \quad B_{n-1} = 1; \\ B_j &= \sigma_1 B_{j-1} - \sigma_2 B_{j-2} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_n B_{j-n}, \quad j \geq n. \end{aligned} \quad (2)$$

Нахождение матрицы переноса неоднородного слоя ( $w_{ij} = w_{ij}(z)$ ) выполняется “разбиением” последнего на достаточно большое число  $N$  подслоев так, чтобы в каждом из них можно было считать  $W_i = \text{const}$ ,  $T_i = \exp(W_i z_i)$  и  $T = T_N T_{N-1} \dots T_1$ .

Матрица переноса  $T$  слоисто-периодической структуры, состоящей из  $N$  слоев ( $N > n$ ), каждому из которых соответствует матрица переноса  $T$ , равна

$$T = T^N = \sum_{l=0}^{n-1} T^l \sum_{g=0}^l (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g}(T) B_{j-1-g}(T), \quad (3)$$

где  $\sigma_j(T)$  и  $B_k(T)$  — симметрические многочлены матрицы  $T$ .

Для матриц 2–4 порядка по формулам (1)–(3) получены аналитические решения для матрицы переноса однородного слоя [1] и слоисто-периодической структуры [3]. Дано сравнение метода симметрических многочленов с другими подходами к решению рассмотренных задач. Основные преимущества алгоритма (1)–(3) по сравнению с методом Лагранжа — Сильвестра обусловлены тем, что первый подход не требует вычисления собственных значений матриц.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (ГК № 02.740.11.0618).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беляев Ю. Н.** Матричный подход теории волн к слоистым средам. Saarbrücken: LAP, 2012.
2. **Беляев Ю. Н.** Векторный и тензорный анализ // Сыктывкар: Сыктывкарский университет, 2010.
3. **Беляев Ю. Н.** Матричный метод расчета перерасеяния волн в периодической структуре // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 142–148.

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

**Бризицкий Р. В.**

*Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток,  
690041 Россия; mlnwizard@mail.ru*

В настоящей работе исследуется разрешимость и устойчивость решений двух-параметрических экстремальных задач мультипликативного граничного управления для гармонических по времени уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

рассматриваемых в ограниченной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_I$ , при следующих граничных условиях:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma_D, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} + i\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma_I. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженностей электрического и магнитного полей,  $\mathbf{J}$  — заданная плотность электрических токов,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — постоянные электрическая и магнитная проницаемости,  $\omega$  — круговая частота,  $i$  — мнимая единица,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ ,  $\mathbf{k}$  — заданная на участке  $\Gamma_D$  функция,  $\alpha$  и  $\mathbf{h}$  — заданные на другом участке  $\Gamma_I$  границы  $\Gamma$  функции,  $\alpha$  — функция поверхностного импеданса участка  $\Gamma_I$ .

Первое условие в (2), заданное на части  $\Gamma_D$  границы  $\Gamma$ , хорошо известно в литературе. В частности, при  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , оно означает идеальную проводимость участка  $\Gamma_D$ . Граничное условие на участке  $\Gamma_I$  при  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  называют импедансным граничным условием. Физически оно отвечает ситуации, когда участок  $\Gamma_I$  идеально проводящей границы покрыт тонким слоем сильно поглощающего материала, например, с целью маскировки объекта.

На основе метода, разработанного в [1, 2], доказываемся разрешимость краевой задачи и задачи управления для уравнений (1). Роль управлений играют граничные функции  $\alpha$  и  $\mathbf{h}$ . Выводится система оптимальности, на основе ее анализа устанавливаются условия на исходные данные, обеспечивающие устойчивость решений конкретных экстремальных задач относительно малых возмущений как функционала качества, так и функций  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{k}$ . Выводятся оценки локальной устойчивости.

Полученные результаты по задачам граничного управления могут быть использованы для исследования проблемы однозначного определения характеристик препятствия по отраженной электромагнитной волне. Указанные обратные задачи рассеяния известны, например, по работам [3, 4].

Работа частично поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00219-а), Советом по грантам Президента РФ (МК-3311.2011.1) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (№ 16.740.11.0565).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бризицкий Р. В., Савенкова А. С.** Обратные экстремальные задачи для уравнений Максвелла // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2010. Т. 50, № 6. С. 1038–1046.
2. **Алексеев Г. В., Бризицкий Р. В.** Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла // Сиб. журн инд. мат. 2011. Т. 14, № 1. С. 3–16.
3. **Sakoni F., Colton D.** The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data // SIAM. J. Appl. Math. 2004. V. 64. P. 709–723.
4. **Sakoni F., Colton D., Monk P.** The electromagnetic inverse scattering problem for partially coated Lipschitz domains // Proc. Royal Soc. Edinburg. 2004. V. 134. P. 661–682.

## ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД В РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАГРУЗКИ ПРИЛОЖЕННОЙ К СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКЕ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Бурнышева Т. В., Штейнбрехер О. А.

*Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного  
университета, ул. Циолковского, 23, Новокузнецк, 654041 Россия;  
tburn@mail.ru, olga\_sht@mail.ru*

При проведении натуральных экспериментов составляется схема приложения нагрузки, однако не всегда приложенная нагрузка идентична данной схеме в силу масштабности моделей, неточности оборудования и человеческого фактора. Таким образом, возникает задача уточнения приложенной нагрузки по данным натурального эксперимента.

Рассмотрим оболочечную конструкцию сложной структуры состоящей из двух частей: нижней композитной сетчатой оболочки [1] и верхнего алюминиевого стрингерного отсека. Для расчета напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции используется метод конечных элементов [2]. Подробно дискретизация данной модели рассмотрена в работе [3].

Для идентификации нагрузки представим распределение в виде линейной комбинации

$$R = F + F \sin(\alpha) + F \cos(\alpha). \quad (1)$$

В качестве значений линейной функции используются результаты численного расчета, выполненные в ППП “Композит-НК” [4]. Таким образом, функционал для решения задачи минимизации будет иметь вид разницы между значениями натурального эксперимента и искомой линейной комбинацией.

В итоге, с помощью ППП “Композит-НК” была решена обратная задача по определению приложенной нагрузки по данным натурального эксперимента. Кроме того, методами вычислительного эксперимента было оценено влияние толщин обшивок композитного и стрингерного отсеков и влияние потери устойчивости люков.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев В. В., Никитин М. В., Разин А. Ф.** Исследование влияния формы ячейки на напряженное состояние композитной сетчатой конструкции при локальном нагружении // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. 2008. Вып. 1/2.
2. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
3. **Штейнбрехер О. А., Бурнышева Т. В.** Расчет напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции сложной структуры пакетом программ “Композит-НК” // Материалы XVII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным средствам (ВМСППС’2011), 25–31 мая 2011 г., Алушта. С. 175–176.
4. **Бурнышева Т. В., Каледин В. О., Равковская И. В., Эптешева С. В.** Развитие пакета программ математического моделирования сопряженных задач механики неоднородных конструкций // Вестник Кемеровского государственного университета. 2010. Т. 1. С. 3–8.

## EIGENVALUE SOLVER BASED ON AN INTEGRAL EQUATION FORMULATION

Clayer M.<sup>1</sup>, Fares M.<sup>1</sup>, Peron V.<sup>2</sup>, Tordeux S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Algo-EMA team, CERFACS, 42 Avenue Gaspard Coriolis, 31100 Toulouse;*  
fares@cerfacs.fr

<sup>2</sup>*Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest et LMA - UMR CNRS 5142,*  
*Université de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue de l'Université,*  
*BP 1155 64013 PAU CEDEX, France;*  
sebastien.tordeux@inria.fr

Let  $\Omega$  be a three dimensional domain with Lipschitz boundary  $\Gamma$ . The Dirichlet-Laplacian eigenvalue problem

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ and } \lambda > 0 \text{ such that } \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1)$$

can be rewritten in terms of a non linear eigenvalue problem posed on the boundary  $\Gamma$  with  $\lambda = k^2$

$$\text{Find } p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ and } k > 0 \text{ such that } \langle S(k)p, q \rangle = 0 \text{ for all } q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (2)$$

with the single layer operator  $S_k$  given by

$$\langle S(k)p, q \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} p(\mathbf{y})q(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}}. \quad (3)$$

In [1], P. Guillaume proposed a method to compute the closest eigenvalue  $\lambda$  to a given  $k_0^2$  which exploits the analyticity of the operator  $S(k)$ : The solution  $p(k) \in H^{-1/2}(\Gamma)$  of the problem  $S(k)p(k) = f$  parametrized by  $k$  can be expanded in the neighborhood of  $k_0$  in the form

$$p(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{p_m}{m!} (k - k_0)^m \quad \text{with } p_m = \frac{d^m p(k_0)}{dk^m}. \quad (4)$$

The convergence radius  $R$  allows to locate the eigenvalue  $\lambda$  since it is either given by

$$R = |\sqrt{\lambda} - k_0| \quad \text{or by} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}. \quad (5)$$

where the functions  $p_m \in H^{-1/2}(\Gamma)$  solve the well-posed problems

$$S_0 p_0 = f \quad \text{and} \quad S_0 p_n = - \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} S_{n-m} p_m \quad (6)$$

with  $S_m = \frac{d^m S(k)}{dk^m}(k_0)$  the successive derivatives of  $S(k)$  at  $k_0$

$$\langle S_m p, q \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \int_\Gamma (i\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)^m \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} p(\mathbf{y})q(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} \quad (7)$$

In this talk, an implementation of this algorithm will be discussed. The Neumann eigenvalue problem will be as well presented.

### REFERENCES

1. Nonlinear eigenproblems // SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 1999. V. 20, N 3. P. 575–595.

## ДИСКРЕТНЫЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Васильев А. В.<sup>1</sup>, Васильев В. Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Белгородский государственный университет, ул. Студенческая, 14,  
Белгород, 308015 Россия; alexvassel@gmail.com*

<sup>2</sup>*Липецкий государственный технический университет, ул. Московская, 30,  
Липецк, 398600 Россия; vbv57@inbox.ru*

Мы рассматриваем многомерный сингулярный интеграл [1]

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}_+^m} K(x, x-y)u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^m, \quad (1)$$

с дифференцируемой характеристикой  $f(x, \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\theta \in S^{m-1}$ , и его дискретный аналог

$$v_h(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in Z_{h,+}^m} K_h(\tilde{x}, \tilde{x} - \tilde{y})u_h(\tilde{y})h^m, \quad \tilde{x} \in Z_{h,+}^m, \quad (2)$$

где  $\mathbb{R}_+^m$  — полупространство  $\{x \in \mathbb{R}^m: x = (x_1, \dots, x_m), x_m > 0\}$ ,  $Z_h^m$  — целочисленная (mod  $h$ ) решетка в  $\mathbb{R}^m$ ,  $Z_{h,+}^m = Z_h^m \cap \mathbb{R}_+^m$ , сходимость ряда (2) понимается как предел частичных сумм по кубам  $Q_N = \{x \in \mathbb{R}^m: \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| \leq N\}$

$$v_h(\tilde{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\tilde{y} \in Z_{h,+}^m \cap Q_N} K_h(\tilde{x}, \tilde{x} - \tilde{y})u_h(\tilde{y})h^m,$$

где  $K_h(\tilde{x}, \tilde{x} - \tilde{y})$  — значения ядра  $K(x, x-y)$  в точках решетки  $Z_h^m$ ,  $K(x, 0) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^m$ .

Если  $u_h(x)$  из пространства Гёльдера с весом  $H_\beta^\alpha(\mathbb{R}^m)$ ,  $\alpha$  — показатель Гёльдера,  $0 < \alpha < 1$ ,  $(1 + |x|)^\beta$  — вес [2],  $m < \beta - \alpha < m + 1$ , то можно оценить разность между  $v(\tilde{x})$  и  $v_h(\tilde{x})$ , если  $u_h(\tilde{y})$  — значения  $u(y)$  на  $Z_h^m$ .

**Теорема.** *Имеет место оценка*

$$|v(\tilde{x}) - v_h(\tilde{x})| \leq ch^{\tilde{\alpha}}, \quad 0 < \tilde{\alpha} < \alpha < 1.$$

Такие оценки по мнению авторов должны оказать существенную помощь при исследовании сходимости приближенных решений для многомерных сингулярных интегральных уравнений, содержащих интегралы (1). Некоторые результаты о разрешимости уравнений с дискретными сингулярными интегралами получены авторами ранее [3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mikhlin S. G., Prössdorf S.** Singular integral operators. Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
2. **Абдуллаев С. К.** Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гёльдера с весом // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 4. С. 777–779.
3. **Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.** On some discrete equations in a half-space // 7th Vienna conf. on Mathematical Modelling, February 15-17, 2012 / Eds. I. Troch, F. Breitenecker. Vienna University of Technology, 2012. Full Paper Preprint Volume. ARGESIM Report N S38.

## РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ МЕТОДОМ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Вихтенко Э. М., Намм Р. В.

*Тихоокеанский государственный университет,  
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035 Россия;  
vikht@mail.khstu.ru, namm@mail.khstu.ru*

Контактные задачи часто возникают в механике твердых тел и представляют большой интерес как для специалистов, занимающихся теоретическими исследованиями этих задач, так и для прикладников, интересующихся внедрением полученных научных результатов в инженерные приложения. Современные постановки контактных задач в теории упругости содержат в себе одностороннее условие непроникания на нормальное в области контакта перемещение и условие кулоновского трения на тангенциальное перемещение. Отметим также, что согласно закону Кулона, сила трения сама зависит от искомого решения. Учет перечисленных факторов приводит нас к квазивариационному неравенству Синьорини [1, 2]. Хорошо известный для специалистов метод последовательных приближений [1, 2] для решения квазивариационного неравенства Синьорини основывается на итерационном процессе, на каждом шаге которого, в свою очередь, решается вспомогательная задача с заданным трением. Для решения вспомогательной задачи разумно привлекать методы двойственности, позволяющие наряду с решением исходной задачи определять и решение двойственной задачи, которое, фактически, и задает силу трения на следующем итерационном шаге метода последовательных приближений. Известно [3], что схемы двойственности, основанные на классических функционалах Лагранжа, применимы только в коэрцитивных задачах. Но и в этих задачах сходимость процесса обеспечивается только при согласовании длины шага сдвига по двойственной переменной с константой коэрцитивности (сильной выпуклости) минимизируемого функционала. Для преодоления этих неудобств авторами в [4] и других работах исследованы схемы двойственности, основанные на модифицированных функционалах Лагранжа, показана сходимость методов при соответствующей регулярности решений вспомогательных задач. В указанных работах на каждом шаге метода последовательных приближений для нахождения тангенциального перемещения в области контакта применялись подходы и методы негладкой оптимизации. В данной работе исследуется новый метод двойственности, позволяющий для определения тангенциального перемещения применять методы дифференцируемой оптимизации.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-0001).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.** Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.
2. **Kikuchi N., Oden T.** Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. Philadelphia: SIAM, 1988.
3. **Glowinski R.** Numerical methods for nonlinear variational problems. New York: Springer, 1984.
4. **Namm R. V., Vikhtenko E. M.** Modified lagrangian functional for solving the Signorini problem with friction // Advances in Mechanics Research. New-York: Nova Science Publishers, 2010. V. 1. P. 435–446.



## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Захаров Ю. Н., Иванов К. С.

*Кемеровский государственный университет,  
ул. Красная, 6, Кемерово, 650043 Россия;  
zyn@kemsu.ru, iks@kemsu.ru*

При решении задач о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости во многих случаях используется стационарная постановка исходной дифференциальной системы уравнений Навье — Стокса, и для получения стационарных решений применяются высокоэффективные численные методы [1]. Однако существуют известные парадоксы симметрии вязких течений [2] и численные расчеты некоторых нестационарных задач [3], которые демонстрируют отсутствие стационарного режима течения жидкости при стационарных краевых условиях. Изучение условий возникновения или отсутствия нестационарных решений в конкретных нестационарных задачах является весьма актуальной проблемой: фактически от этого зависит возможность использования стационарных моделей. Трудности таких исследований заключаются в том, что, как известно, нестационарные решения появляются при довольно больших значениях чисел Рейнольдса и на больших интервалах времени, когда режим течения становится близким к турбулентному, и для их обнаружения необходимы эффективные устойчивые численные алгоритмы.

В данной работе численно решается нестационарная двумерная система уравнений Навье — Стокса, записанная как в естественных переменных, так и в переменных “вихрь — функция тока”. Для исходной системы ставятся краевые условия двух типов: стационарные и периодические.

Для численного решения систем линейных алгебраических уравнений в работе реализован итерационный метод неполной аппроксимации с групповой и полной оптимизацией параметров, сходящийся независимо от свойств оператора системы [4]. Метод показал достаточную эффективность при решении разностных аналогов уравнений Пуассона для давления и функции тока.

В случае периодических краевых условий получены устойчивые периодические решения задач. В случае стационарных краевых условий на основании численных экспериментов сделан вывод о том, что для многих нестационарных задач разного типа существует некоторый интервал чисел Рейнольдса ( $Re_1, Re_2$ ) в пределах которого течение на сколь угодно больших промежутках времени не переходит в стационарный режим, и, как правило, имеет периодический характер. При этом в некоторых случаях может наблюдаться отсутствие симметрии движения жидкости при симметричной геометрии области и симметричных краевых условиях. Для  $Re < Re_1$  происходит классическое установление течения. При  $Re > Re_2$  течение становится близким к турбулентному и требует использования других моделей для счета.

Приводятся результаты решения некоторых тестовых задач, полученные с применением различных формулировок исходных дифференциальных уравнений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
2. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Кочевский А. Н.** Расчет внутренних течений жидкости в каналах с помощью программного продукта FlowVision. [http://www.thesis.com.ru/infocenter/downloads/flowvision/fv\\_sgu\\_es04.pdf](http://www.thesis.com.ru/infocenter/downloads/flowvision/fv_sgu_es04.pdf).
4. **Захаров Ю. Н.** Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004.

## ОПТИМАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Калимолдаев М. Н.

*Институт проблем информатики и управления,  
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010 Казахстан; mnk@ipic.kz*

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u) \equiv J(u_1, \dots, u_l) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^l (k_i y_i^2 + r_i u_i^2) dt + \Lambda(x(T), y(T)) \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i, & \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda_i y_i - f_i(x) + b_i u_i, \\ x_i(t_0) &= x_{i0}, & y_i(t_0) &= y_{i0}, \quad i = \overline{1, l}, \quad t \in [t_0, T], \\ x &= (x_1, \dots, x_l), & y &= (y_1, \dots, y_l), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_i \in R_i^1$  — скалярное непрерывное управление;  $f_i(x)$  — непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию интегрируемости

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} \quad (i \neq k); \quad (3)$$

моменты  $t_0, T$  — будем считать известными;  $r_i, \lambda_i, k_i$  — положительные постоянные величины; терминальное слагаемое  $\Lambda(x(T), y(T))$  заранее неизвестно: т. е. рассматривается задача оптимизаций Больца с фиксированным временем и со свободным концом траекторий.

Проблема синтеза для задачи (1)–(3) заключается в построении функции  $u_i = u_i(x, y)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , называемой синтезирующей функцией.

**Теорема.** Для того, чтобы управление  $u_i^0(y_i) = -(b_i/r_i)y_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ , и соответствующее решение системы (2), (3) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы  $\Lambda(x(T), y(T)) = K(x(T), y(T))$  и  $k_i = 2\lambda_i + b_i^2/r_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ , где

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l y_i^2 - \sum_{i=1}^l \int_0^{x_i} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_l) d\xi_i$$

$x_j=0, j>i$

— функция Беллмана, причем

$$J(u^0) = \min_u J(u) = K(x(t_0), y(t_0)).$$

Данный подход применен для исследования оптимальности сложных электро-энергетических систем, которые относятся к динамическим системам с цилиндрическим фазовым пространством.

## К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Коврижных Л. М.

*Новосибирская государственная Академия водного транспорта, Новосибирск,  
630099 Россия; kvmt@nsawt.ru*

Определение собственных частот и форм колебаний, (как крутильных, так и осевых), валопровода судовых энергетических установок (СЭУ) и дискретных много-массовых систем (ДМС) вообще, имеет ключевое значение при решении различных задач и определении некоторых характеристик СЭУ и ДМС. Например, при создании двигателей и СЭУ, для устранения и учета резонансных явлений при их работе, для отыскания колебательных движений при вынужденных колебаниях валопровода СЭУ или ДМС (см. [1]). Исходными данными здесь являются величины масс системы (моментов инерции для крутильных колебаний) и жесткости участков между массами (жесткостей на кручение для крутильных колебаний). По определенной методике вычисляются собственные частоты и соответствующие им формы колебаний [1, 2]. Для системы, состоящей из  $n$  масс, находятся  $n$  собственных частот.

Обратная задача для крутильных колебаний (или осевых для ДМС) заключается в том, что заданы заранее собственные частоты системы (СЭУ или ДМС). Необходимо определить моменты инерции системы при известных коэффициентах жесткостей участков между массами. Другая задача: определить жесткости при известных моментах инерции. И, наконец, 3-я задача: определить некоторые моменты инерции и некоторые жесткости, при известных остальных моментах инерции и коэффициентах жесткостей.

Оказывается, эта задача вполне разрешима при определенных условиях на частоты, и может иметь далеко не единственное решение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний: Учеб. для ВУЗов. М.: Высшая школа, 1980.
2. **Коврижных Л. М.** Расчет собственных частот свободных колебаний дискретных многомассовых систем // Науч. проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. 2008. № 1. С. 167–170.

## УПРАВЛЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Коробицын В. А.

*ТГУ, пр. Ленина, 36, Томск, 634050 Россия; kva635133@mail2000.ru  
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

В современной практике математического моделирования физических процессов сплошных сред, дискретные операторы образующие разностные схемы на косоугольных подвижных сетках, не удовлетворяют тождеству  $\text{ROT GRAD} = 0$ , с дискретным оператором GRAD, входящим в уравнение импульса. Следствием является не выполнение, для численных решений, теорем о сохранении циркуляции, потенциальности и безвихревости течений. Дискретные модели, соблюдающие тождество  $\text{ROT GRAD} = 0$ , будем называть “потенциальными”, или вихре-согласованными. Отметим, что для регулярных прямоугольных равномерных сеток эта проблема не возникает.

Фундаментальная задача определяется как построение вихресогласованных разностных схем на косоугольных 2D сетках. Соотношения дискретного векторного анализа  $\text{ROT GRAD} = 0$ , выполняются для дискретного оператора GRAD в дискретном уравнении импульса и соответствующего по области значения области определения дискретного оператора ROT.

Необходимость создания таких схем следует из гипотезы, что аппроксимационный вихрь оказывает существенное влияние на нефизичное искажение (выворачивание) ячеек лагранжевой расчетной сетки

Основной целью статьи является создание эффективных вихресогласованных численных алгоритмов, наследующих основные свойства аппроксимируемых дифференциальных уравнений в частных производных, и выполняющих дискретное соотношение  $\text{ROT GRAD} = 0$ , как аналога континуального соотношения  $\text{rot grad} = 0$ , для оператора GRAD, в дискретном уравнении импульса. Проверка на тестовых примерах эффективности численных решений нелинейных задач математической физики. Модельные расчеты безвихревых течений.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И МЕТОД РЕШЕНИЯ УСТАНОВИВШЕХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Кудайкулов А. К., Ташенова Ж. М., Жумадиллаева А. К.

*ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова, 5, Астана, 010000 Казахстан;*  
kudaykylov@mail.ru, zhuldyz\_tm@mail.ru, ay182@mail.ru

Несущие элементы современных энергетических установок и двигателей работают в сложном тепловом и силовом поле. При этом некоторые элементы работают при одновременном наличии частичной теплоизоляции, локальных температур, тепловых потоков, теплообменов, а также внутренних точечных источников тепла. Эти элементы изготавливаются из специальных жаропрочных материалов, в которых коэффициент теплового расширения и модуль упругости будет зависеть от температуры. Это зависимость для каждого материала определяется экспериментально. Учет зависимости коэффициента теплового расширения и модуля упругости от температуры приводит к формулировке установившихся нелинейных задач термоупругости. Для решения таких задач сначала необходимо решать задачу установившихся теплопроводности для рассматриваемого несущего элемента конструкций с учетом одновременного наличия поверхностных теплоизоляций, локальных температур, тепловых потоков и внутренних точечных источников тепла. Но точное решение этой задачи с учетом разнородных граничных и внутренних условий невозможно. Поэтому эту часть задачи можно решать численно с высокой точностью, если применим закон сохранения энергии. Для этого построим функционал тепловой энергии исследуемого несущего элемента с учетом одновременного наличия разнородных источников тепла [1]. Далее, минимизируя этот функционал по узловым значениям температур, строится основная разрешающая система линейных алгебраических уравнений. Решая последнюю, находим закон распределения температуры в исследуемом несущем элементе. После чего пользуясь результатами экспериментных данных по установлению зависимости коэффициента теплового расширения и модуля упругости от температуры для материала, построим соответствующие функциональные зависимости. На втором этапе строится функционал потенциальной энергии упругих деформации исследуемого несущего элемента с учетом распределения температур, значений коэффициента теплового расширения и модуля упругости [2]. Далее, минимизируя функционал по узловым значениям перемещений строим разрешающую систему линейных алгебраических уравнений. Решая последнюю, определяем поле перемещений, деформаций и напряжений. Здесь следует отметить, что вследствие применения законов сохранения энергии полученные численные решения будут отличаться высокой точностью, а для многих тестовых задач они совпадают с соответствующими точными решениями.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Математическое** (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструкционных элементах: Учеб. пособие / Под ред. Кудайкулова А. К. и др. Туркестан, 2009.
2. **Кудайкулов А. К., Кенжегулов Б. З., Мырзашева А. Н.** Математическая модель установившегося поля распределения температуры по длине стержня, ограниченной длины при наличии локальной температуры, теплового потока, теплообмена и теплоизоляции // Наука и новые технологии. Бишкек. 2009. N 5. С. 17–21.

**NUMERICAL SOLUTION FOR  
THE ANALYSIS OF STEADY FLOW  
OF POWER-LAW MHD FLUID**

**Kumar S.<sup>1</sup>, Singh C.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Basic Science, Khandari Campus, Agra, India*

<sup>2</sup>*Government Degree College, Mant (Mathura), India*

Different type of non-Newtonian fluid exists in the nature but the simplest and most useful type is the power-law fluid, with the two parameters. Therefore, in this chapter we are trying to consider a problem of steady flow of power law MHD fluid in the boundary layer equation. A steady laminar flow of a non-Newtonian electrically conducting and incompressible viscous fluid on a flat plate is considered. The main object of this work is to obtain a numerical solution of the boundary layer equation using Karman-Pohlhausen's method for magneto hydrodynamic flow of power-law fluid. The analysis for the flow near the stagnation point is obtained, and we observed the effect of magnetic field on the boundary layer thickness, the velocity and the shear stress on the plate.

**REAL TIME TSUNAMI DATA INVERSION****Lavrentiev M. M., Jr.<sup>1</sup>, Romanenko A. A.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,  
prosp. Acad. Koptug, 4, Novosibirsk, 630090, Russia;  
mmlavr@yahoo.com*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University, 2, Pirogov st., Novosibirsk 630090, Russia;  
romanenko.alexey@gmail.com*

Friday, March 11, 2011 at 05:46:23 UTC Japan was struck by a magnitude 8.9 earthquake off its northeastern coast. This is one of the largest earthquakes that Japan has ever experienced. Tsunami waves swept away houses and cars in northern Japan and pushed ships aground. The tsunami waves traveled far inland, the wave of debris racing across the farmland, carrying boats and houses with it. Giant fireballs rise from a burning oil refinery in Ichihara, Chiba Prefecture. Tsunami triggered accident at Fukushima-1 nuclear power station is still far from breakdown elimination. Globally, this is the 5th largest earthquake since 1900.

This shows that, in spite of amazing progress in technology, mankind is still not protected against such natural hazards as tsunami waves. In case of Japan coastal line it takes only about 20 minutes for the wave to approach the nearest shore locations.

Question arises whether it is possible to provide a reliable prediction of tsunami wave parameters timely to perform protection measures and save lives. We propose several improvements to the existing data inversion and processing algorithms which can reduce dramatically the time required for the analysis.

One of the reasons of inaccurate predictions of tsunami parameters is that very little information about the initial disturbance of the sea bed at tsunami source is available. In this paper, we suggest a way to improve the quality of tsunami source parameters prediction. To have more stable results, we suggest a direct solution of inverse problem of source parameters identification in 1D (in space) hyperbolic equation (shallow water approximation) along the wave ray from source to DART buoy. As recently discovered, uniqueness theorems are available for such inverse problems.

Currently the direct deep ocean tsunami wave measurements are available through the system of so-called DART buoys. The DART II system consists of a seafloor bottom pressure recording (BPR) sensors capable of detecting tsunamis as small as 1 cm, and a moored surface buoy for real-time satellite communications.

A software application to optimize location of DART sensors system according to wave traveling time criteria exists [1]. Numerical tests show that after proper positioning of only 4 buoys the tsunami wave could be detected in less than 10 minutes by the quake.

MOST (Method of Splitting Tsunami) [2] is among the widely used software packages for tsunami simulation, which include stages of wave generation, trans-oceanic propagation, and inundation at dry land. It has been adopted by the USA National Ocean and Atmosphere Administration as the basic tool to calculate tsunami wave propagation and evaluation of inundation parameters. By code optimization with the help of Tesla C2050 graphic processing unit we accelerate execution of the basic part of MOST by more than 150 times. Now, it takes about 1 minute to calculate wave propagation over  $2000 \times 2000$  kilometers area with  $1'$  mesh.

Summing up, we conclude that the calculation of tsunami wave parameters over rather large aquatoria is thechnologically possible within about 15 minutes after the earthquake.

#### REFERENCES

1. **Astrakova A. S., Bannikov D. V., Lavrentiev M. M. Jr., Cherny S. G.** Application of genetic algorithm to sensors optimization problem // Computational Technologies. 2009. V. 14, N 5. P. 3–17.
2. **Titov V. V., Synolakis C. E.** Numerical modeling of tidal wave runup // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 1998. V. 124, N 4. P. 157–171.



## BOUNDARY INTEGRAL SIMULATIONS OF DEFORMATION OF VISCOUS AND VISCOPLASTIC DROPS IN LINEAR FLOW

Lavrenteva O. M.<sup>1</sup>, Smagin I.<sup>1</sup>, Zabaranin M.<sup>2</sup>, Nir A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*

<sup>2</sup>*Stevens Institute of Technology, Hoboken, USA; ceolga@techunix.technion.ac.il*

The slow dynamic deformation of viscous and viscoplastic drops uni- and biaxial extensional flow is simulated making use of a variation of integral equation method BI presentation previously employed in [1, 2]. The Green function for the Stokes equation is used and the non-Newtonian stress is treated as a source term. Integration over the outer unbounded domain occupied by the Newtonian liquid, is eliminated by satisfying the boundary condition at using the integral expressions for the adjoined domains. Thus, the problem is reduced to an integral equation in a bounded domain, which reduction is the main advantage of this method.

The dynamic shapes are obtained for a variety of capillary numbers, Bingham numbers and viscosity ratio. For established shapes, several approximate analyses and results are presented and compared. The critical capillary number, below which a steady drop shape exists, is established for each case. Exact analytic solutions are obtained for oblate spheroidal drops employing conformal mapping techniques. For the case of Newtonian drops with viscosity equal to that of the external fluid we employ the integral equation suggested [3], where the steady shapes are expressed in terms of Chebyshev polynomials. Similarity to and difference from the deformation of a drop in axisymmetric extensional flow are discussed. It was found that spheroidal approximation is valid for the shape of the drop in a uni-axial extensional flow for the entire range of capillary numbers. For the drop under a bi-axial extension the situation is different: While at relatively low capillary number the drop shape resembles that of an oblate spheroid, for capillary numbers close to the critical one the deformed drop assumes the shape of a flat disk with rounded edge.

### REFERENCES

1. **Toose E. M., van den Ende D., Geurts B. J., Kuerten J. G. M., Zandbergen P. J.** Axisymmetric non-Newtonian drops treated with a boundary integral method // *J. Engng Math.* 1996. V. 30. P. 131–150.
2. **Smagin I., Pathak M., Lavrenteva O. M., Nir A.** Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid // *Rheologica Acta.* 2011. V. 50, N 4. P. 361–374.
3. **Zabaranin M., Nir A.** Generalized analytic functions in an extensional Stokes flow with a deformable drop // *SIAM J. Appl. Math.* 2011. V. 71, N 4. P. 925–951.

## МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛОВУШКЕ С ИНВЕРСНЫМИ МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ И МУЛЬТИПОЛЬНЫМИ МАГНИТНЫМИ СТЕНКАМИ

Лазарева Г. Г.<sup>1</sup>, Берендеев Е. А.<sup>3</sup>, Иванов А. В.<sup>2</sup>,  
Емелев И. С.<sup>2</sup>, Шваб И. В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;*

*lazareva@ssd.sccc.ru*

<sup>2</sup>*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090 Россия;*

*A.V.Ivanov@inp.nsk.su, I.S.Emelev@inp.nsk.su*

<sup>3</sup>*Институт вычислительных технологий СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;*

*evgeny.berendeev@gmail.com, shva@ict.nsc.ru*

Основным методом накопления и нагрева высокотемпературной плазмы в термоядерных установках с удержанием плазмы в магнитном поле является атомарная (нейтральная, перезарядная) инжекция ионов необходимой энергии. В крупных токамаках и в экспериментальном термоядерном D-T реакторе ITER необходимы мощные пучки атомов с энергией до 1 МэВ для поддержания стационарного тороидального тока в плазме, возбуждающего полоидальное магнитное поле, которое обеспечивает удержание плазмы.

Наиболее эффективным методом получения мощных нейтральных пучков является нейтрализация пучков отрицательных ионов в плазменной ловушке - мишени. В ИЯФ СО РАН предложена линейная ловушка с инверсными пробками (с обратным магнитным поем). Если для частиц в инверсных пробках 2-е слагаемое обобщенного момента импульса (пропорциональное магнитному потоку) будет много больше 1-го (кинетического), то благодаря сохранению в аксиально-симметричной системе обобщенного момента продольное удержание частиц (кроме осевых) окажется очень жестким. В ловушке целесообразно ограничить радиальные потери плазмы мультипольными магнитными стенками кольцевой геометрии. В осесимметричной ловушке с кольцевым магнитным полем (с кольцевыми магнитными поверхностями) отсутствует азимутальный компонент поля, а так же отсутствует стационарное азимутальное электрическое поле. Соответственно, в такой ловушке не может возникать нормальный к стенкам стационарный дрейф плазмы в скрещенных полях. Благодаря этому, а также благодаря естественной МГД устойчивости плазмы в мультипольном поле электроны плазмы хорошо удерживаются, накапливаются и нагреваются, во внутренней области потенциал плазмы понижается, что ведет к улучшению удержания ионов.

Полноценное исследование физических процессов в плазме может быть проведено только при комплексном подходе, сочетающем как экспериментальные исследования, так и исследования вычислительными методами, адекватно описывающими эти процессы. В докладе представлена численная модель динамики плазменных электронов в ловушке с инверсными магнитными пробками и мультипольными магнитными стенками. Программная реализация численной модели позволяет провести исследования процессов в плазменной ловушке, свойств удерживаемой плазмы и параметров удержания. Цель моделирования состоит в решении проблемы минимизации потерь плазмы в широко апертурные проходные отверстия в торцах, в которых находятся инверсные магнитные пробки, а так же через цилиндрические мультипольные магнитные стенки ловушки на ее вакуумную камеру.

Работа поддержана ИП 105, РФФИ (грант 11-01-00178).

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАНТИЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Лазарева Г. Г.<sup>1</sup>, Корнеев В. Д.<sup>1</sup>, Бабичев А. В.<sup>2</sup>,  
Васкевич В. Л.<sup>3</sup>, Вшивков В. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;*

*lazareva@ssd.sscs.ru, korneev@ssd.sscs.ru, vsh@ssd.sscs.ru*

<sup>2</sup>*Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 3, Новосибирск, 630090 Россия; Babichev@igm.nsc.ru*

<sup>3</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия; vask@math.nsc.ru*

Среди эндогенных механизмов переноса вещества в земной коре и верхней мантии определяющее место занимают движения, причинами которых являются гравитационная неустойчивость и тепловые потоки. Одним из проявлений таких движений в земной коре является интрузивный магматизм, другим — диапиризм, т.е. всплывание более легкого вещества и погружение более тяжелого. Процесс осуществляется при наличии инверсии плотности породы по глубине, т.е. когда в нижней части разреза залегают породы менее плотные чем в верхней, а проявления его возможны в разных геологических ситуациях и в разных масштабах. Традиционно мантийные течения с сильно изменяющимися реологическими и транспортными свойствами моделируются на основе приближения Обербека — Буссинеска. Для нахождения параметров процесса плавления в нижней коре и параметров диапиризма приходится вводить в рассмотрение нестационарную модель геодинамических течений в приближении слабосжимаемой жидкости. Безусловным преимуществом предлагаемой нестационарной модели служит достаточно точное соответствие расчетной скорости изучаемых процессов данным, известным из наблюдений. При небольших характерных скоростях геодинамических процессов (несколько сантиметров за миллион лет) для задач такого типа характерна высокая скорость звука и малое число Маха  $M$ . Геодинамика рассматривает лишь очень медленные течения. Формально вычислив число Маха, можно обратиться к имеющемуся опыту вычислений в области существенно дозвуковых течений. Известно, что при уменьшении характерного для потока числа Маха до значений ниже 0.1, итерации по времени в методе установления сходятся медленнее, а точность получаемого решения ухудшается. Замедление сходимости метода установления при  $M < 0.1$  объясняется возрастающей жесткостью уравнений динамики сжимаемого газа, определяемой как отношение максимального и минимального собственных значений матрицы Якоби векторов конвективных потоков.

В докладе представлена численная модель динамики мантийных течений в приближении слабосжимаемой жидкости с сильно изменяющимися реологическими и транспортными свойствами, позволяющая верно воспроизводить скорость среды. Разработан алгоритм нахождения гипозвуковой скорости течения на основе решения уравнений движения в интегральной форме. Программная реализация численной модели позволяет получать новые результаты по эволюции гравитационно-неустойчивых систем в недрах Земли. Создание эффективного алгоритма параллельных вычислений дает возможность получить новые результаты для расширенного диапазона параметров.

Работа поддержана ИП 12, РФФИ (грант 12-01-00061).

## АЛГОРИТМ 3D ВИХРЯ В ОБТЕКАЮЩЕМ ПОТОКЕ

Лежнев В. Г., Марковский А. Н.

Кубанский государственный университет,  
ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040 Россия;  
lzhnvv@mail.ru, mark@kubsu.ru

Пусть  $D$  — ограниченная односвязная область в  $\mathbb{R}^3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ;  $l(x) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$  — линейная скалярная функция. Во внешней области  $D^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  рассмотрим задачу Неймана:

$$\Delta u(x) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} l(x),$$

решение которой определяется в виде ньютонова потенциала по области  $D$ ,

$$u(x) = \int_D g(y) E(x - y) dy,$$

где  $E(z)$  — фундаментальное решение уравнения Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ . Такое представление существует и единственно, если  $g(y)$  — гармоническая функция, которая может быть аппроксимирована в виде

$$g^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m E(b^m - x),$$

где  $\{b^m\}$  — базисная последовательность точек в  $D^+$  [1].

Воспользуемся полной в  $L_2(\partial D)$  системой потенциалов

$$\delta_m(x) = \int_D E(b^m - y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} E(x - y) dy, \quad x \in \partial D, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и для определения коэффициентов  $c_m$  получим задачу минимизации

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} l(x) - \sum_{m=1}^N c_m \delta_m(x) \right\|_{\partial D}^2 \longrightarrow \min,$$

что дает линейную систему с матрицей Грама.

Векторное поле  $\mathbf{w}(x) = \nabla \varphi(x)$ , где

$$\varphi(x) = l(x) - \int_D g(y) E(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

является касательным к границе  $\partial D$ , определяет обтекающий поток идеальной жидкости со скоростью  $\mathbf{v}$  на бесконечности, а в  $D$  — внутренний вихрь (с двумя диаметрально неподвижными точками в случае шара); при этом дивергенция векторного поля  $\mathbf{w}(x)$  является гармонической функцией  $g(x)$ .

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-96511).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар, 2009.

## РЕАЛИЗАЦИЯ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Максимова Н. Н.<sup>1</sup>, Намм Р. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Амурский государственный университет, Игнатьевское шоссе, 21,  
Благовещенск, 675027 Россия; knamursu@mail.ru*

<sup>2</sup> *Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136,  
Хабаровск, 680035 Россия; namm@mail.khstu.ru*

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ . Рассмотрим вариационную коэрцитивную задачу с недифференцируемым функционалом [1]

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} g |\gamma v| d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in W_2^1(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

где  $f \in L_2(\Omega)$ ;  $g \in L_2(\Gamma)$ ,  $g > 0$  на границе  $\Gamma$ ;  $\gamma v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$  — след функции  $v \in W_2^1(\Omega)$  на  $\Gamma$ .

В предположении, что  $f \leq 0$  в области  $\Omega$ , решение  $v$  задачи (1) будет неположительным в области  $\Omega$  и, в частности, на границе  $\Gamma$ . Тогда вариационная задача (1) безусловной минимизации недифференцируемого функционала эквивалентна задаче условной минимизации дифференцируемого функционала [2]

$$\begin{cases} \tilde{J}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma} g \gamma v d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega): \gamma w \leq 0 \text{ на } \Gamma\}. \end{cases} \quad (2)$$

Для решения задачи (2) условной минимизации функционала можно построить схемы двойственности, основанные на классическом  $L(v, l) = \tilde{J}(v) + \int_{\Gamma} l \gamma v d\Gamma$  и модифицированном  $M(v, l) = \tilde{J}(v) + 1/(2r) \int_{\Gamma} \{[(l + r\gamma v)^+]^2 - l^2\} d\Gamma$  функционалах Лагранжа.

В предшествующих работах авторов (см., например, [2, 3]) при конечно-элементной реализации на первом шаге алгоритма Удзавы поиска седловой точки функционала Лагранжа использовался метод спуска. В данной работе при решении той же задачи будут использоваться квазиньютоновские методы минимизации.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 02.740.11.0626).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
2. Кушнирук Н. Н., Намм Р. В. Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сиб. журн. вычисл. мат. 2009. Т. 12, № 4. С. 409–420.
3. Кушнирук Н. Н., Намм Р. В. Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сиб. журн. вычисл. мат. 2011. Т. 14, № 4. С. 381–396.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРЯТЯГИВАЮЩЕЙ СФЕРЕ

Мамонтов Е. В.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090 Россия;  
mamontov@hydro.nsc.ru*

Система уравнений теории мелкой воды на на вращающейся притягивающей сфере имеет вид ([1], [2])

$$\begin{aligned} D_0 v &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + \frac{1}{4} r_0^2 \sin \theta \cos \theta - f_0 h_\theta, \\ D_0 w &= -v w \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta - \frac{f_0}{\sin \theta} h_\varphi, \\ D_0 h &+ \frac{1}{\sin \theta} h (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом  $D_0 = \partial_t + v \partial_\theta + (w/\sin \theta) \partial_\varphi$ ,  $v, w$  — широтная и долготная компоненты вектора скорости,  $r_0, f_0$  — параметры,  $r_0 = R_0^{-1}$ ,  $f_0 = F^{-2}$ . Число Россби  $R_0 = V_0/(2\Omega_0 a_0)$ , число Фруда  $F_0 = V_0/(\sqrt{gH_0})$ . Здесь  $H_0$  — характерная глубина слоя жидкости,  $a_0$  — радиус сферы,  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $V_0$  — характерный масштаб касательной к сфере компоненты вектора скорости,  $H = r - a_0$ ,  $h = H/H_0$ .

Обсуждается вопрос об устойчивости простого решения системы

$$v = 0, \quad w = w_0 \sin \theta, \quad h = h_0 - \frac{1}{4f_0} \left( w_0 + \frac{r_0}{2} \right)^2 \cos 2\theta.$$

Малые возмущения указанного решения описываются системой уравнений, получающейся линеаризацией исходной системы на этом решении. После полного разделения переменных задача сводится к нахождению собственных значений в сингулярной краевой задаче для системы из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В частном случае, когда возмущения зависят только от широтной переменной, удается доказать, что собственные значения являются чисто мнимыми. Тем самым, анализируемое решение устойчиво относительно таких возмущений. В общем случае используются численные методы. Численный эксперимент указывает, что и в общем случае собственные значения — чисто мнимые, т. е. изучаемое решение устойчиво относительно малых возмущений произвольного вида. Полученный результат обобщает результаты статьи [3].

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00026-а) и Федеральным агентством по науке и инновациям РФ (проект НШ-6706.2012.1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Черевко А. А., Чупахин А. П. Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 2. С. 24–36.
2. Черевко А. А., Чупахин А. П. Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 82–96.
3. Мамонтов Е. В. Об устойчивости постоянного решения уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Сиб. журн. индустр. мат. 2011. Т. 14, № 4. С. 44–49.

## РАСЧЕТ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННОГО С БЕГУЩИМ РАЗЛОМОМ ДНА, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРОЩЕННОЙ TVD СХЕМЫ

Надкритичный Л. В.

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041 Россия;  
lmuten@iacp.dvo.ru*

Образование цунами в первую очередь связывают с сейсмическими движениями дна, оползнями и обвалами, подводными вулканическими извержениями. Но наиболее частой причиной возникновения цунами являются резкие вертикальные смещения дна океана на больших площадях во время сильных подводных землетрясений [1]. Нередко причиной цунами бывает землетрясение относительно малой магнитуды. Как известно, землетрясения на суше сопровождаются трещинами, разломами с вертикальными и горизонтальными смещениями границ. Не исключено, что подобное может происходить на морском дне. Понижение уровня моря при определенных условиях может приводить к образованию цунами. Этот механизм, называемый стоковым, может сопровождать сейсмические подвижки морского дна, но в отдельных случаях может быть преобладающим [2].

Как известно, деформация дна, служащая источником цунами, является длительным процессом и может простираться на сотни километров. Такое поведение донной поверхности можно рассматривать как расширение области деформации в горизонтальном направлении. Подобное поведение дна океана получило в литературе название “бегущей подвижки” [1].

В работе рассматривается численное моделирование поверхностных волн, возникающих при горизонтальном расширении локального провала дна под слоем жидкости, которое может быть вызвано сеймотектоническими процессами в земной коре. Для расчетов используется упрощенная явная TVD схема [3] первого порядка по пространству и времени. Показана достоверность результатов, полученных по описываемому вычислительному алгоритму, как для тестовых задач, так и для решения указанной выше задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проект 11-01-98510p\_восток\_a), ДВО РАН (проекты 12-III-B-03-022, 12-I-III-04).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. В., Носов М. А.** Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К, 2005.
2. **Левин Б. В., Королев Ю. П., Королев П. Ю.** Стоковый механизм образования цунами. Южно-Сахалинск: ИМГиГ, 2006.
3. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Computat. Phys. 1983. V. 49, N 3. P. 357–393.

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

**Нестеров С. А.**

*Южный федеральный университет,  
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону, 344090 Россия;  
1079@list.ru*

В общем виде поставлена обратная задача об определении неоднородных характеристик термоупругого тела по некоторой дополнительной информации. Сформулирована слабая постановка задачи в пространстве трансформант Лапласа о колебаниях термоупругих тел для общего случая нагружения. На основе такой постановки предложен способ построения решения обратной задачи. В качестве конкретного примера рассмотрены две одномерные задачи о реконструкции пары коэффициентов уравнений термоупругости. Решение прямой задачи о продольных колебаниях сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Приведен анализ точности вычислительной схемы. Решение обратной задачи реализовано путем организации итерационного процесса, сочетающего на каждом шаге решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода и нахождение поправок на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода реализовано численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Представлены результаты вычислительных экспериментов. Проведена оценка эффективности работы алгоритма.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-01-00194-а).



## ПРИМЕНЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Носачева А. И.

*Южно-Уральский государственный университет,  
просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080 Россия; alika@74.ru*

Менее прочные (МП) слои являются неизбежным следствием многих существующих технологий производства сварных соединений. Исследование возникающего в МП слоях контактного упрочнения позволяет точнее оценить прочность неоднородных соединений, содержащих такие слои, в том числе сварных соединений. Характерной особенностью таких задач является их недоопределенность. При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния (НДС) МП слоя недостаток краевых условий обычно компенсируется ограничениями на классы решений на основе частичного предугадывания внутреннего состояния материала. Естественным ограничением такого сорта является гипотеза плоских поперечных сечений (ГППС)  $v_y = W(y)$ , где  $v_y$  — скорость перемещения поперек слоя. На основе ГППС в [1, 2] проведено исследование НДС поперечного МП слоя полосы при растягивающей нагрузке в случае плоской деформации. Естественное уточнение ГППС — гипотеза синусоидальных сечений (ГСС):  $v_y = W(y) \cos(\delta x)$ , где  $\delta$  — малый параметр, который, в принципе, можно найти из эксперимента. В этом случае при обычных [1] допущениях можно разделить переменные в выражении  $\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$ , что позволяет для касательных напряжений  $\tau_{xy}$  получить зависимость

$$\tau_{xy} = \frac{\operatorname{tg}(\delta x)Y(y)}{\delta\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2(\delta x)Y^2(y)/\delta^2}}, \quad (1)$$

где функция  $Y(y)$  связана с  $W(y)$  уравнением

$$Y(y) = \frac{W''(y)}{W'(y)} + \frac{\delta^2 W(y)}{W'(y)}, \quad (2)$$

а с другой стороны, удовлетворяет некоторой граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Y'' + 2YY' - \delta^2 Y = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) решается в аналитической форме разложением по параметру  $\delta$ . Уравнение (1) вместе с уравнениями равновесия и граничными условиями позволяет вычислить нормальные напряжения как функции координат точки МП слоя и, в конечном счете, внешнюю нагрузку в рассматриваемый критический момент нагружения. Уравнение (2) с использованием решения уравнения (3) удастся проинтегрировать разложением по параметру  $\delta$ , что дает возможность найти скорости смещения точек слоя. Сравнение получаемых в этом направлении результатов с частным случаем ГППС  $\delta = 0$  показывает незначительное расхождение. Это позволяет считать модель НДС на основе ГППС адекватно описывающей реальную ситуацию.

Отметим, что гипотеза параболических сечений, эффективная в осесимметричном случае [3], в данной ситуации не позволяет разделить переменные в выражении  $\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$  и провести соответствующий анализ НДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дильман В. Л.** Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007.
2. **Дильман В. Л., Остсемин А. А.** О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 6. С. 115–124.
3. **Дильман В. Л., Ерошкина Т. В.** Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне // Обозрение приклад. пром. мат. 2004. Т. 11, вып. 4. С. 793–794.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ В ДВУХЖИДКОСТНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ С ДВУМЯ ДАВЛЕНИЯМИ

Перепечко Ю. В.<sup>1</sup>, Сорокин К. Э.<sup>1</sup>, Имомназаров Х. Х.<sup>2</sup>

*Институт геологии и минералогии СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 3, Новосибирск, 630090 Россия;  
pererp@igm.nsc.ru, konst\_sorokin\_85@ngs.ru*

<sup>2</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
imom@omzg.sscs.ru*

Исследованию динамики двухжидкостных сред посвящено большое число работ. Однако многие вопросы в этой области изучены недостаточно, например, исследуются, либо акустические процессы, либо крупномасштабная динамика несжимаемых двухжидкостных сред. Природные процессы, протекающие во флюидо-магматических системах с учетом кипения магм, флюидных гидротермальных системах, при конвективном прогреве литосферы магматическими флюидами и т.д., требуют решения задач тепломассопереноса в сжимаемых гетерофазных средах для относительно больших временных периодов. Следует отметить, что экспериментальная проверка результатов моделирования таких систем часто затруднена, что приводит к необходимости использования подходов, обеспечивающих физическую корректность построений.

Настоящая работа посвящена разработке теоретической модели и численному моделированию нелинейной динамики двухскоростных двухжидкостных сред с отсутствием равновесия по давлению между фазами. Уравнения математической модели выводятся в рамках метода законов сохранения [1, 2]. Метод обеспечивает получение термодинамически согласованной нелинейной модели механики реологически сложных сред [3, 4]. Составляющие двухскоростной континуум фазы характеризуются различными реологическими свойствами: вязкой жидкости и вязкоупругой средой Максвелла. Кроме того, в данной работе рассматривается среда с малым временем установления локального теплового равновесия между фазами. Численное решение динамики такой среды проведено в рамках метода контрольного объема [5, 6], обеспечивающего физическую корректность решения. В докладе представлены результаты математического моделирования нелинейной динамики гранулированной среды, а также конвекции в сжимаемых двухжидкостных средах.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-05-00625).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Халатников И. М.** Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
2. **Доровский В. Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
3. **Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.** Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 94–105.
4. **Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.** Гидродинамическая модель раствора в трещиновато-пористых средах // Геология и геофизика. 1996. № 9. С. 123–134.
5. **Patankar S.** Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publ., 1980.
6. **Perepechko L. N.** Investigation of heat mass transfer processes in the boundary layer with injection // Arch. Thermodynamics. 2000. V. 21, N 3/4. P. 41–54.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ МАЛОМАСШТАБНОГО АТМОСФЕРНОГО ВИХРЯ

Романский С. О.<sup>1</sup>, Суляндзига П. Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный государственный университет путей сообщения,  
ул. Серышева, 47, Хабаровск, 680021 Россия; khvstas@gmail.com

<sup>2</sup>Вычислительный центр ДВО РАН,  
ул. Ким Ю Чена, 56, Хабаровск, 680000 Россия

В атмосфере образуются маломасштабные вихри с почти вертикальной осью вращения. К таким вихрям можно отнести и опасные явления погоды, смерчи и торнадо, которые характеризуются скоростями ветра порядка 50–100 м/с. Одной из теорий, описывающих процесс возникновения таких явлений, является теория об образовании вихря в неустойчиво стратифицированной атмосфере [1].

Рассмотрим безразмерную систему уравнений глубокой конвекции в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ , и пусть движение в вихре является осесимметричным и не зависит от  $\phi$ :

$$\omega \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \theta' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u \frac{\partial \theta'}{\partial r} + \omega \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \gamma \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$r\omega \frac{\partial \rho_b}{\partial z} + \rho_b \left( \frac{\partial (ru)}{\partial r} + r \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

Неизвестными в данной системе являются  $u(r, z, t)$ ,  $v(r, z, t)$ ,  $\omega(r, z, t)$  — радиальная, тангенциальная и вертикальная компоненты скорости ветра;  $p'(r, z, t)$ ,  $\theta'(r, z, t)$  — возмущения полей давления и потенциальной температуры. Заданы следующие величины:  $\rho_b(z)$  — значения невозмущенного поля плотности воздуха;  $\lambda$  — безразмерный коэффициент турбулентной вязкости;  $\gamma(z)$  — параметр, описывающий зависимость значений невозмущенной потенциальной температуры от высоты.

В качестве начальных условий предполагается нахождение системы в состоянии покоя, но задано начальное возмущение потенциальной температуры в полосе по оси  $z$ . Граничные условия поставлены с учетом ограниченности размеров вихря, на некотором расстоянии  $R$  по оси  $r$  возмущенные поля переходят в фоновое состояние; на уровне Земли и на высоте  $z = Z$  заданы условия непротекания; на центральной оси вихря — условие симметрии.

Данная задача решена численно с использованием метода дробных шагов [2, 3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометиздат, 1969.
2. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Из-во НГУ, 1967.
3. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

## МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ

Савельев Л. Я.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Копюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия;  
savelev@math.ru*

Рассмотрим троичную однородную марковскую последовательность  $\xi$  случайных переменных  $\xi(n)$ ,  $n \geq 0$  с множеством значений  $C = \{1, 0, -1\}$ , начальным вектором  $A$  и переходной матрицей  $Q$ :

$$A = (a_1, a_0, a_{-1}) = (a, 1 - a - b, b),$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{10} & q_{1,-1} \\ q_{01} & q_{00} & q_{0,-1} \\ q_{-11} & q_{-10} & q_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 - p - s & s \\ q & 1 - q - t & t \\ u & 1 - u - r & r \end{pmatrix},$$

где

$$a_i = \Pr \{ \xi(0) = i \}, \quad i \in C, \quad q_{\alpha\beta} = \Pr \{ \xi(n+1) = \beta \mid \xi(n) = \alpha \}, \quad n \geq 0.$$

Будем рассматривать случайные величины  $x_i(n)$ ,  $y_i(n)$  и  $z_i(n)$ , равные соответственно числу  $i$ -событий, числу  $i$ -серий и максимуму длин  $i$ -серий последовательности  $\xi$  на отрезке  $[0, n]$ . Выделяются 1-события и 1-серии, результаты для аналогичных 0 и  $-1$  характеристик получаются по симметрии. Жорданово разложение матрицы  $Q$  позволяет получить простую общую формулу для ее  $n$ -ой степени и распределение вектора  $P_n = A \cdot Q^n = (\Pr \{ \xi(n) = 1 \}, \Pr \{ \xi(n) = 0 \}, \Pr \{ \xi(n) = -1 \})$ . С помощью производящих функций вычисляются средние значения, дисперсии, ковариации и коэффициенты корреляции для рассматриваемых случайных переменных.

При определенных предположениях этот дискретный случайный процесс может служить моделью образования и развития продольных и поперечных трещин в композитах и земной коре. В частности, число серий и их максимальная длина описывают критические уровни развития трещин в материалах данной структуры. Модельные примеры для простых плоских и пространственных форм подтверждают это [1].

Представляют интерес обратные задачи вычисления переходных вероятностей в уравнениях для полученных производящих функций.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-01-00384-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я., Балакин С. В. Специальные операторные уравнения // Сиб. журн. индустр. мат. 2007. Т. 10, № 3. С. 84–97.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Сатыбаев А. Дж., Калдыбаева Г. А.

*Ошский технологический университет*

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу термоупругости

$$\rho(z)U_{tt} = (\lambda(z) + \mu(z))U_{tt} + (\lambda(z) + \mu(z))'_z U'_z - ((3\lambda(z) + 2\mu(z))R(\theta(z, t)))'_z, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (1)$$

$$u(z, t)|_{t>0} \equiv 0, \quad U_z|_{z=0} = -\frac{1}{2} \delta(t), \quad (2)$$

$$U(z, t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где

$$F(x, t) = R(\theta(z, t)) = \int_0^{\theta(z, t)} \alpha(y) dy,$$

$\alpha(y)$  — тепловое расширение,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  — коэффициенты Ламе,  $\rho(z)$  — плотность среды.

**Прямая задача** заключается в определении функции  $U(z, t)$  как решения задачи (1), (2) при известных коэффициентах  $\rho(z)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $\alpha(z)$ .

**Обратная задача** заключается в определении функции  $\alpha(z)$  при известных коэффициентах  $\rho(z)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ , а также при известной дополнительной информации (3).

Прямая и обратная задачи решены конечно-разностным методом и получены графики точных и приближенных решений.

Также проанализированы полученные приближенные и точные решения на модельных примерах.

Анализ показал, что приближения достаточно близки. Найдена относительная погрешность для каждого приближения.

Установлена устойчивость приближенного решения поставленной задачи.

**О ПРОБЛЕМЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВОЛНОВОДОВ  
ПРИ ЗАПУСКЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СВЯЗИ**

**Сильченко П. Н., Кудрявцев И. В.**

*Сибирский федеральный университет,  
просп. Свободный, 79, Красноярск, 660079 Россия;  
kudrilya@rambler.ru*

На этапе запуска космического аппарата связи все его элементы и системы, включая волноводы, подвергаются динамическим воздействиям в виде инерциальных нагрузок и вынужденных колебаний. При моделировании динамического состояния волноводов, имеющих прямоугольное поперечное сечение, использована расчетная схема в виде 4-х соединенных между собой пластин, для каждой из которых получена подсистема взаимосвязанных дифференциальных уравнений 4-го порядка [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 \omega_i = \frac{1}{D} \left( h \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i^2} - 2h \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} + h \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \beta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \beta_i^2} \right. \\ \quad \left. - q_{\alpha i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} - q_{\beta i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \beta_i} + q_{zi} - \rho h \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \right), \\ \nabla^4 \varphi_i = Eh \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \beta_i^2} \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $i$  — номер пластинки,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Все подсистемы ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) связаны между собой зависимостями, отражающими граничные условия в местах соединения пластин между собой. Например, на линиях соединения  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й пластин граничные условия, выраженные через функцию напряжений  $\varphi(\alpha, \beta)$  и прогиб  $\omega(\alpha, \beta)$ , примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1} \partial \beta_{i+1}}; \\ C_i h \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_i^2} = -D_{i+1} \left( \frac{\partial^3 \omega_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1}^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1} \partial \beta_{i+1}^2} \right); \\ -D_i \left( \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial \alpha_i^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i^2} \right) = C_{i+1} h \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1}^2}; \\ \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial \alpha_i^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial \alpha_i \partial \beta_i^2} = \frac{\partial^3 \omega_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1}^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1} \partial \beta_{i+1}^2}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $D_i$  и  $C_i$  — цилиндрические жесткости отдельных пластин в составе волновода.

Система дифференциальных уравнений (1), подобна уравнениям, полученным С. П. Тимошенко, для которых, как указано в [2], общего аналитического решения не существует. В имеющейся на сегодняшний день математической литературе нами также не обнаружено информации об аналитическом решении систем дифференциальных уравнений подобного вида. Таким образом, рассматриваемая проблема (1), (2) является не решенной в аналитическом виде до сих пор.

Использование численных методов решения (1) показало, что они не всегда могут обеспечить требуемую точность решения, особенно в рассматриваемой динамической постановке. В частности, при использовании МКЭ, результаты расчетов

сильно зависят от типа и количества используемых конечных элементов. С учетом малой толщины стенки волноводов, корректные результаты возможно получить только при очень мелкой сетке КЭ, однако в этом случае существенную роль будут играть погрешности округления в ЭВМ малых чисел.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Сильченко П. Н., Кудрявцев И. В. и др.** Система дифференциальных уравнений для элемента волноводного тракта космических аппаратов // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2–7 июля 2010 г. С. 172–174.
2. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки. 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2009.



## РАСЧЕТ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

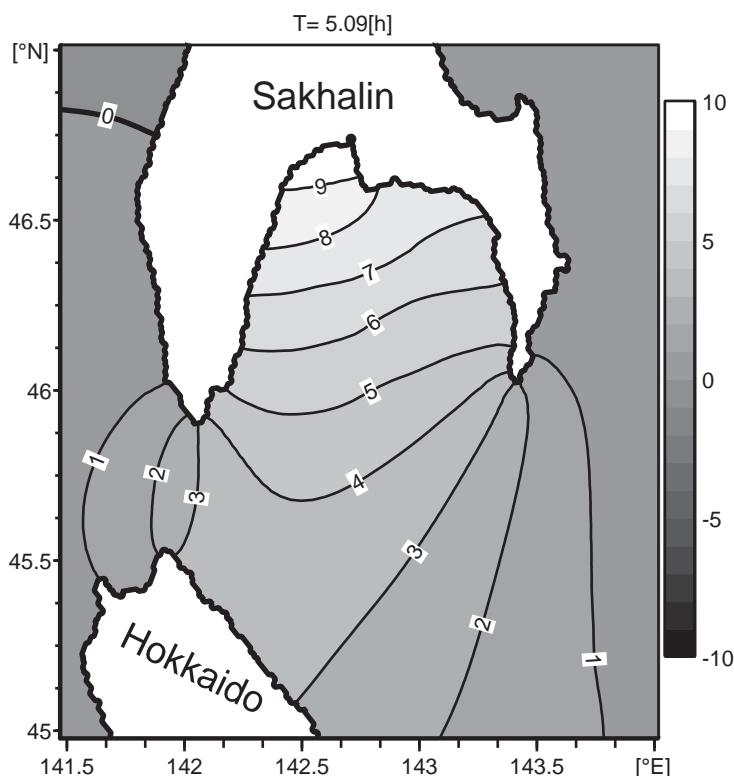
Смирнов С. В.

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5,  
Владивосток, 690041 Россия; smirnoff@iacp.dvo.ru*

Разработан и реализован программно-алгоритмический комплекс построения треугольной сетки и расчета параметров сейшевых колебаний на основе системы уравнений мелкой воды. Проведены расчеты собственных колебаний в системе краевых морей Дальнего Востока.

Сейши — это стоячие периодические колебания массы воды во всем водоеме или в обособленной его части. Сейшевые колебания играют определяющую роль во многих процессах прибрежной волновой динамики, таких как кратковременные затопления прибрежной зоны, формирование и перестройки прибрежного и донного рельефа, изменчивость вдольбереговых течений и др. Они являются важной компонентой движений воды, производимых циклонами, движущимися в прибрежной зоне океана.

Пространственная аппроксимация дифференциально-разностной системы уравнений мелкой воды выполнена на нерегулярной треугольной сетке, что позволяет описывать близкие к реальным модельные береговые очертания и рельеф дна [1].



Для решения задачи на собственные значения применен итерационный метод Крыловского типа.

Расчетная область охватывает Охотское и Японское моря и часть Тихого океана. В показанном на рисунке районе расположена треугольная сетка с расстоянием

между узлами 4 км, в остальной части расстояние между узлами увеличивается до 32 км. С приближением к береговой линии расстояние между узлами уменьшается до 1 км. При построении модельного рельефа использованы данные ЕТОРО1.

На рисунке представлена форма поверхности модельного океана, соответствующая вычисленному периоду колебаний 5.09 ч. Отметим, что наличие, как при цунами, так и в любую погоду основного, хорошо выраженного пика с периодом около 4.8 ч является характерной особенностью низкочастотной области спектра зал. Анива, связанной с собственными колебаниями в системе южное побережье о-ва Сахалин — северное побережье Хоккайдо — Южные Курильские острова [2].

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 11-01-98510) и ДВО РАН (проекты 12-И-П15-04,12-И-П23-02).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Долгих Г. И., Долгих С. Г., Смирнов С. В., Чупин В. А., Швец В. А., Яковенко С. В. Инфразвуковые колебания Японского моря // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 1. С. 98–102.
2. Ковалев П. Д., Шевченко Г. В. Экспериментальные исследования длинноволновых процессов на северо-западном шельфе Тихого океана. Владивосток: Дальнаука, 2008.

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКИ НА ГИБРИДНЫХ СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ

Снытников Н. В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
nik@ssd.sccc.ru*

Для моделирования некоторых нестационарных астрофизических задач (таких как исследование динамики галактик или околозвездных дисков) необходимо решать систему уравнений звездной динамики, состоящую из уравнения Власова и уравнения Пуассона, методом частиц в ячейках на больших временных интервалах.

Фактически, для проведения серийных численных экспериментов для нестационарной задачи с 1 миллиардом сеточных узлов (сетка  $1000 \times 1000 \times 1000$ ) и 100 миллиардов модельных частиц, необходимых для адекватного воспроизведения 6-мерной функции распределения вещества, один временной шаг должен обрабатываться за абсолютное время не больше 1 секунды. С точки зрения создания параллельного алгоритма задача усложняется тем, что подходы к декомпозиции области для конечно-разностного метода и метода частиц в ячейках должны быть согласованы таким образом, чтобы обеспечить как можно меньшее число межпроцессорных коммуникаций.

В данной работе предложено развитие метода декомпозиции трехмерной области [1], основанного на:

- методе сопряжения подобластей, используемом в работах [2, 3],
- методе частичного предвычисления сеточной функции Грина в контексте решения нестационарной задачи, по аналогии с работой [4], где исследовался алгоритм параллельной трехдиагональной прогонки,
- динамическом перераспределении модельных частиц между подобластями.

Предложена реализация метода для использования на гибридных суперкомпьютерах, состоящих из CPU и GPU (видеокарт общего назначения). Уравнение Пуассона решается на CPU и используются MPI-процессы, а вычисление новых координат частиц происходит на GPU (с помощью средств CUDA). Тестовые расчеты проводились на суперкомпьютере Сибирского суперкомпьютерного центра и запускались вплоть до 32 CPU и 96 GPU (49152 ядер CUDA). Показана хорошая производительность и масштабируемость алгоритма.

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 12-07-00065-а), ФЦП, контракт 07.514.11.4016.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Snytnikov N.** Scalable parallel algorithm for a solving of the collisionless Boltzmann — Poisson system of equations / *Advances in Computational Astrophysics: Methods, Tools, and Outcome*. ASP Conference Series, 2012 (in print).
2. **Huang J., Greengard L.** a fast direct solver for elliptic partial differential equations on adaptively refined meshes // *SIAM J. Sci. Comput.* 2000. V. 1. P. 1551–1566.
3. **James R. A.** The solution of Poisson's equation for isolated source distributions // *J. Comp. Physics.* 1977. V. 25. P. 71–93.
4. **Terekhov A. V.** Parallel dichotomy algorithm for solving tridiagonal system of linear equations with multiple right-hand sides // *Parallel Computing.* 2010. V. 36. P. 423–438.

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ  
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ  
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ**

Соболева О. В.

*Институт прикладной математики ДВО РАН,  
ул. Радио, 7, Владивосток, 690041 Россия; soboleva22@mail.ru*

В последнее время большое внимание уделяется исследованию моделей, описывающих процессы тепломассопереноса в жидких средах [1, 2]. Указанные модели и соответствующие им краевые задачи содержат ряд параметров, которые должны быть заданы для однозначного нахождения решения. Однако на практике часто возникают ситуации, когда некоторые из параметров не известны либо заданы приближенно и требуют дальнейшего уточнения. Такие задачи относятся к классу обратных задач идентификации неизвестных плотностей источников или коэффициентов, входящих в рассматриваемые модели. Особую трудность вызывает исследование коэффициентных обратных задач, поскольку по своим постановкам они относятся к нелинейным и, как правило, некорректным задачам математической физики.

Целью работы является теоретический анализ коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, описывающего распространение загрязняющего вещества в ограниченной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Исходная краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} -\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi - w_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + k\varphi &= f \quad \text{в } \Omega, \\ \varphi = \psi \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right) &= \chi \quad \text{на } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  — концентрация загрязняющего вещества (примеси),  $\lambda = \text{const} > 0$  — коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  — заданный вектор скорости,  $w_0 = \text{const} \geq 0$  — величина вертикальной скорости осаждения частиц примеси,  $k \geq 0$  — величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  — плотность объемных источников,  $\psi$ ,  $\chi$ , и  $\alpha$  — заданные на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  функции, причем функция  $\alpha$  имеет смысл коэффициента массообмена, тогда как  $\chi$  описывает поток вещества через  $\Gamma_N$ .

Исследуемая в работе обратная задача заключается в нахождении  $\alpha$ ,  $k$  и  $\chi$  по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$ . Указанная задача формулируется как задача минимизации определенного функционала качества на решениях исходной краевой задачи. Исследование поставленной коэффициентной обратной задачи сводится к исследованию соответствующей экстремальной задачи [3]. Это позволяет применять для ее решения хорошо развитые методы условной оптимизации. На основании методов, разработанных в [2], исследуется ее разрешимость, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, и устанавливаются оценки устойчивости относительно малых возмущений функционала качества и правой части  $f$  уравнения в (1).

Работа частично поддержана Минобрнауки по ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. в рамках госконтракта N 14.740.12.0835, грантами РФФИ N 11-01-98508-р\_восток\_а, 10-01-00219-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
2. **Алексеев Г. В., Терешко Д. А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

## О КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ РАСПЛАВА ПО ЛИНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ САУСВАЙЕР

Сулейменов Т.<sup>1</sup>, Бектурганов Н. С.<sup>2</sup>, Кабдылова Д. Д.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова,  
5, Астана, 010000 Казахстан; [suleimenov@rambler.ru](mailto:suleimenov@rambler.ru)

<sup>2</sup>Национальный научно-технологический холдинг “Парасат”,  
пр. Республики, 18, Астана, 010000 Казахстан; [info@parasat.com.kz](mailto:info@parasat.com.kz)

Расплавленные металлы и их сплавы находят широкое применение в народном хозяйстве. Этот интерес особенно велик в теплотехнике, ядерной и электронной технике и других отраслях промышленности. Наибольшее внимание расплавленным металлам уделено в металлургии, что обусловлено необходимостью прохода жидкой фазы перед кристаллизацией. С другой стороны, недостаточное применение и внедрение математических методов моделирования состояния расплава, которые могут прогнозировать процесс, существенно тормозит прогресс технологий в металлургии.

Прокатные станы, на которых получается металлическая катанка, имеет закрытое общим кожухом охлаждаемое пространство, недоступное для измерения температуры по отдельным клетям. Так же труднодоступен для контроля температуры короткий участок выходящей из стана катанки перед введением ее в канал охлаждения и осветления. Между тем температура прокатки является определяющей для энергетических затрат, механических усилий на валках, их износа и в конечном итоге — для качества конечной продукции.

К примеру, девятиклетевой стан фирмы Саусвайер представляет собой последовательность вертикальных и горизонтальных валков, на которые непрерывно поступает заготовка меди трапецевидного сечения и выходит в виде прутка круглого сечения. Валки охлаждаются через форсунки оборотной водной эмульсией с температурой 40 °С в общем герметичном кожухе. Перед первой и после последней клетями имеются достаточно обширные зоны в общем замкнутом пространстве, так что общее число зон охлаждения оказывается десять. Перед входом в стан заготовка обдувается струей сжатого воздуха для предотвращения выбивания брызг водной эмульсии через входное отверстие в стан на коротком участке после точки постоянного замера температуры оптическим пирометром, за счет чего фактическая температура на входе в стан примерно на 20 °С ниже задаваемой по показаниям пирометра, обычно на уровне 840 °С. На выходе из стана прутки имеют температуру вишнево-красного каления, 500–600 °С, но ввиду малого диаметра прутка (8 мм), большой скорости движения (около 8 м/с), обдува воздухом с целью предотвращения разбрызгивания водной эмульсии через выходное отверстие стана и очень короткого открытого участка (около 8 см) измерение температуры представляет существенные трудности и требует разработки специального прибора.

В связи с выше изложенным разработаны методика теоретического расчета температурного поля по всем клетям стана на основе численного решения уравнения теплопроводности, что является составной частью общего метода клетевого определения полезных энергозатрат с учетом соответствующих степеней деформации.

На наш взгляд важным является численное исследование процесса истечения расплава из наклонного желоба, а также течение расплава из предварительного желоба который имеет уступ, как подготовительный этап к прокатке медной катанки. В этой связи выписаны уравнения Навье — Стокса применительно для конфигураций установки прокатного стана Саусвайер.

Работа поддержана Комитетом науки МОН Республики Казахстан.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Тында А. Н.<sup>1</sup>, Романов А. Е.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Пензенский государственный университет,  
ул. Красная, 40, Пенза, 440026 Россия; tynda@pnzgu.ru

<sup>2</sup> Самарский государственный университет,  
ул. Акад. Павлова, 1, Самара, 443011 Россия; rom-alex@mail.ru

Работа посвящена численному исследованию реологических моделей в рамках теории нелинейной наследственной ползучести. Предложен численный метод решения нелинейных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра с трехпараметрическим ядром Ржаницына, используемых в реологических моделях вязкоупругой среды. Связь между напряжениями  $\sigma(t)$  и деформациями  $\varepsilon(t)$  в таких моделях имеет следующий вид:

$$\sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t, \tau) f[\sigma(\tau)] d\tau = E(t)\varepsilon(t), \quad (1)$$

где

$$K(t, \tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}. \quad (2)$$

Здесь  $E$  — мгновенный модуль упругости, первое слагаемое в левой части описывает изменение напряжения во времени за счет упругой деформации (мгновенно действующей по сравнению со временем развития ползучести), второе — за счет деформации ползучести, а правая часть характеризует нестационарный источник возникновения и развития напряжения в вязкоупругой среде. В (1) учитывается “старение” упругоползучих материалов и влияние наследственности, т. к. в начальный момент времени вязкоупругая среда может находиться в напряженно-деформированном состоянии (в результате осадки, уплотнения и т. п.).

В работе предлагается эффективный численный метод решения уравнений вида (1), основанный на применении модифицированного метода Ньютона — Канторовича и аппроксимации сплайнами. Доказаны теоремы сходимости, сходимость метода проиллюстрирована на модельном уравнении, а также приведены результаты моделирования ползучести на примере суглинка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
2. Малкин А. Я., Исаев А. И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия, 2007.
3. Месчан С. Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов. М.: Недра, 1985.
4. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.
5. Tynda A. N. Numerical algorithms of optimal complexity for weakly singular Volterra integral equations // Computat. Meth. Appl. Math. 2006. V. 6, N 4. P. 436–442.
6. Tynda A. N. On numerical solution of a nonlinear Volterra integral equation of fractional order // Труды СВМО. 2009. Т. 11, № 1. С. 71–79.

## COMPUTATION OF THE TIME-DEPENDENT FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF ELASTODYNAMICS IN ANISOTROPIC QUASI-CRYSTALLINE MATERIALS

**Yakhno V. G.**

*Dokuz Eylul University, Izmir, 35160 Turkey; valery.yakhno@deu.edu.tr*

Quasi-crystalline materials or quasi-crystals (QCs) are clearly fascinating materials: crystal structures and properties are surprising and could be remarkably useful. Most of these properties combine effectively to give technologically interesting applications which have been protected recently by several patents. For instance, the combination of such kind of properties as high hardness, low friction and corrosive resistance of QCs gives almost ideal material for motor-car engines. The application of QCs in motor-car engines would be undoubtedly result in reduced air pollution and increase engine lifetimes. The same set of associated properties (hardness, low friction, corrosive resistance) combined with bio-compatibility is also very promising for introducing QCs in surgical applications as parts used for bone repair and prostheses. Elasticity is one of important properties of QCs. The elastic equations of 3D elasticity of QCs are more complicated than those of classical elasticity. In QCs a phason displacement field exists in addition to a phonon displacement. All existing models of QC elastodynamics are given by partial differential equations and explain main features of phonon-phason motion. In our presentation a new method for the numerical computation of the time-dependent fundamental solution of three-dimensional elastodynamics in QCs is suggested. This method consists of the following. The dynamic equations of the motion for QCs are written in terms of the Fourier transform with respect to space variables as a vector ordinary differential equation with matrix coefficients depending on the Fourier parameters. Applying the matrix transformations and properties of matrix coefficients a solution of the vector ordinary differential equation is computed. Finally, the fundamental solution (Green's function) is computed numerically by the inverse Fourier transform. Computational experiments confirm the robustness of our method for the numerical computation of the values of the time-dependent Green's function of three-dimensional elastodynamics in QCs. Moreover, using our method, a visualization of the behavior of phonon and phason elastic fields, arising from pulse point forces in anisotropic quasicrystalline materials has been made. As a result, new knowledge about forms of fronts of elastic waves in quasi-crystalline materials has been obtained. The presentation is based on the research of works [1–5].

### REFERENCES

1. **Yakhno V. G., H. Cerdik Yaslan.** Approximate fundamental solutions and wave fronts for general anisotropic materials // *Intern. J. Solids and Structures*. 2012. V. 49. P. 853–864.
2. **Yakhno V. G., H. Cerdik Yaslan.** Equations of anisotropic elastodynamics as a symmetric hyperbolic system: deriving the time-dependent fundamental solution // *J. Computat. and Appl. Math.* 2011. V. 235. P. 4802–4815.
3. **Yakhno V. G., H. Cerdik Yaslan.** Computation of the time-dependent fundamental solution for equations of elastodynamics in general anisotropic media // *Computers and Structures*. 2011. V. 89. P. 646–655.
4. **Yakhno V. G., H. Cerdik Yaslan.** Three dimensional elastodynamics of 2D quasicrystals: The derivation of the fundamental solution // *Appl. Math. Modelling*. 2011. V. 35. P. 3092–3110.
5. **Yakhno V. G., H. Cerdik Yaslan.** Computation of the time-dependent Green's function of three dimensional elastodynamics in 3D quasicrystals // *CMES: Computer Modelling in Engineering and Sciences*. 2011. V. 81, N 3. P. 295–310.



## О ПОСТРОЕНИИ СВЯЗИ МЕЖДУ МЕХАНИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ДОЛЕРИТА В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО СЖАТИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ

Цой П. А.

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
Красный проспект, 54, Новосибирск, 630091 Россия;  
paveltsky@mail.ru*

В работе рассматривается вопрос установления взаимосвязи между множеством пределов прочности на одноосное сжатие, растяжение горной породы долерита и соответствующим множеством модулей упругости. Долерит представлен образцами цилиндрической формы с диаметром поперечного сечения 30 мм, высотами 60 мм и 30 мм. Серия испытаний на одноосное сжатие и косвенное растяжение вышеуказанного геоматериала проведена на гидравлической прессовой установке. Для определения связи между механическими параметрами применяется математическое моделирование методом искусственной нейронной сети. В качестве последней использована сеть с обратным распространением ошибки [1]. Нейросетевая архитектура включала в себя 2 входных нейрона (пределы прочности), 3 в скрытом слое и 2 на выходе (модули упругости). Показано, что на основе построенной модели можно удовлетворительно (коэффициент корреляции составляет 0.8) прогнозировать значения модулей упругости по измерениям соответствующих пределов прочности.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-05-01057-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Медведев В. С., Потемкин В. Г.** Нейронные сети. МАТЛАВ 6. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.
2. **Sonmez H., Gokceoglu C., Nefeslioglu H. A., Kayabasi A.** Estimation of rock modulus: For intact rocks with an artificial neural network and for rock masses with a new empirical equation // Intern. J. Rock Mechanics Mining Sci. 2006. V. 1, N 43. P. 224–235.

# Секция 6

---

## Неклассические задачи математической физики

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ — ЯНУШАУСКАСА

Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П.

*Уфимский государственный авиационный технический университет,  
Уфа, Россия; abdrai@mail.ru*

Пусть  $D$  — ограниченная область из пространства  $\mathbb{R}^n$ , части границы которой лежат на плоскостях  $x_n = 0$ ,  $x_n = \lambda$  ( $\lambda \neq 0$  — действительный параметр). Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$-x_n \Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Эта система при отсутствии множителя  $x_n$  (т. е. при отсутствии вырождения),  $\lambda = 2$ ,  $n = 2$  совпадает с классической системой А. В. Бицадзе [1], при  $\lambda \neq 2$ ,  $n \geq 2$  является предложенным А. И. Янушаускасом [2] ее многомерным аналогом, при наличии же множителя  $x_n$  ранее такая система не изучалась.

Обозначим через  $H$  функцию  $\sum_{k=1}^n \partial u_k / \partial x_k$ , через  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_\lambda$  части границы  $\Gamma$ , лежащие в плоскостях  $x_n = 0$  и  $x_n = \lambda$  соответственно, через  $\Gamma_1$  — оставшуюся часть границы  $D$ .

Краевая задача: найти решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u_j|_{\partial D} = f_j(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$H|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

$$u_n|_{\partial \Gamma_0}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Для данной задачи доказываем, что компоненты  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , находятся единственным образом, компонента же  $u_n$  определяется с точностью до произвольной функции  $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бицадзе А. В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
2. **Янушаускас А. И.** О многомерном аналоге системы А. В. Бицадзе // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 4. С. 816–819.

## НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

Алсыкова А. А.

*Бурятский государственный университет, ул. Ранжурова, 5, Улан-Удэ, 670000  
Россия; 888552@mail.ru*

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область пространства  $R^n$  с бесконечно дифференцируемой границей  $\Gamma$ ,  $Q$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$  конечной высоты  $T$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $b^{ij}(x, t)$ ,  $b^i(x, t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$ ,  $b(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $K(x, y, t)$  — заданные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  функции,  $A, B$  и  $L$  — операторы, действие которых на функцию  $v(x, t)$  определяются равенствами

$$Av = (a^{ij}(x)v_{x_j})_{x_i} + a(x)v,$$

$$Bv = b^{ij}(x, t)v_{x_i x_j} + b^i(x, t)v_{x_i} + b(x, t)v,$$

$$Lv = Av_{tt} + Bv.$$

**Краевая задача I:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, t) |_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy |_{(x,t) \in S}. \tag{3}$$

**Краевая задача II:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (3), а также условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} = a^{ij}(x)u_{x_j}(x, t)\nu_{x_i}(x) |_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy |_{(x,t) \in S}. \tag{4}$$

Здесь  $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  есть вектор внутренней нормали к  $\Gamma$  в текущей точке.

С использованием априорных оценок и метода продолжения по параметру доказана разрешимость и единственность решений данных задач в пространстве обобщенных функций.

## ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

**Аннин Б. Д.<sup>1</sup>, Бельмецев Н. Ф.<sup>2</sup>, Чиркунов Ю. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090 Россия;  
annin@hydro.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630090 Россия;  
chr01@rambler.ru*

Методами группового анализа получена и исследована эквивалентная системе уравнений движения трансверсальноизотропной упругой среды, удовлетворяющей условию Гассмана, система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, с помощью которой найдены некоторые точные решения исходных уравнений движения. Указан физический смысл этих решений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Трансверсальноизотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. мат. 2009. Т. 12, № 3. С. 5–14.
2. **Чиркунов Ю. А.** Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУЭУ, 2007.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

**Антипин В. И.**

*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677013, Россия; antvasiv@mail.ru*

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Mu \equiv B(t)u_t - L(t)u = f, \quad t \in (0, T), \quad T \leq \infty, \quad (1)$$

где  $B(t), L(t)$  ( $t \in (0, T)$ ) – линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве  $E$ . Предполагаем, что оператор  $B$  обратим, в частности, он может иметь ненулевое ядро. Определим пространства  $F_0, G_0$ , как пополнение  $D(|B(0)|^{1/2})$  и  $D(|B(T)|^{1/2})$  по нормам  $\|u\|_0 = \||B(0)|^{1/2}u\|$  и  $\|u\|_T = \||B(T)|^{1/2}u\|$  соответственно. Пусть также  $F_0^\pm = \{u \in F_0 : E^\pm(0)u = u\}$ ,  $G_0^\pm = \{u \in G_0 : E^\pm(T)u = u\}$ , где  $E^\pm(0), E^\pm(T)$  – спектральные проекторы операторов  $B(0)$  и  $B(T)$ , соответствующие положительной и отрицательной частям спектра [1,2].

Уравнение (1) дополним краевыми условиями

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad (T = \infty).$$

$$E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+,$$

$$E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^- \quad (T < \infty),$$

где операторы  $h_{ij}$  обладают свойствами:  $h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+)$ ,  $h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+)$ ,  $h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-)$ ,  $h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-)$ .

В работе сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности поставленных краевых задач для уравнения (1).

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и гранта Министерства образования и науки РФ №02. 740.11.0609.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пятков С. Г.** Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 111–124.
2. **Пятков С. Г.** Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск. 1986. С. 65–84.

## ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЯЗКО-ТРАНСЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Апаков Ю. П.

*Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан;*  
apakov.1956@mail.ru

В области  $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < l\}$ , где  $p, l = \text{const} > 0$ , рассмотрим вязко-трансзвуковое уравнение

$$Lu + \lambda u \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \quad (1)$$

со следующими краевыми условиями:

$$u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad (2)$$

$$u(0, y) = u_x(0, y) = u(p, y) = 0. \quad (3)$$

**Задача  $A_\lambda$ .** Найти те значение  $\lambda$ , при которых задачи (1)–(3) имеет нетривиальное решение.

Интегрируя тождество

$$uLu + \lambda u^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) - u_y^2 + \lambda u^2 = 0,$$

по области  $D$  и учитывая краевые условия (2) и (3), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(p, y) dy + \iint_D (u_y^2(x, y) - \lambda u^2(x, y)) dx dy = 0.$$

При  $\lambda \leq 0$  это равенство возможно в случае  $u(x, y) \equiv 0$ . Отсюда заключаем что, спектр задачи  $A_\lambda$  существует только при  $\lambda > 0$ .

Собственные значения задачи  $A_\lambda$  будут

$$\lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n = k_m^3 + \nu_n,$$

где  $\nu_n = (n\pi/l)^2$ ,  $k_m = \bar{k}_m + (-1)^m \varepsilon_m$ ,  $\bar{k}_m = [\pi/(\sqrt{3}p)](1/3 + 2m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , причем  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ .

Собственными функциями задачи  $A_\lambda$  являются

$$u_{mn}(x, y) = \left[ e^{-k_m x} + 2e^{k_m x/2} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} k_m x - \frac{\pi}{6} \right) \right] \sin \nu_n y.$$

Собственными функциями задачи  $A_\lambda^*$  являются

$$u_{mn}^*(x, y) = \left[ e^{k_m x} - e^{-k_m x/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_m x - \frac{\cos(\sqrt{3} k_m p/2) - e^{3k_m p/2}}{\sin(\sqrt{3} k_m p/2)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_m x \right) \right] \sin \nu_n y.$$

**Теорема.** Собственные значения задач  $A_\lambda$  и  $A_\lambda^*$  совпадают, а их собственные функции биортогональны.

## О МНОГООБРАЗИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Байзаев С.<sup>1</sup>, Воситова Д. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,  
ул. Белова, 21, Сибай, 453837 Россия; [baisat54@rambler.ru](mailto:baisat54@rambler.ru)

<sup>2</sup> Худжандский государственный университет, ул. Мавлонбекова, 2, Худжанд,  
735700 Таджикистан

Для линейных эллиптических и гиперболических систем первого порядка с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными вида

$$U_x + AU_y + BU = f(x, y) \quad (1)$$

рассмотрены задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

Приведем некоторые результаты. Пусть матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны и матрица  $A$  имеет  $n$  различных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответствующие собственные векторы. Тогда  $z_1, z_2, \dots, z_n$  будут собственными векторами и матрицы  $B$ . Через  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  обозначим собственные значения матрицы  $B$ , которым соответствуют собственные векторы  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . В этом случае (см. [1]) по аналогии с комплексными системами вида

$$W_{\bar{z}} + BW = 0$$

общее решение однородной системы соответствующей (1) имеет вид

$$U(x, y) = C(e^{-\mu_1 x} \varphi_1(\lambda_1 x - y), \dots, e^{-\mu_n x} \varphi_n(\lambda_n x - y))^T,$$

где  $C$  — матрица, столбцы которой это векторы  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $\varphi_j(z)$  — функции класса  $C^1$  в случае гиперболичности системы (1) и аналитические по  $z$  в случае эллиптичности системы (1).

Через  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  обозначим многообразие решений однородной системы, определенных во всей плоскости и удовлетворяющих при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$  условию роста

$$\|U(x, y)\| \leq K(1 + |x|^N + |y|^N),$$

где  $\|U\| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ ,  $N$  — целое неотрицательное число,  $K$  — постоянная, зависящая от  $U$ .  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  образует вещественное линейное пространство. Оказывается, что в гиперболическом случае, если все собственные значения матрицы  $B$  ненулевые, то пространство  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  будет нулевым, если же у матрицы  $B$  есть нулевое собственное значение, то  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  будет бесконечномерным. В эллиптическом случае пространство  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  будет конечномерным и его размерность равна  $2(N + 1)n$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск: НГУ, 1999.



**ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM  
WITH INTEGRAL GLUING CONDITION  
FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION  
WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR**

**Berdyshev A. S.<sup>1</sup>, Cabada A.<sup>2</sup>, Karimov E. T.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Kazakh National Pedagogical University named after Abai, prosp. Dostyk, 13, Almaty, 050010 Kazakhstan; berdyshev@mail.ru*

<sup>2</sup>*University of Santiago de Compostela, Campus Vida, Santiago de Compostela, 15782 Spain; alberto.cabada@usc.es*

<sup>3</sup>*Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan, Durmon yuli str., 29, Tashkent, 100125 Uzbekistan; erkinjon@gmail.com*

Consider equation

$$\begin{aligned} u_{xx} - D_{0y}^\lambda u &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

in the domain  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AA_0 \cup BB_0$ . Here

$$D_{0y}^\lambda g(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dy} \int_0^y (y-t)^{-\lambda} g(t) dt$$

is fractional differential operator in a sense of the Riemann-Liouville,  $\Omega_0$  is a rectangle  $ABA_0B_0$  ( $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $A_0 = (0, 1)$ ,  $B_0 = (1, 1)$ ),  $\Omega_1$  ( $\Omega_2$ ) is a domain bounded by the segment  $AA_0$  ( $BB_0$ ), characteristics  $A_0C$  ( $B_0D$ ) of (1) at  $x < 0$  ( $x > 1$ ) and by the smooth curve  $AC$ :  $x = -\gamma_1(y)$  ( $BD$ :  $x = -\gamma_2(y)$ ).

We assume regarding the curves  $\gamma_i(y)$  the followings:

- 1)  $\gamma_i(y)$  are twice continuously differentiable;
- 2)  $y \pm \gamma_i(y)$  are monotonically increasing;
- 3)  $\gamma_1(0) = 0$ ,  $\gamma_2(0) = -1$ ,  $l_1 + \gamma_1(l_1) = 1$ ,  $l_2 - \gamma_2(l_2) = 2$ ,  $0 < \gamma_1'(0) < 1$ ,  $\gamma_2'(0) < -1$ ,  $l_i = \text{const} \in (1/2, 1)$ .

**Problem.** To find a solution of (1) from the set of functions

$$\begin{aligned} W = \{u(x, y) : D_{0y}^{\lambda-1} u \in C(\overline{\Omega_0}), \quad u_{xx}, D_{0y}^\lambda u \in C(\Omega_0), \\ u \in C(\overline{\Omega_i}) \cap C^1(\Omega_i \cup AC \cup BD) \cap C^2(\Omega_i)\} \end{aligned}$$

satisfying initial condition

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\lambda-1} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

boundary conditions

$$(u_x - u_y)|_{AC} = 0, \quad (u_x + u_y)|_{BD} = 0, \quad u(0^-, 0^+) = u(1+0, 0^+) = 0$$

and gluing conditions

$$\begin{aligned} u_y(0^+, y) &= u_y(0^-, y), & u_y(1+0, y) &= u_y(1-0, y), & 0 < y < 1, \\ u_x(0^+, y) &= \alpha_1 u_x(0^-, y) + \beta_1 \int_0^x u_x(0^-, t) Q_1(y, t) dt, & 0 < y < 1, \end{aligned}$$

$$u_x(1-0, y) = \alpha_2 u_x(1+0, y) + \beta_2 \int_0^x u_x(1+0, t) Q_2(y, t) dt, \quad 0 < y < 1.$$

Here  $\alpha_i, \beta_i$  are constants such that  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ ,  $Q_i(y, t)$  are given continuous functions.

We prove the unique solvability of the formulated problem equivalently reducing it to the system of Volterra integral equations.

The first author was partly supported by the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan under grant No 973. The second author was partly supported by FEDER and Ministerio de Educacion y Ciencia, Spain, project MTM2010-15314. The third author was partly supported by the Ministry of higher and secondary special education (project ФЕ4-ФА-Ф015).

**ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА  
С ОПЕРАТОРОМ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА**

**Богатырева Ф. Т.**

*Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, ул. Шортанова, 89 а, Нальчик 360000, Россия; fatima.bogatyreva@bk.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где  $D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} = D_{0x}^{\gamma_{n-1}} D_{0x}^{\gamma_{n-2}} \dots D_{0x}^{\gamma_0}$  — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна порядка  $\alpha$  [1],  $D_{0x}^{\gamma_k}$  — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [2, с. 9],  $\alpha = \sum_{k=0}^n \gamma_k - 1 > 0$ ,  $0 < \gamma_k \leq 1$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $\lambda = \text{const}$ .

**Определение.** Регулярным решением уравнения (1) называется функция  $u = u(x)$  из класса

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) \in C[0, 1], \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) \in C]0, 1[$$

удовлетворяющая уравнению (1) в интервале  $(0, 1)$ .

В работе [1] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1). Исследованию нелокальной задачи с интегральным смещением для уравнения (1) посвящена работа [3].

**Задача.** Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) = u_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2)$$

$$u(1) = \sum_{i=1}^m a_i u(x_i), \quad (3)$$

где  $u_k$  — заданные действительные числа,  $x_i \in [0, 1)$ .

В работе построено явное представление решения задачи (1)–(3) в терминах функции Миттаг — Леффлера и найдено условие однозначной разрешимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. 1968. Т. 3, № 1. С.3–28.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
3. Богатырева Ф. Т. Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Джрбашяна — Нерсесяна / Материалы VIII Школы молодых ученых “Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики”. Нальчик-Хабез, 2010. С. 25–26.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Бондарь Л. Н.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4,  
Новосибирск, 630090 Россия; b\_lina@ngs.ru*

В работе рассматривается первая краевая задача в полупространстве  $R_+^n = \{x = (x', x_n) : x' \in R^{n-1}, x_n > 0\}$  для полигармонического уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta^{2l}u + \varepsilon(-1)^l \Delta^l u &= f(x), \quad x \in R_+^n, \\ D_{x_n}^{j-1}u|_{x_n=0} &= 0, \quad j = 1, \dots, 2l, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Устанавливается разрешимость краевой задачи (1) в соболевском пространстве  $W_p^{4l}(R_+^n)$  при  $p > n/(n - 2l + 1)$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $p > n/(n - 2l + 1)$  и  $f(x) \in L_p(R_+^n) \cap L_1(R_+^n)$ ,  $x_n f(x) \in L_1(R_+^n)$ . Тогда краевая задача (1) однозначно разрешима в соболевском пространстве  $W_p^{4l}(R_+^n)$ , и для решения  $u(x)$  справедлива оценка

$$\|u(x), W_p^{4l}(R_+^n)\| \leq c(\|f(x), L_p(R_+^n)\| + \|(1 + x_n)f(x), L_1(R_+^n)\|)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $f(x)$ .

**Замечание 1.** Отметим, что ограничение на  $p$ , указанное в теореме, по существу. Оказывается, что даже в случае  $f(x) \in C_0^\infty(R_+^n)$ , для разрешимости краевой задачи в  $W_p^{4l}(R_+^n)$  при  $1 < p \leq n/(n - 2l + 1)$  необходимо накладывать дополнительные условия на  $f(x)$ . Например, для краевой задачи вида (1) при  $l = 1$  необходимое условие разрешимости в  $W_p^4(R_+^n)$ ,  $1 < p \leq n/(n - 1)$ , имеет вид:

$$\int_{R_+^n} \left( x_n + \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}x_n} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) f(x) dx = 0.$$

**Замечание 2.** Отметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  теорема не имеет места. Краевая задача (1) в случае  $\varepsilon = 0$  однозначно разрешима в  $W_p^{4l}(R_+^n)$  при  $p > n/(n - 4l + 1)$ . Для разрешимости при  $1 < p \leq n/(n - 4l + 1)$  необходимо накладывать дополнительные условия вида ортогональности  $f(x)$  некоторым полиномам. Так, для разрешимости краевой задачи (1) при  $l = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ , в  $W_p^4(R_+^n)$ ,  $1 < p \leq n/(n - 3)$ , необходимо, чтобы:

$$\int_{R_+^n} x_n f(x) dx = 0.$$

Доказательство утверждений базируется на методике, предложенной в работе [1].

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт 02.740.11.0127) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Демиденко Г. В.** Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.

## FABIO METHOD CORRECTION IN PARTICULAR CASE

Bondarenko A. N.<sup>1</sup>, Gunkin A. Y.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, prosp. Acad. Koptiyug, 4, Novosibirsk, 630090 Russia; bondarenkoan1953@mail.ru*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State Technical University, Karl Marx Avenue, 20, Novosibirsk, 630092 Russia; shamrock24@mail.ru*

Let us consider high-temperature expansion of the magnetic susceptibility for two-dimensional Ising model on a infinitely ramified fractal

$$\chi(\nu) = 1 + \sum_{r \geq 1} d_r \nu^r,$$

where

$$\nu = th(\beta J), d_r = \sum_{g \in G_r} 2\Gamma(g)W_r(g), \beta = 1/kT.$$

Here,  $G_r$  is the set of nonclosed graphs of length  $r$ ;  $W_r(g)$  is a graph weight or the number of its symmetries, which are not compatible by overlapping;  $\Gamma(g)$  is the number of graph embeddings into the infinite fractal lattice per one site.

High-temperature expansion coefficients can be found combinatorially. To do this we have to calculate the limit for each considered graph

$$\Gamma(g) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{G(l)}{N(l)},$$

we use the method proposed by D.A. Fabio Aarao Reis [1] for computing it.

The number of embeddings  $G(l)$  in the lattice at a step  $l_0$  is calculated as

$$G(l) = A(b^2 - m)^l + Bb^l + C,$$

where

$$A = \frac{1}{(b^2 - m)l_0} \left[ G(l_0) + \frac{H_1(l_0) + C_1}{b^2 - b - m} + \frac{H_2(l_0) - C_1}{b^2 - m - 1} \right].$$

On the other hand, the total number of lattice sites is given by

$$G(l) = A'(b^2 - m)^l + B'b^l + C',$$

where

$$A' = \frac{N(1)}{(b^2 - m)} - \frac{L_\nu(1)b}{(b^2 - m)(b^2 - m - b)} + \frac{N_\nu(1) - L_\nu(1)}{(b^2 - m)(b^2 - m - 1)}$$

therefore

$$\Gamma(g) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{G(l)}{N(l)} = \frac{A}{A'}.$$

Formulas, proposed by D. A. Fabio Aarao Reis were refined for several particular cases of graphs. The new expressions for calculating the coefficients of the magnetic susceptibility high-temperature expansion were obtained. Computational study was carried out and the findings were compared with previously known results. It was found out that the resulting formulas give more accurate values than presiding ones.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-01-00105 a) and Interdisciplinary Integration Project of SB RAS No. 14, “Inverse Problems and Applications: Theory, Algorithms, and Programs”.

### REFERENCES

1. **Fabio Aarao Reis D. A., Riera R.** High-temperature series expansion for Ising-like systems on fractals // Phys. Rev. 1994. V. 49, N 4. P. 2579–2587.

## МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МАКСИМУМОВ МОДУЛЕЙ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Бондаренко А. Н., Иванов В. В.

*Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия*

В настоящее время теория фракталов и мультифракталов широко используется для описания самоподобия и сложного скейлинга, наблюдаемых в самых разных физических ситуациях [1].

В данной работе было рассмотрено несколько примеров применения метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) для количественного описания эффектов хаотической и стохастической синхронизации нелинейных динамических систем.

Для изучения явления синхронизации хаоса нами была выбрана модель двух взаимодействующих систем Ресслера

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + Ay_{1,2}, \quad \frac{dz_{1,2}}{dt} = B + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметры  $A$ ,  $B$  и  $\mu$  определяют режим динамики каждой системы,  $\gamma$  — параметр связи,  $\omega_1 = \omega_0 + \delta$ ,  $\omega_2 = \omega_0 - \delta$  — базовые частоты,  $\delta$  — расслойка между ними. Анализ различных режимов хаотических колебаний в системе (1) показал, что степень мультифрактальности значительно меньше для любого типа синхронной динамики по сравнению со степенью мультифрактальности в режимах вне области синхронизации. Применение метода ММВП позволяет рассматривать синхронизацию хаоса как эффект перехода от сложной мультифрактальной динамики, характеризующейся широким спектром гельдеровских экспонент, к более простой монофрактальной динамике, описываемой одним показателем скейлинга.

Эффект стохастического резонанса мы рассматривали на примере модели передемпфированного бистабильного осциллятора

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + I\xi(t) + A \sin(\Omega t + \phi),$$

где  $\xi(t)$  — белый шум,  $I$  — интенсивность шума,  $A$  — амплитуда внешнего воздействия, которая является малой величиной.

Наши расчеты показали, что изменение параметра  $I$  существенно изменяет структуру спектра сингулярностей, и при достаточно большом значении эффект стохастического резонанса сопровождается потерей мультифрактальности в данной модели.

Нами был разработан программный комплекс для проведения мультифрактального анализа методом ММВП и проведено его тестирование при описании известных явлений динамики нелинейных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00105), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы”.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А. Н., Анищенко В. С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–876.
2. Павлов А. Н., Павлова О. Н. Анализ корреляционных свойств случайных процессов по сигналам малой длительности // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 7. С. 71–78.

## МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

Вайнштейн И. И.

*Сибирский федеральный университет, ул. Акад. Куренского, 26,  
Красноярск, 660074 Россия; isvain@mail.ru*

В теории линейных уравнений смешанного типа каноническим уравнением является уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

В работе рассматривается нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} U \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

которое по форме можно считать нелинейным аналогом уравнения Лаврентьева — Бицадзе. При  $U > 0$  уравнение (1) — эллиптического типа, при  $U < 0$  — гиперболического типа.

**Определение.** Пусть в области  $D$  рассматривается некоторая краевая задача для уравнения (1). Решение задачи, не меняющее тип уравнения во всей области, будем называть тривиальным. Если во всей области  $D$  решение  $U < 0$ , то оно тривиальное гиперболическое, если во всей области  $D$  решение  $U > 0$  — тривиальное эллиптическое. Решение, меняющее знак, будем называть решением, меняющим тип уравнения.

У решения, меняющего тип уравнения, имеется линия, на которой оно обращается в ноль. Естественным требованием к решению является непрерывность его частных производных первого порядка в точках этой линии.

Если задана область, в которой ищется решение, и краевые условия, то задачу можно считать задачей с неизвестной линией раздела уравнения (1) по типу.

Возможны и другие подходы к постановке краевых задач. Например, обратная задача, когда задается кривая, при переходе которой решение должно изменить тип уравнения. Требуется определить область (содержащую эту кривую), на границе которой должны удовлетворяться задаваемые краевые условия.

В работе рассмотрены модельные задачи для уравнения (1) с краевыми условиями Дирихле, Неймана, Коши, Гурса, Трикоми.

**Задача Дирихле.** Пусть  $D$  — круг радиуса  $R$  ( $r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2$ ) и  $U|_{r=R} = H$ .

При  $H > 0$  наряду с одним тривиальным эллиптическим решением, имеется бесконечное число решений, меняющих тип уравнения, т.е. имеется бесконечное число окружностей радиуса  $r = a$  ( $0 < a < R$ ), на которых  $U = 0$ . Или для любой заданной окружности радиуса  $r = a$  существует бесконечное число кругов  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $R > a$ , при переходе через которую уравнение меняет тип. При  $H < 0$  имеется бесконечное число тривиальных гиперболических решений.

**Задача Неймана,** если  $D$  — круг радиуса  $R$  и  $\partial U / \partial r|_{r=R} = K > 0$ , имеет бесконечное число решений, меняющих тип уравнения.

**Задача Коши,** если  $D$  — круг радиуса  $R$  и  $U|_{r=R} = H > 0$ ,  $\partial U / \partial r|_{r=R} = K > 0$ , имеет единственное решение, меняющее тип уравнения.

**Задача Трикоми.** Для области, характерной для задачи Трикоми, имеется решение, меняющее тип уравнения, если задавать граничное условие только при  $y > 0$  или только на одной характеристике, что отличается от классической постановки задачи Трикоми для линейного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Решения рассмотренных задач получены в явном виде.

Вышеописанные примеры указывают на возможность новых постановок краевых задач, а также на возможность неожиданных эффектов в вопросах существования и единственности решения.



## НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Волчков Ю. М.<sup>1</sup>, Богульский И. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090 Россия;  
volk@hydro.nsc.ru*

<sup>2</sup>*Красноярский государственный аграрный университет,  
пр. Мира, 90, Красноярск, 660049 Россия;  
bogul@icm.krasn.ru*

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера (классические теории оболочек), либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций (неклассические теории оболочек) [1]. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения. Решение контактных задач на основе таких уравнений зачастую приводит к эффектам нефизического характера. Применение разложений решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения оболочек в различных приближениях. При этом одним из основных вопросов является следующий: на основе каких дополнительных предположений строится то или иное приближение; а именно, сколько членов в разложениях нужно удерживать при построении данного приближения? Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему функций интегрируемых с квадратом на отрезке  $[-1, 1]$ , именно эта система функций обычно используется при построении уравнений теории оболочек. В докладе излагаются дифференциальные уравнения упругих оболочек в первом приближении, построенные на основе нескольких аппроксимаций каждой из искомых функций отрезками полиномов Лежандра. Такие уравнения обеспечивают корректную формулировку условий на лицевых поверхностях оболочки как в перемещениях, так и в напряжениях [2]. Это позволяет построить уравнения слоистых оболочек с использованием условий сопряжения на межслойных поверхностях. Приводятся численные алгоритмы определения напряженно-деформированного состояния в слоистых оболочках.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: НГУ, 1980.
2. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 169–176.

## ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Гадзова Л. Х.

*Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, 360000 Россия; macaneeva@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^\alpha u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i} u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in ]n - 1, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$ ;  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $D_{0x}^\beta u(x)$  оператор дробного интегро-дифференцирования порядка  $\beta$  в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9] по переменной  $x$ .

*Регулярным решением* уравнения (1) называем функцию  $u = u(x)$ , такую, что  $u(x) \in L(0, 1)$ ,  $D_{0x}^{\alpha-n} u(x) \in C^n(0, 1)$ ;  $u(x)$  удовлетворяет уравнению (1) для всех  $0 < x < 1$ .

**Задача.** Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале  $(0, 1)$ , удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) = a_k, \quad k = \overline{1, p}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} D_{0x}^{\mu_j} u(x) = b_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad (3)$$

где  $p + q = n$  при  $n \geq 2$ ,  $\mu_j \leq 0$ ,  $a_k, b_j$  — заданные вещественные числа,

$$(\ell^k u)(x) = D_{0x}^{\alpha-k} u(x) - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k} u(x),$$

$$M(k) = \begin{cases} 0, & \alpha_i < \alpha - n + k, \\ \max \{i : \alpha_i - k \geq \alpha - n\}, & \alpha_i \geq \alpha - n + k. \end{cases}$$

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего группу младших членов с производными Римана — Лиувилля исследовалась в работе [2]. В монографии [1] даны постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка  $\alpha \in [1, 2]$ . В работах [3, 4] исследовалась начальная задача для уравнения (1). Краевая задача для уравнения (1) была изучена в работе [5]. В данной работе построено явное представление решения краевой задачи для уравнения (1) и найдено условие однозначной разрешимости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Нахушев А. М. Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
3. Псху А. В. К теории задачи Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 1. С. 61–65.
4. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 200, № 4. С. 111–122.
5. Гадзова Л. Х. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 47–49.

## О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Гадоев М. Г.

*Мурнинский политехнический институт, ул. Тихонова 5/1,  
Мурный, 678170 Россия; gadoev@rambler.ru*

В докладе речь идет об исследовании некоторых спектральных свойствах несамосопряженного оператора  $A$  в пространстве  $\mathcal{H}^l = L_2(0, 1)^l$ , ассоциированного с некоэрцитивной билинейной формой:

$$A[u, v] = \sum_{i,j=0}^m \int_0^1 \langle p_i(t) a_{ij}(t) u^{(i)}(t), p_j(t) v^{(j)}(t) \rangle_{\mathbf{C}^l} dt$$

с областью определения  $D[A] = \mathcal{H}_+^l$ .

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i = \overline{0, m}), \quad \theta < m, \quad u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$

$$a_{ij} \in L_\infty(J; \text{End } \mathbf{C}^l) \quad (i, j = \overline{0, m}), \quad \mathcal{H}_+ = \overset{\circ}{W}_{2,\theta}^m(J),$$

где  $J = (0, 1)$ . Символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}^l}$  обозначает скалярное произведение в  $\mathbf{C}^l$ .

Данная работа примыкает к работам [1-3], в которых наиболее общие результаты получены в [3], где предполагается, что старший коэффициент оператора  $A$

$$a(t) \in C^m([0, 1]; \text{End } \mathbf{C}^l)$$

и имеет простые различные с.з. при каждом  $t \in [0, 1]$ .

Из последних работ в этом направлении отметим [4, 5]. Но в отличие от [4, 5], в данной работе предполагается наличие у матрицы  $a(t)$  нетривиальных жордановых блоков.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-функций оператора  $A$  в  $\mathcal{H}^l$ , суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов  $f \in \mathcal{H}^l$  по системе корневых вектор-функций оператора  $A$ , оценка резольвенты оператора  $A$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бойматов К. Х.** Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряженных операторов // Функ. анализ и его приложения. 1997. Т. 11, № 4. С. 74–75.
2. **Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.** Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем // Математический сборник. 1990. Т. 181, № 12. С. 1678–1693.
3. **Agranovich M. S., Markus A. S.** On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1989. Bd 8, N 3. S. 237–260.
4. **Гадоев М. Г.** Спектральная асимптотика несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами на отрезке // Уфимский мат. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 26–54.
5. **Gadov M. G., Iskhokov S. A.** Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients. Centre de Recerca Matemàtica (Barcelona), 2011. Preprint series number 1078.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ  
С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ  
С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА**

**Гималтдинова А. А.**

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия, просп. Ленина, 49,  
Стерлитамак, 453103 Россия; g.alfira@mail.ru*

Рассмотрим смешанное эллипτικο-гиперболическое уравнение с двумя линиями изменения типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} - \lambda u = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda \in \mathbf{C}$ , в области  $D$ , ограниченной гладкой кривой  $\Gamma$  в первой четверти плоскости  $(x, y)$  с концами в точках  $A_1(l_1, 0)$  и  $A_2(0, l_2)$ ,  $l_1, l_2 > 0$ , характеристиками  $OC_1$  и  $C_1A_1$  уравнения (1) при  $x > 0, y < 0$ , характеристиками  $OC_2$  и  $C_2A_2$  при  $x < 0, y > 0$ , где  $C_1 = (l_1/2, -l_1/2)$ ,  $C_2 = (-l_2/2, l_2/2)$ ,  $O = (0, 0)$ . Обозначим  $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ ,  $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ ,  $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$ .

**Задача Т.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$u(x, y)|_{C_1C_2} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C_1C_2,$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — заданные достаточно гладкие функции.

Доказано, что решение задачи единственно при

$$\frac{(\operatorname{Re} \lambda + (3/8)p)^2}{(p/8)^2} - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{(p/\sqrt{8})^2} > 1, \quad \operatorname{Re} \lambda > -\frac{p}{3},$$

$p$  — константа, зависящая от размеров области  $D_0$ .

Доказательство основано на следующем тождестве

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda_0 - a_1^2) \iint_{D_0'} |v|^2 dx dy + (\operatorname{Re} \lambda_0 - a_2^2) \iint_{D_0''} |w|^2 dx dy + \iint_{D_0'} |\nabla v|^2 dx dy \\ & + \iint_{D_0''} |\nabla w|^2 dx dy + \operatorname{Re} \int_0^{l_1} e^{-2a_1 x} \bar{u}(x, 0) u_y(x, 0) dx + \operatorname{Re} \int_0^{l_2} e^{-2a_2 y} \bar{u}(0, y) u_x(0, y) dy \\ & + \int_{OK} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |w|^2 + a_2 |w|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |v|^2 \right) dx + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |v|^2 + a_1 |v|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |w|^2 \right) dy = 0, \end{aligned}$$

где  $D_0' = D_0 \cap \{y < x\}$ ,  $D_0'' = D_0 \cap \{y > x\}$ ,  $v(x, y) = e^{-a_1 x} u(x, y)$ ,  $w(x, y) = e^{-a_2 y} u(x, y)$ ,  $u(x, y)$  — решение уравнения (1), равное нулю на  $\Gamma$ ,  $OK$  — отрезок прямой  $y = x$ , лежащий в области  $D_0$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$ . Также используется неотрицательность

интегралов вида  $\operatorname{Re} \int_0^{l_i} e^{-2a_i t} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} dt$ .

## МУЛЬТИСИМПЛЕКТИЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДВУХВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НАКОРЯКОВА — ПОКУСАЕВА — ШРЕЙБЕРА

**Горбенко Н. И.**

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6,  
Новосибирск, 630090 Россия; nikolay.gorbenko@gmail.com*

В докладе рассматриваются разностные схемы для исследования и распространения взаимодействия нелинейных солитоноподобных волн в жидкости с пузырьками газа, описываемые двухволновым уравнением Накорякова — Покусаева — Шрейбера

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \alpha \frac{\partial^2 (p^2)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

Здесь  $c_0$  — скорость звука в невозмущенной среде,  $c_1$  — скорость звука в чистой жидкости,  $\beta$  — параметр дисперсии,  $\alpha$  — коэффициент нелинейности [1].

Уравнение (1) может быть переформулирована как система первого порядка и записана в мультисимплектической гамильтоновой системе уравнений в частных производных [2]

$$Kz_t + Lz_x = \nabla_z S(z), \quad z \in R^5, \quad (2)$$

где  $S(z) = (p^2 + \beta v^2 + q^2 - \beta c_1^2 w^2 - 2\alpha p^3/3)/2$  — ковариантная гамильтонова функция,  $z^\top = [p, u, v, q, w]$ ,  $K$  и  $L$  — косо-симметричные матрицы следующего вида:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c_0^2 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta c_1^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для мультисимплектической формулировки (2) уравнения Накорякова — Покусаева — Шрейбера (1) получены две мультисимплектические конечно-объемная разностная схемы, то есть удовлетворяющие разностному аналогу мультисимплектичности уравнения (2), порядка  $O(\tau^2, h^2)$ , для которых имеют место локальные законы сохранения энергии и момента.

Численные эксперименты показывают, что новые схемы демонстрирует хорошую устойчивость и точность при долговременных вычислениях.

Работа поддержана интеграционным грантом СО РАН ИП-59, а также грантом Правительства РФ N 11.634.31.035 (НГУ).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Накоряков А. А., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Волновая динамика паро- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990.
2. **Bridges T. J., Reich S.** Multisymplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity // Phys. Lett. 2001. V. A-284, N 4-5. P. 184–193.

## NONLOCAL PARABOLIC EQUATION FROM ISOTROPIC TURBULENCE

Grebenev V. N.<sup>1</sup>, Oberlack M.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Computational Technologies,  
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, prosp. Acad. Lavrentjev, 6,  
Novosibirsk, 630090 Russia; vngrebenev@gmail.com*

<sup>2</sup>*Technische Universität Darmstadt, Petersenstr. 30,  
Darmstadt, 64287 Germany; oberlack@fdy.tu-darmstadt.de*

The resulting equation (the closed von Kármán-Howarth equation) that we use in order to study homogeneous isotropic dynamics reads

$$\frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^4 \left( r \sqrt{B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t)} \frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial r} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial r} \right) \right] \quad (1)$$

which subject to the following initial-boundary value conditions

$$B_{LL}(r, 0) = B_{0LL}(r), \quad r \geq 0, \quad (2)$$

$$B_{LL,L}(r, t) \equiv 2\kappa_2 r \frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial r} = 0, \quad \text{for } r = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$B_{LL}(r, t) \rightarrow 0, \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

where  $B_{LL}(r, t)$  is the longitudinal correlation function. Equation (1) directly follows from the averaged Navier-Stokes equations under the closure relationship suggested in [1, 2] for the the von Kármán-Howarth equation. Equation (1) is the lowest-order two-point statistical equation for turbulence dynamics and may be understood as a relationship between the rate of change of energy in scales  $\sim r$  to the flux of energy through scales  $\sim r$ .

At first, we review the results of group analysis of the von Kármán-Howarth equation and indicate that the closure relationship suggested in [1, 2] is a differential invariant of the two-parametric scaling groups admitted by the von Kármán-Howarth equation in the limit of large Reynolds numbers. Then we exhibit a 1-parameter family (parametrized by the quantity  $\sigma$  related to the decay of correlation functions) of the self-similar solutions [3] (see also [4]) of the closure model for the von Kármán-Howarth equation and present several interesting geometric properties [5] of the self-similar solution that was obtained in [1, 3] for a particular case of the parameter  $\sigma$  determined by Symmetry Analysis. We fix the decay law of isotropic turbulence at higher Reynolds number to introduce the so-called similarity representation of solutions to the initial-boundary value problem under consideration and then we establish the well-posedness of this problem. Finally, both the large time behavior of the solution obtained and the asymptotic as the spatial self-similar variable tends to infinity are given.

The first author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No 12-01-00648.

### REFERENCES

1. **Lytkin Y. M., Chernykh G. G.** About one way of the von Kármán-Howarth equation closure // *Dynam. Cont. Medium.* 1976. V. 27. P. 124–130.
2. **Oberlack M., Peters N.** Closure of the two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models // *Appl. Sci. Res.* 1993. V. 55. P. 533–538.
3. **Oberlack M.** On the decay exponent of isotropic turbulence // *PAMM.* 2000. V. 1. P. 294–297.
4. **Liu Z., Oberlack M., Grebenev V. N., Liao S.** Explicit series solution of a closure model for the von Kármán-Howarth equation by means of the homotopy analysis method // *ANZIAM J.* 2011. V. 52. P. 179–202.
5. **Grebenev V. N., Oberlack M.** A geometric interpretation of the second-order structure function arising in turbulence // *Math. Phys. Anal. Geom.* 2009. V. 12. P. 1–18.

## О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДЗЕКЦЕРА

Давыдов П. Н.

*Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; davydov@csu.ru*

Многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, моделирующих различные реальные процессы, могут быть исследованы в рамках задачи Шоуволтера

$$Pu(t_0) = u_0, \quad (1)$$

$$L \dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (2)$$

Здесь  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — банаховы пространства, оператор  $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  линеен и непрерывен,  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $M : \text{dom}M \rightarrow \mathfrak{F}$  линеен, замкнут и плотно определен в  $\mathfrak{U}$ , оператор  $N : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  нелинеен.

**Определение 1.** *Сильным решением* задачи (1), (2) назовем функцию  $\dot{u} \in H^1(t_0, T; X)$ , для которой выполняется условие (1) и при почти всех  $t \in [t_0, T]$  справедливо равенство (2).

При условии сильной  $(L, p)$ -радиальности оператора  $M$  пространства  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  представимы в виде прямых сумм  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$  [1]. Обозначим  $M_1 = M|_{\mathfrak{U}^1 \cap \text{dom}M}$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $\mathfrak{U}$  — рефлексивное банахово пространство, оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален, оператор  $N : [t_0, T] \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$  липшицев по двум переменным,  $\text{im}N \subset \mathfrak{F}^1$ . Тогда для любого  $u_0 \in \text{dom}M_1$  задача (1), (2) имеет единственное сильное решение на  $[t_0, T]$ .*

**Пример.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ ,  $n < 4$ ,  $g : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем искать функцию  $z = z(x, t)$ , определенную в цилиндре  $\bar{\Omega} \times [t_0, T]$ , удовлетворяющую в нем соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)z_t(x, t) &= \alpha\Delta z(x, t) - \beta\Delta^2 z(x, t) + (\lambda - \Delta)g(t, x, z(x, t)), \\ (x, t) &\in \Omega \times [t_0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

$$z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \quad (\lambda - \Delta)z(x, t_0) = z_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Это начально-краевая задача для модифицированного уравнения Дзекцера, моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [2]. Здесь  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}_+$  — параметры, характеризующие среду.

**Теорема 3.** *Пусть  $n < 4$ ,  $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$ ,  $g \in C^3([t_0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ , функции  $(\lambda - \Delta)g_t$ ,  $(\lambda - \Delta)g_z$  ограничены на  $[t_0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ,  $z_0 \in H^4(\Omega)$  такое, что  $z_0(x) = \Delta z_0(x) = 0$  для  $x \in \partial\Omega$ ,  $\int_{\Omega} z_0(x) \varphi_k(x) dx = 0$  при  $\lambda_k = \lambda$ . Тогда задача (3), (4) имеет единственное сильное решение на  $[t_0, T]$ .*

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-96007-р-урал.а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.
2. Дзекцер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Демиденко Г. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 Россия; demidenk@math.nsc.ru*

В работе рассматривается проблема приближенного нахождения решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{n-1}{\tau}x_1 + g(t, x_n), \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}x_{j-1} - \frac{n-1}{\tau}x_j, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}x_{n-1} - \theta x_n, \quad x|_{t=0} = x^0, \quad \theta \geq 0, \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Размерность системы  $n$  определяется числом стадий,  $x_j(t)$  — концентрация вещества на  $j$ -й стадии. В случае большого числа стадий возникает проблема нахождения компонент решения задачи (1). Способ решения этой “проблемы большой размерности” для последней компоненты  $x_n(t)$  изложен в работах [1, 2]. Он заключается в сведении (1) к начальной задаче для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau; \quad y(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (2)$$

Для приближенного построения компонент  $x_k(t)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  при  $n \gg 1$  будем использовать псевдодифференциальное уравнение

$$\frac{\tau}{n-1}u_t - i \sin\left(\frac{i}{n-1}D_z\right)u + 2 \sin^2\left(\frac{i}{2(n-1)}D_z\right)u = 0 \quad (3)$$

и решение  $y(t)$  начальной задачи (2). На основе предельных теорем из работ [2, 3] предлагается находить приближенные значения  $x_k(t)$  в виде  $u(t, z_k)$ ,  $z_k = (k-1)/(n-1)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , где  $u(t, z)$  — решение следующей краевой задачи для второго приближения уравнения (3) при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\tau u_t + u_z - \frac{1}{2(n-1)}u_{zz} = 0, \quad t > 0, \quad z \in (0, 1),$$

$$u|_{t=0} = u^0(z), \quad u|_{z=0} = \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)}g(s, y(s)) ds, \quad u|_{z=1} = y(t).$$

Работа частично была поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (государственный контракт 16.740.11.0127), РФФИ (грант 10-01-00035) и СО РАН (междисциплинарный проект 80).



ЛИТЕРАТУРА

1. **Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.** Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. **Демиденко Г. В., Мельник И. А.** Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. **Демиденко Г. В.** О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом / Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Т. 5. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 45–56.

**О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ  
НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА  
ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА  
В ПРОСТРАНСТВЕ**

Джамалов С. З.

*Высший военный таможенный институт,  
ул. Козиробод, 118 проезд 2, Ташкент, 100071 Узбекистан;  
siroj63@mail.ru*

Пусть  $\Omega$  — ограниченная односвязная область в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ .

Обозначим через  $Q = \Omega \times (0, T) = \{(x, t): x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$  цилиндрическую область с боковой границей  $S = (0, T) \times \partial\Omega$ .

В цилиндрической области  $Q$  рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x, t)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x)u_{x_j}) + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

В нижеприведенных формулах по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до  $n$ . Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области  $Q$

Пусть выполнено условие  $a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ ,  $a_0 = \text{const} > 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;  $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ .

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции  $K(x, t)$  по переменной  $t$  внутри области  $Q$  не налагается никаких ограничений.

**Нелокальная краевая задача.** Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям.

$$u(x, 0) = \gamma(x)u(x, T), \quad (2)$$

$$u|_S = 0. \quad (3)$$

В данной работе, изучено два случая.

**Первый случай.** Сначала рассматривается случай, когда  $\gamma = \text{const} \neq 0$  и  $K(x, 0) \leq 0 \leq K(x, T)$ . В этом случае доказана корректность и гладкость решения задачи (1)–(3) из пространства С. Л. Соболева  $W_2^l(Q)$ , где  $2 \leq l$  — целое число.

**Второй случай.** В случаи, когда  $\gamma$  — некоторая функция от переменных  $x$ , т. е.  $\gamma(x)$  и  $K(x, 0) = K(x, T) = 0$  доказана разрешимость задачи (1)–(3) из пространства С. Л. Соболева  $W_2^3(Q)$ .

## ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дженалиев М. Т.<sup>1</sup>, Космакова М. Т.<sup>2</sup>, Рамазанов М. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики, информатики и механики,*

*ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010 Казахстан; muvasharkhan@gmail.com*

<sup>2</sup>*Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова,*

*ул. Университетская, 28, Караганда, 100028 Казахстан;*

*Svetik\_mir69@mail.ru, ramamur@mail.ru*

Круг вопросов, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с необходимостью решения модельных задач для уравнений нестационарного переноса в областях с подвижной границей, весьма широк. Подобные проблемы возникают при теоретическом изучении процессов переноса энергии или массы, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, в теории хрупкого разрушения при исследовании роста поверхностной трещины, в теории плотин, в механике почв, в термике нефтяных пластов и т.д. В связи с постоянным увеличением объема использования контактной техники актуальными являются проблемы оптимального выбора параметров контактных материалов и режимов их работы. Поэтому изучение теплофизических процессов, происходящих в контактах, является необходимым условием новых достижений в автоматике и приборостроении, сварочной технике, электротехнической аппаратуре и в различных устройствах, где контактные элементы служат одним из основных звеньев. Вследствие зависимости размера области от времени, тем более когда область вырождается в некоторых точках, к этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований, так как оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Поэтому вопрос об исследовании краевых задач в области с вырождением в начальный момент времени является актуальным. Рассмотрение широкого круга вопросов математической физики, в частности, решение краевых задач уравнения теплопроводности в вырождающихся областях, приводит к необходимости исследования особых интегральных уравнений Вольтерра.

Рассмотрим первую краевую задачу теплопроводности в вырождающейся области (области с подвижной границей): в области  $G = \{(x; t): t > 0, 0 < x < t\}$  найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x, t)|_{x=0} = v(t), \quad u(x, t)|_{x=t} = \omega(t). \quad (2)$$

Функции  $v(t)$  и  $\omega(t)$  считаем непрерывными. Если потребуется, чтобы решение было непрерывным в окрестности  $t = 0$ , необходимо наложить дополнительно условие согласования  $v(0) = \omega(0)$ .

В работе с помощью сведения к особому интегральному уравнению и использованием результатов работ [1, 2] доказано существование нетривиального решения однородной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения — как возмущения интегральных уравнений. ФЫЛЫМ, Алматы, 2010.
2. Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 3–14.

## ДВА ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО КРУГЛОГО СПЛОШНОГО СТЕРЖНЯ

Дильман В. Л., Ерошкина Т. В.

*Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск,  
454080 Россия; etv1980@mail.ru*

Осесимметричные задачи теории пластичности, в отличие от некоторых плоских задач, представляют существенные трудности для теоретического исследования вследствие отсутствия точных методов нахождения инвариантов Римана для системы уравнений пластического равновесия. Это приводит к необходимости построения приближенных математических моделей напряженного состояния осесимметричных конструкций. В докладе рассматривается напряженное состояние сплошного круглого стержня из однородного изотропного идеально пластичного или упрочняемого материала, содержащего вставку (поперечную прослойку) из менее прочного материала. Стержень подвержен осевой растягивающей нагрузке. Предлагаются два подхода к построению и исследованию приближенной модели, в обоих случаях с использованием гипотезы плоских поперечных сечений (или более общей гипотезы параболических сечений). В первом [1] уравнения равновесия заменяются на приближенные, однородные относительно производных, что позволяет найти их первые интегралы вдоль характеристик. Другой подход основан на непосредственном приближенном нахождении [2] инвариантов Римана, с использованием некоторых упрощающих предположений относительно вида характеристик. В обоих случаях решается задача сопряжения для напряжений на контактной границе и, в конечном счете, находятся приближенно в аналитическом виде напряжения в прослойке и критическая нагрузка (рис. 1).

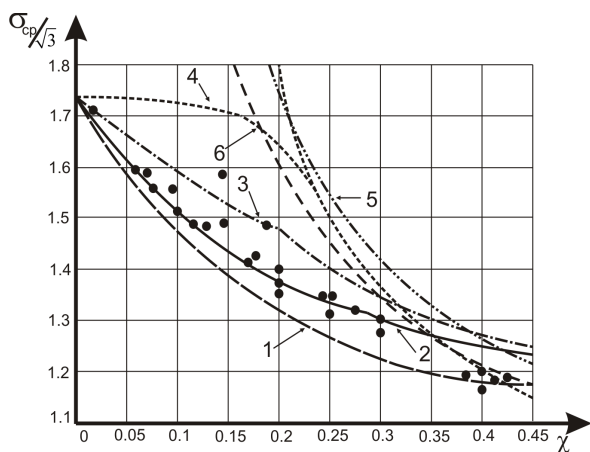


Рис. 1. Зависимость среднего критического напряжения от относительной толщины вставки (т. е. отношения ее толщины к диаметру стержня), когда коэффициент механической неоднородности стержня (отношение пределов прочности основного материала и материала вставки)  $K = 1,74$ . Линии — теоретические зависимости, полученные на основе различных математических моделей:

1 — модель работы [1]; 2, 3 — работы [2]; 4 — работы [3]; 5, 6 — других работ; точки — экспериментальные данные работы [3]

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-08-18179).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Дильман В. Л.** О некоторых математических моделях напряженного состояния пластической среды при осесимметричной деформации // Вест. ЮУрГУ. Сер. Математика, физика. 2005. № 2. С. 20–25.
2. **Ерошкина Т. В., Дильман В. Л.** Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне // Изв. ВУЗов. Математика. 2011. № 11. С. 1–11.
3. **Sato K., Toyoda M.** Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal // Welding J. 1975. N 9. P. 311–319.

## A NATURAL SPACES APPROACH TO THE UNIQUENESS PROBLEM

**Dubovski P. B.**

*Stevens Institute of Technology, Hoboken, 07030 USA;*  
pdubovsk@stevens.edu

We consider initial value problem for equation  $\partial_t u(x, t) = Au(x, t)$  with an unbounded linear operator  $A: \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$  where space  $\mathcal{B}$  is Banach. Generally speaking, this problem may have two or more solutions. For a class of operators  $A$  we introduce an algorithm to determine a natural subspace  $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$  such that the solution is unique in  $\mathcal{I}$ . The natural space  $\mathcal{I}$  is naturally generated by the operator  $A$ , and different operators  $A$  generate their own natural spaces  $\mathcal{I}$  depending on  $A$ . The simplified kinetic fragmentation equation may serve as an example:

$$\partial_t u(x, t) = 2 \int_x^\infty u(y, t) dy - xu(x, t), \quad u(x, 0) = (1 + x)^{-3}, \quad (1)$$

which has two solutions:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{e^t}{(1 + x)^3}, \\ u_2(x, t) &= e^{-tx} \left( \frac{1}{(1 + x)^3} + \frac{t}{(1 + x)^2} + \frac{t^2}{2(1 + x)} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

It is possible to show that the linear operator from equation (1) generates for  $t > 0$  the natural space  $\mathcal{I} = L_1(x^2; (0, \infty))$  of functions absolutely integrable on  $(0, \infty)$  with weight  $x^2$ . Obviously,  $u_1 \notin L_1(x^2; (0, \infty))$  but  $u_2 \in L_1(x^2; (0, \infty))$  and, thus, only  $u_2$  is admissible in the sense of the presented theory. Moreover, it is only the second solution  $u_2$  that possesses the mass conservation property and, consequently, is also admissible from the physical point of view.

The goal of the talk is to develop the method, which allows to reveal the natural spaces in which the existence and uniqueness theorems hold. Every operator  $A$  generates its own natural space  $\mathcal{I}$ .

## О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Егоров И. Е., Тихонова И. М.

*НИИ математики Северо-Восточного федерального университета  
им. М. К. Аммосова, ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия;  
IvanEgorov51@mail.ru, irinamikh3007@mail.ru*

Известно, что теории уравнений смешанного типа посвящено много работ и монографий [1, 3]. При этом к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись сингулярные интегральные уравнения, функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галеркина. В основном с помощью стационарного метода Галеркина изучались краевые задачи для уравнений эллиптического типа. Отметим, что начиная с известных работ С. Г. Михлина в качестве базисных функций брались собственные функции сходного оператора, в частности, оператора Лапласа. В ряде работ получены оценки погрешности нестационарного метода Галеркина для эволюционных уравнений [2].

В данном докладе рассматривается частный случай краевой задачи В. Н. Врагова [1], когда уравнение смешанного типа принадлежит эллиптическому типу вблизи оснований цилиндрической области  $Q = \Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega$  — ограниченная в  $R^n$  область с достаточно гладкой границей. В качестве базисных функций берутся соответствующие собственные функции оператора Лапласа в  $Q$ . При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения в работе авторов [3] построены  $u^N$  приближенные решения стационарного метода Галеркина, которые слабо сходятся к  $u(x, t)$  решению исходной краевой задачи в пространстве  $W_2^2(Q)$ .

При этом получена следующая оценка сходимости стационарного метода Галеркина

$$\|u - u^N\|_{W_2^1(Q)} \leq C\lambda_{N+1}^{-1/4}, \quad C > 0,$$

где  $\lambda_k$  положительные собственные значения спектральной задачи для оператора Лапласа в  $Q$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Врагов В. Н.** К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. **Виноградова П. В., Зарубин А. Г.** Оценка погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений // Журн. выч. мат. мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.
3. **Егоров И. Е., Тихонова И. М.** О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 41–47.

## ЗАДАЧА ОБ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННЫХ СИЛ

Ефимова М. В.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50, стр. 44, Красноярск, 660036 Россия;  
efmavi@icm.krasn.ru*

В работе представлено исследование инвариантного нестационарного решения задачи о плоском двухслойном течении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в отсутствие внешних сил. Система ограничена твердыми горизонтальными стенками. Считается, что бинарная смесь и вязкая жидкость не смешиваются и имеют общую границу раздела, где возникает термоконцентрационный эффект, который порождает движение в начальный момент времени.

Анализ движения сводится к последовательному решению трех самосопряженных начально-краевых задач для определения полей скорости, температуры и концентрации. Найдено решение соответствующих задач, описывающее стационарное течение. Показано, что, когда параметры движения не зависят от времени, в слоях реализуется течение типа Куэтта. В случае нестационарного движения проинтегрировать уравнения в явном виде не удастся, для решения применяется метод Лапласа [1]. В результате выписано точное аналитическое решение задач в изображениях по Лапласу, затем параметры движения восстановлены численно. Следует отметить, что функции скорости и температуры при больших временах выходят на стационарный режим и совпадают с решением стационарной задачи. Для того, чтобы для концентрации такое утверждение оставалось справедливым, необходимо, чтобы в начальный период времени отсутствовал градиент этой величины в направлении движения. Обращение аналитического представления решения в изображениях по Лапласу численными методами позволяет проанализировать влияние геометрических и физических параметров на характеристики движения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00283) и проекта № 38 фундаментальных исследований СО РАН.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.



## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЕ ДНК

Замышляева А. А., Бычков Е. В.

*Южно-Уральский государственный университет (НИУ),  
просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080 Россия;  
alzama@mail.ru, bychkov42@gmail.com*

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . В цилиндре  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  рассмотрим задачу Коши – Дирихле

$$u(x, 0) = u_0(x), \dot{u}(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), \dot{v}(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u(x, t) = v(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (2)$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} (b + \Delta)\ddot{u} = a\Delta u + \Delta f(u, v), \\ (b + \Delta)\ddot{v} = d\Delta v + \Delta g(u, v), \end{cases} \quad (3)$$

где  $u, v \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ ,  $a, b, d \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  — класса  $C^\infty$ , начальные условия также удовлетворяют граничным условиям. Система уравнений (3) при  $n = 1$  и  $b = d = 0$  моделирует распространение продольных волн в молекуле ДНК [1].

Задачу (1)–(3) в подходящих пространствах удается редуцировать к задаче Коши

$$w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1 \quad (4)$$

для полулинейного уравнения

$$L\ddot{w} = Mw + N(w), \quad (5)$$

где операторы  $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ,  $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$  — банаховы пространства. Если  $L$  не является непрерывно обратимым, тогда уравнением называется уравнением соболевского типа, этот случай представляет для нас наибольший интерес. Как известно, уравнения соболевского типа принципиально не разрешимы при произвольных начальных значениях, таким образом возникает задача построения фазового пространства.

**Определение** [2]. Множество  $\mathfrak{P}$  называется фазовым пространством уравнения (5), если

- (i) для любых  $(w_0, w_1) \in T\mathfrak{P}$  существует единственное решение задачи (4), (5);
- (ii) любое решение  $w = w(t)$  уравнения (5) лежит в  $\mathfrak{P}$  как траектория, т.е.  $w(t) \in \mathfrak{P}$  при  $t \in (-\tau, \tau)$ .

Введем в рассмотрение дополнительное условие

$$(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{w_0}) : \mathfrak{U}^0 \rightarrow \mathfrak{F}^0 \text{ — топологический изоморфизм.} \quad (6)$$

Если множество  $\mathfrak{M} = \{w \in \mathfrak{U} : (I - Q)(Mw + N(w)) = 0\}$  непусто, тогда имеет место

**Теорема.** Пусть  $-b \in \sigma(\Delta)$ ,  $k > n \setminus 2 - 2$ ,  $(w_0, w_1) \in T\mathfrak{M}$  и выполнено условие (6). Тогда множество  $\mathfrak{M}$  является фазовым пространством системы (3).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen G., Zhang H.** Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2004. **27**, N 5. P. 497–518.
2. **Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА — ЛЯВА НА ГРАФЕ

Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н.

*Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск,  
454080 Россия; alzama@mail.ru, tsyplenkova.olga@mail.ru*

Пусть  $G = G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  — конечный связный ориентированный граф, где  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  — множество вершин, а  $\mathcal{E} = \{E_j\}$  — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину  $l_j > 0$  и толщину  $d_j > 0$ . На графе  $G$  рассмотрим уравнения

$$\lambda x_{jtt} - x_{jxxtt} = \alpha(x_{jxxt} - \lambda' x_{jt}) + \beta(x_{jxx} - \lambda'' x_j) + y_j + Cu_j, \quad x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для уравнений (1) в каждой вершине  $V_i$  зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$x_s(0, t) = x_j(0, t) = x_k(l_k, t) = x_m(l_m, t), \quad (3)$$

для всех  $E_s, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$ ,

которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через  $E^{\alpha, \omega}(V_i)$  обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине  $V_i$ . Условие (2) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (3) — что решение в каждой вершине должно быть непрерывным [1].

Данную задачу в подходящих гильбертовых пространствах  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$  удастся редуцировать к операторно-дифференциальному уравнению соболевского типа

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y + Cu, \quad (4)$$

где операторы  $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}), C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$ , функции  $u : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathfrak{U}, y : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathfrak{Y}$ .

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{aligned} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0, \quad P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0, \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^T) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_0^T) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P_{in}(fin)$  — некоторые специальным образом построенные спектральные проекторы в пространстве  $\mathfrak{X}$ .

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары  $(\hat{x}, \hat{u})$ , где  $\hat{x}$  — решение задачи (4), (5), а  $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$  — управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u). \quad (6)$$

Здесь  $J(x, u)$  — некоторый специальным образом построенный функционал качества,  $\mathfrak{U}_{ad}$  — некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений  $\mathfrak{U}$ .

В работе доказана теорема о существовании и единственности оптимального управления решениями задачи (1)–(3), (5).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Замышляева А. А., Юзеева А. В. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява на графе // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 2. С. 18–29.

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

Зикиров О. С.

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, ул. Университетская  
2, Ташкент, 100174 Узбекистан; zikirov@yandex.ru*

Пусть  $D$  ограниченная область в плоскости  $(x, y)$  с гладкой границей  $\sigma$ . Произведем разбиение границы  $\sigma$  на две части  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  следующим образом:

$$\sigma_1 = \{(x, y) : \alpha x_n + \beta y_n > 0\}, \quad \sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1,$$

здесь  $x_n = \cos(n, x)$ ,  $y_n = \cos(n, y)$  и  $n$  — внешняя нормаль к границе  $\sigma$ .

В области  $D$  рассмотрим уравнение третьего порядка составного типа

$$Mu \equiv \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) + Lu = f(x, y), \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — заданные постоянные числа, причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ;  $L$  — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u,$$

относящемся к одному из канонических видов, указанных в [1].

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными функциями в области  $D$ . Без ограничения общности предположим, что  $\alpha \geq 0$  и  $\beta \geq 0$ , но  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

Заметим, что краевые задачи для уравнения составного типа применением различных методов были изучены в работах В. Н. Врагова, Т. Д. Джураева, В. И. Жегалова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова и др.

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы о классической разрешимости некоторых краевых задач для уравнения (1).

**Задача I.** Найти в области  $D$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \sigma; \quad \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\sigma_2} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \sigma_2. \quad (2)$$

**Задача II.** Найти в области  $D$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \sigma; \quad \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\sigma_2} = \lambda(x, y) \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\sigma_1} + \varphi_1(x, y), \quad (3)$$

где  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\lambda(x, y)$  — заданные гладкие функции.

Исследуются вопросы существования, единственности решений рассматриваемых задач. При определенных условиях на заданных функциях, задачи (1), (2) и (1), (3) сводятся некоторым интегральным уравнениям первого рода, для которых выявлены условия корректности, в том числе и для указанных выше задач.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Джураев Т. Д., Попелек Я.** О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифф. уравн. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

## РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ $B$ -ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

**Ибрагимов Н. А.**

*Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия*

Пусть  $\mathbb{E}_p^+$  — полупространство  $x_p > 0$   $p$ -мерного евклидова пространства,  $D$  — конечная область в  $\mathbb{E}_p^+$ , ограниченная открытой частью  $\Gamma_0$  гиперплоскости  $x_p = 0$  и гиперповерхностью  $\Gamma$ . Обозначим через  $C_B^{2m}(D)$  ( $C_B(\Gamma)$ ) множество функций,  $2m$  раз непрерывно дифференцируемых в  $D$  (непрерывных на  $\Gamma$ ) и четных по  $x_p$  (т.е. удовлетворяющих условию  $\partial u(x', 0)/\partial x_p = 0$ ).

Рассмотрим в  $\mathbb{E}_p^+$   $B$ -полигармоническое уравнение

$$P_m(\Delta_B)u = 0, \tag{P_m}$$

где  $P_m(\Delta_B)$  — полином  $m$ -й степени от  $\Delta_B$ ,  $\Delta_B = \Delta_{x'} + B_{x_p}$ ,  $\Delta_{x'} = \sum_{l=1}^{p-1} \partial^2/\partial x_l^2$  — лапласиан,  $B_{x_p} = \partial^2/\partial x_p^2 + (k/x_p)(\partial/\partial x_p)$  — оператор Бесселя,  $k > 0$  — заданная постоянная.

Предполагается, что корни  $\lambda_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) характеристического уравнения  $P_m(-\lambda) = 0$  различные, положительные и вещественные числа.

Уравнение ( $P_m$ ) может быть записано в виде системы уравнений. Для этого сделаем замену

$$\begin{aligned} u(x) = u_1(x), \quad (\Delta_B + \lambda_1)u_1(x) = u_2(x), \quad \dots, \\ (\Delta_B + \lambda_{m-1})u_{m-1}(x) = u_m(x). \end{aligned} \tag{1}$$

В результате получим систему уравнений

$$\Delta_B \bar{u} + Q\bar{u} = 0, \tag{2}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

**Вторая краевая задача.** Найти функцию  $u(x)$ , являющуюся решением уравнения ( $P_m$ ) в области  $D$ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u(x) \in C_B^{2m}(D) \cap C_B^{2m-1}(\bar{D}), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi_0(\xi), \quad \frac{\partial \Delta_B u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi_1(\xi), \quad \dots, \quad \frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi_{m-1}(\xi), \\ \psi_j(\xi) \in C_B(\Gamma), \quad j = \overline{0, m-1}. \end{aligned}$$

С помощью замены (1) получаем задачу Неймана для  $B$ -эллиптической системы уравнений относительно векторной функции  $\bar{u}$ .

**Постановка задачи Неймана для  $B$ -эллиптической системы уравнений (2).** Найти векторную функцию  $\bar{u}$ , являющуюся решением системы (2) в области  $D$ , компоненты которой удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u_{j+1}(x) \in C_B^{2(m-j)}(D) \cap C_B^{2(m-j)-1}(\bar{D}), \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g_0(\xi), \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g_1(\xi), \quad \dots, \quad \frac{\partial u_m}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g_{m-1}(\xi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g_0(\xi) &= \psi_0(\xi), & g_1(\xi) &= \psi_1(\xi) + \lambda_1 \psi_0(\xi), & \dots, \\
 g_{m-1}(\xi) &= \psi_{m-1}(\xi) + \tau_1 \psi_{m-2}(\xi) + \tau_2 \psi_{m-3}(\xi) + \dots + \tau_{m-1} \psi_0(\xi), \\
 \tau_1 &= \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i, & \tau_2 &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^{m-1} \lambda_i \lambda_j, & \dots, & \tau_{m-1} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}, \\
 g_j(\xi) &\in C_B(\Gamma), & j &= \overline{0, m-1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы вторая краевая задача была разрешима для любых граничных данных из  $C_B(\Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , т. е. корни характеристического уравнения, не были собственными значениями задачи Неймана для  $B$ -эллиптической системы уравнений, при этом вторая краевая задача имеет единственное решение. Существование решения краевых задач доказана методом потенциалов.

## ЭВОЛЮЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ НА ЯДРЕ ОПЕРАТОРА ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

**Иванова Н. Д.**

*Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, Челябинск,  
454080 Россия; natalia.d.ivanova@gmail.com*

Пусть  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{Y}$  — банаховы пространства, операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$  (т. е. линейен и непрерывен),  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{V})$  (т. е. линейен, замкнут и плотно определен в  $\mathcal{U}$ ),  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ , заданы отображения  $\Phi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{V})$ ,  $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ , вектор  $u_0 \in \mathcal{U}$ . Эволюционной обратной задачей будем называть задачу отыскания из соотношений

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi(t)q(t) + F(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

$$Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

пары функций  $u \in C^1([0, T]; \mathcal{U}) \cap C([0, T]; D(M))$  и  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ , которая будет называться решением. Здесь  $D(M)$  — область определения оператора  $M$ , снабженная нормой его графика

Из работ [1, 2] известно, что если оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален, то  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$ . В силу этого условия, функцию  $u(t)$  можно представить в виде  $u(t) = Pu(t) + (I - P)u(t)$ . Обозначим  $Pu(t) = v(t)$ ,  $(I - P)u(t) = w(t)$ . Кроме того, предположим, что  $\mathcal{U}^1 \subset \ker B$ . Тогда  $BP = \mathcal{O}$ , и задача (1)–(3) эквивалентна задаче нахождения функций  $v$ ,  $w$ ,  $q$  из соотношений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}Q\Phi(t)q(t) + L_1^{-1}QF(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$v(0) = v_0 \equiv Pu_0, \quad (5)$$

$$H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)\Phi(t)q(t) + M_0^{-1}(I - Q)F(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$w(0) = w_0 \equiv (I - P)u_0, \quad (7)$$

$$Bu(t) = B(I - P)u(t) = Bw(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Ее можно рассматривать как систему двух задач на взаимодополнительных подпространствах: обратной задачи (6)–(8) и прямой задачи (4), (5) с уже найденным  $q$ .

**Теорема.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, оператор  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^1 \subset \ker B$ ,  $F \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$ ,  $\Phi \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{V}))$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ , для всех  $t \in [0, T]$  оператор  $BM_0^{-1}(I - Q)\Phi(t)$  обратим, при этом  $(BM_0^{-1}(I - Q)\Phi(t))^{-1} \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ ,  $u_0 \in D(M)$ , выполняется условие согласования

$$\begin{aligned} (I - P)u_0 = & M_0^{-1}(I - Q)\Phi(0)(BM_0^{-1}(I - Q)\Phi(0))^{-1}\Psi(0) \\ & + M_0^{-1}(I - Q)\Phi(0)(BM_0^{-1}(I - Q)\Phi(0))^{-1}BM_0^{-1}(I - Q)F(0) \\ & - M_0^{-1}(I - Q)F(0). \end{aligned}$$

Тогда решение  $u \in C^1([0, T]; \mathcal{U}) \cap C([0, T]; D(M))$ ,  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (1)–(3) существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров В. Е.** Линейные уравнения типа Соболева с относительно  $p$ -радиальными операторами // ДАН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
2. **Федоров В. Е.** Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

**Иргашев Б. Ю.**

*Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан;*  
bahrom\_irgashev@inbox.ru

Для уравнения

$$L[u] = \sum_{j=0}^n a_{2j+1} \frac{\partial^{2j+1} u}{\partial x^{2j+1}} + (-1)^n \left[ \sum_{j=0}^n (-1)^j a_{2j} \frac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}} - \left( y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - by^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

(здесь все коэффициенты вещественны),  $0 \leq m < 1$ ,  $b \geq 0$ ,  $a_{2n+1} > 0$ ,  $a_{2j} \geq 0$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $n \in N$ , изучена следующая задача.

**Задача А.** В области  $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$  найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0; & u(x, 1) &= 0, \\ D_x^s u(0, y) &= \varphi_s(y), & qqs &= \overline{0, n}, \\ D_x^r u(1, y) &= \varphi_{n+r+1}(y), & r &= \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i(y) &\in C^4(0, 1], & \varphi_i(1) &= \varphi_i(0) = \varphi_i''(0) = \varphi_i''(1) = 0, \\ \varphi_i^{(j)}(y) &= O(y^{\alpha-j}), \end{aligned}$$

при  $y \rightarrow +0$ ,  $\alpha > (7 + b - 3m)/2$ ,  $j = 0, \dots, 4$ ,  $i = 0, \dots, 2n$ .

Единственность решения поставленной задачи легко показывается методом интегралов энергии. Для существования решения задачи доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Если уравнение (относительно  $\mu_k$ )

$$\sum_{j=0}^n a_{2j+1} \mu_k^{2j+1} + (-1)^n \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j a_{2j} \mu_k^{2j} + \lambda_k \right) = 0$$

не имеет кратных корней, и число корней имеющих положительные реальные части равно точно  $n$ , то решение задачи А (с наложенными условиями на функции  $\varphi_i$ ) существует.

Здесь  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , корни трансцендентного уравнения  $J_{\frac{1+b}{2-m}} \left( \frac{2\lambda^{1/2}}{2-m} \right) = 0$ ,

$J_\nu(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\nu)} \left( \frac{y}{2} \right)^{2n+\nu}$  — функция Бесселя 1-го рода.

Для проверки условия теоремы можно использовать результаты работы [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мейман Н. Н. Некоторые вопросы расположений нулей полиномов // УМН. 1949. Т. 4, вып. 6. С. 154–188.



## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

**Исломов Б. И.**

*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека,  
Ташкент, 100174 Узбекистан; islomovbozor@yandex.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + |x|^n u_{yy} = 0, \quad m, n = \operatorname{const} > 0. \quad (1)$$

Пусть  $\Omega$  — область, ограниченная линиями:

$$\Gamma_j: \frac{1}{q^2} |x|^{2q} + \frac{1}{p^2} y^{2q} = 1, \quad y \geq 0, \quad \Gamma_{2j+1}: \frac{1}{q} |x|^q - \frac{1}{p} (-y)^p = 0, \quad y \leq 0,$$

$$\Gamma_{2j+2}: \frac{1}{q} |x|^q + \frac{1}{p} (-y)^p = 1, \quad y \leq 0,$$

где  $x \geq 0$  при  $j = 1$ ,  $x \leq 0$  при  $j = 2$ ,  $2p = m + 2$ ,  $2q = n + 2$ , причем

$$m > n. \quad (2)$$

Уравнение (1) является эллиптическим и гиперболическим в областях  $\Omega_j^+$  и  $\Omega_j^-$  соответственно.  $N_j((-1)^{j-1}0, 5^{1/q}k_1; -(0, 5kp)^{1/p})$ ,  $E_1(k_1, 0)$ ,  $E_2(-k_1, 0)$ ,  $M_j((-1)^{j-1}(0, 5(k+1)q)^{1/q}; -(0, 5(1-k)p)^{1/p})$ ,  $k \in (0, 1)$ ,  $h = p^{1/p}$ ,  $O(0, 0)$ .

Функция  $\sigma_1(x) \in C^2[0, k_1]$  ( $\sigma_2(x) \in C^2[-k_1, 0]$ )- диффеоморфизм из множества точек отрезка  $[0, k_1]$  ( $[-k_1, 0]$ ) во множество точек отрезка  $[k_1, 1]$  ( $[-1, -k_1]$ ).

**Задача ТФ.** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_j^+) \cap C^2(\Omega_j^- \setminus (E_j N_j \cup E_j M_j))$  уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u|_{\Gamma_j} = \varphi_j(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}_j, \quad u|_{ON_j} = \psi_j(x), \quad |x| \in [0; (0, 5)^{1/q}k_1],$$

$$\mu u(x, 0) - u(\sigma_j(x), 0) = \psi_{j+2}(x), \quad |x| \in [0, k_1], \quad j = 1, 2,$$

где  $\varphi_j(x, y)$ ,  $\psi_j(x)$ ,  $\psi_{j+2}(x)$  — заданные функции,  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ ,  $\varphi_1(0; h) = \varphi_2(0; h)$ ,

$$\varphi_j(x, y) = (|x| \cdot |y|)^{\varepsilon+1} \bar{\varphi}_j(x, y), \quad \bar{\varphi}_j(x, y) \in C(\bar{\Gamma}_j), \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

$$\psi_j(x) \in C^3(|x| \in [0; (qk/2)^{1/q}]), \quad (4)$$

$$\psi_{j+2}(x) \in C(|x| \in [0, k_1]) \cap C^2(|x| \in (0, k_1)).$$

**Теорема.** Если выполнены условия (2)–(4) и  $\mu \in (0, 1)$ , то в области  $\Omega$  существует единственное решение задачи ТФ.

Единственность решения задачи ТФ доказывается с помощью принципа экстремума, а существования — методом интегральных уравнений.

## НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Б. И., Хомидов К. А.

*Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, 100174  
Узбекистан; islomovbozor@yandex.ru, hero2302@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^k u_{xx} - |x|^k u_{yy} = 0, \quad k > 0 \quad (1)$$

в области  $\Omega$  плоскости переменных  $x, y$ , ограниченной при  $y < 0$  характеристиками  $A_j C_1, B_j C_2$  уравнения (1), выходящими из точек  $A_j[(-1)^{j-1}q, 0], B_j[(-1)^{j-1}, 0]$ , и отрезками  $A_j B_j$  прямой  $y = 0$ , где  $0 < q < 1$ , здесь  $x \geq 0$  при  $j = 1, x \leq 0$  при  $j = 2$ .

Через  $\Omega_{1j}$  и  $\Omega_{3j}$  обозначим характеристические треугольники  $A_j B_j E_j$  и  $C_1 F_j C_2$ , а через  $\Omega_{2j}$  — характеристический четырехугольник  $A_j E_j F_j C_1$ , где  $C_1 = (0, -q), C_2 = (0, -1), E_j = ((-1)^{j-1}q_1, -q_2), F_j = ((-1)^{j-1}q_2, -q_1)$ .

**Задача I.** Найти функцию  $u(x, y)$  со следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega_{1j} \cup \Omega_{2j} \cup \Omega_{3j})$ ;
- 2)  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1) в областях  $\Omega_{1j}, \Omega_{2j}$  и  $\Omega_{3j}, j = 1, 2$ ;
- 3)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям  $u_y|_{y=0} = \nu_j(x), x \in A_j B_j, u|_{A_j C_1} =$

$\psi_j(x), |x| \in [0, q], D_{|x|^{2p_1}}^\beta (1 - |x|^{2p})^{2\beta-1} u[\Theta(x)] + a_j(x)u(|x|, 0) = b_j(x), |x| \in A_j B_j$ ;

4) на отрезке  $C_1 C_2$  выполняется условие склеивания  $\lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y)$  равномерно при  $-1 < y < -q$ , где  $\nu_j(x), \psi_j(x)$  заданные функции, причем  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ ,

$$\psi_j(|x|) \in C^1[0; q] \cap C^3(0; q), a_j(|x|), b_j(|x|) \in C(\overline{A_j B_j}) \cap C^2(A_j B_j) \quad (2)$$

$$\nu_j(x) \in C^2(A_j B_j) \quad (3)$$

и  $\nu_j(x)$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше  $2/(k+2)$  на концах интервала  $A_j B_j$ .

Здесь  $\Theta(x)$  — точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки  $(|x|, 0) \in A_j B_j$  с характеристикой  $A_j E_j, D_{0x}^l$  — интегро-дифференциальный оператор.

**Теорема.** Если выполнены условия (2) и (3) то в области  $\Omega$  существует единственное решения задачи I.

Единственность решения задачи I доказывается с помощью принципа экстремума, а существования — методом интегральных уравнений.

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ  
ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ВЫРОЖДЕНИЕМ**

**Исхоков С. А.**

*Институт математики АН Республики Таджикистан, ул. Айни, 299/1,  
Душанбе, 734063 Таджикистан; sulaimon@mail.ru*

Пусть  $\Omega$  — произвольная (ограниченная или неограниченная) область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $r$  — натуральное число и  $p_k$  — вещественные числа удовлетворяющие условиям  $p_k \geq 2$  для всех мультииндексов  $k$  по длине не превосходящих  $r$ . Исследована разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv \sum_{|k| \leq r} (-1)^{|k|} (\sigma_k(x) a_k(x) |u^{(k)}(x)|^{p_k-2} u^{(k)}(x))^{(k)} = F, \quad x \in \Omega,$$

где  $\sigma_k(x)$  — весовые функции, которые могут обращаться в нуль или в бесконечность на границе области,  $a_k(x)$  — ограниченные функции. В случае ограниченной области изучены дифференциальные свойства обобщенного решения в зависимости от дифференциальных свойств коэффициентов и правой части уравнения. Вырождение коэффициентов уравнения по разным независимым переменным характеризуется с помощью разных функций, класс которых шире класса степеней регуляризованного расстояния до границы области. Применяется метод, основанный на теории весовых функциональных пространств. Поэтому предварительно изучены основные свойства соответствующих весовых пространств. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями рассмотрена для нелинейных дифференциальных уравнений со степенным вырождением, заданных в ограниченной области с гладкой границей и в полупространстве  $R_n^+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ .

Вариационная задача Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений с вырождением ранее рассматривалась в работах [1 – 4].

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Салманов Ю. Д.** Краевая задача первого типа для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений с вырождением на многообразиях произвольной размерности // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1677–1683.
2. **Iskhokov S. A.** Existence and uniqueness of solutions for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, № 2. С. 12–28.
3. **Исхоков С. А., Ганиев М. Ш.** Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений в полупространстве // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2011. Т. 54, № 2. С. 94–102.
4. **Исхоков С. А.** О существовании и гладкости решения нелинейного дифференциального уравнения с вырождением // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 232–245.

## ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Кадырбеков Т., Кадырбеков Х.

Ташкентский Институт Ирригации и Мелиорации, ул. Кары-Ниязова, 39,  
Ташкент, Узбекистан; mamadaliev57@math.ru

Рассматривается нелинейное круговое выпучивание вязкоупругой оболочки с радиусом  $R$  и начальным прогибом  $W_0$ . Выводятся уравнения выпучивания, которые решаются методом усреднения.

Получено приближенное решение уравнения выпучивания оболочки, в которой амплитуда выпучивания затухает по экспоненциальному закону, а частота получает сдвиг, зависящий от косинус и синус преобразований функций релаксации  $R(t)$ .

Предположим, что связь между напряжением и деформацией задается так:

$$\sigma(t, x, y) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left\{ \left[ \varepsilon(t, x, y) + k\varepsilon^3(t, x, y) - \varepsilon \int_0^t R(t - \tau) [\varepsilon(\tau, x, y) + k\varepsilon^3(\tau, x, y)] d\tau \right] \right\}, \quad (1)$$

где  $\sigma(t, x, y)$  — напряжение в момент  $t$  в точке с координатами  $(x, y)$ ;  $\varepsilon(t, x, y)$  — деформация;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — постоянная Ляме;  $R(t)$  — ядро релаксации;  $k, k_1$  — некоторые постоянные, зависящие от нелинейных упругих и вязких свойств материала оболочки. Тогда процесс выпучивания оболочки, имеющей начальный прогиб в срединной поверхности, описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^4 (\omega - \omega_0) &= L(\omega, \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} \\ &+ \varepsilon \frac{D}{h} \int_0^t R(t - \tau) \nabla^4 (\omega - \omega_0) d\tau, \quad (2) \\ \nabla^4 \phi &= \frac{E}{2} \left\{ [L(\omega_0; \omega_0) - L(\omega; \omega)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial x^2} \right. \\ &\left. - \varepsilon \int_0^t R(t - \tau) [L(\omega_0; \omega_0) - L(\omega; \omega)] d\tau \right\}, \end{aligned}$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h$  — толщина оболочки;  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$  — жесткость оболочки;  $\omega_0, \omega$  — начальный и полный прогиб срединной поверхности;  $\phi$  — функция напряжений;  $q$  — интенсивность поперечной нагрузки;  $\varepsilon$  — малый положительный параметр; операторы  $\nabla^4, L(\omega; \phi), L(\omega; \omega)$  имеют такие же значения, как и в работе [1].

Применяя метод Бубнова — Галеркина ко второму уравнению системы (2) и полученное значения для функции  $\phi(t; x, y)$  подставляя в первое уравнение данной системы,

Решение уравнение (2) которое аппроксимируется функцией

$$\begin{aligned} w(t, x, y) &= \xi_1^0 \exp \left[ -\varepsilon R_c \left( a_2 + 3a_3 \frac{Q^2}{\omega^4} \right) \frac{t}{\omega} \right] \cos [(G + \omega t) + \xi_2^0] \\ &\times \left( \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R} + \psi \sin^2 \frac{\pi m x}{L} + \varphi \right). \end{aligned}$$

Величина  $\varphi$  выражается через параметр  $\psi$ , значения  $\xi_1, \xi_2$  и  $\xi_1^0, \xi_2^0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

## ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕУБЫВАЮЩИХ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТЯХ

Калиев И. А., Валишина О. И., Шухардин А. А.

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишевой, просп. Ленина, 49, Стерлитамак, 453103 Россия;  
kalievia@mail.ru*

Пусть нецилиндрическая область  $\Omega_T = \{(x, t): 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ , где  $x = s(t)$  — известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. Одномерное нестационарное движение газа в области  $\Omega_T$  описывается системой уравнений [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T. \quad (3)$$

Здесь  $\rho(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $p(x, t)$  и  $\theta(x, t)$  — плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа;  $\mu$ ,  $R$ ,  $\kappa$  — положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются  $u$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ :

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta(x, t)|_{t=0} = \theta_0(x), \quad \rho(x, t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in [0, s_0], \quad (4)$$

где  $s_0 = s(0)$ . На известных границах  $x = 0$  и  $x = s(t)$  задаются условия:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=s(t)} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\rho(x, t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t) \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\theta(x, t)|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta(x, t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

**Задача Gas.** Требуется найти функции  $\rho(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$  удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).

В работе доказываются теоремы существования и единственности глобального обобщенного и классического решений задачи Gas.

Локальная теорема существования и единственности решений задачи Gas доказана в [2]. Поэтому доказательство разрешимости “в целом” по времени связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени  $T$ , но не зависят от промежутка существования локального решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Kaliev I. A., Kazhikhov A. V. Well-posedness of a gas-solid phase transition problem. J. math. fluid mech. 1999. V. 1, № 3. С. 282–308.

## ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ 3-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

**Карачик В. В.**

*Южно-Уральский государственный университет, пр-т Ленина, 76,  
Челябинск, 454080 Россия; karachik@susu.ru*

В работе [1] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения задачи Дирихле, а также обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона. Настоящая заметка является продолжением этих исследований на задачу Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре.

Рассмотрим полиномы  $Q(x)$ ,  $P(x)$ ,  $R(x)$  и  $S(x)$ . По ним построим следующие полиномы

$$P_{(0)}(x) = P(x) + \frac{1 - |x|^2}{2} \Delta P(x) + \frac{(1 - |x|^2)^2}{8} (\Delta^2 + 2\Delta) P(x), \quad (1)$$

$$P_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \left( \Delta(\Delta^2 + 2\Delta) - 2 \frac{1 - \alpha}{2s + 4} \Delta^2 \Delta + \frac{(1 - \alpha)^2}{(2s + 4)(2s + 6)} \Delta^3 \right) P(x), \quad (2)$$

где  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $s \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$  и оператор  $\Delta$  имеет вид  $\Delta = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , а также полиномы вида

$$R_{(0)}(x) = \frac{1 - |x|^2}{2} R(x) + \frac{(1 - |x|^2)^2}{8} (2\Delta + 1) R(x), \quad S_{(0)}(x) = \frac{(1 - |x|^2)^2}{8} S(x), \quad (3)$$

$$R_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \left( \Delta(2\Delta + 1) - 2 \frac{1 - \alpha}{2s + 4} \Delta^2 \right) R(x), \quad S_{(1)}(x) = \Delta S(x). \quad (4)$$

**Теорема.** *Решение задачи Дирихле*

$$\Delta^3 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = R(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega} = S(x)$$

в единичном шаре с полиномиальными данными  $Q(x)$ ,  $P(x)$ ,  $R(x)$  и  $S(x)$  имеет вид

$$u(x) = P_{(0)}(x) - R_{(0)}(x) + S_{(0)}(x) + \frac{(1 - |x|^2)^3}{16} \times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s)!!(2s + 2)!!} \Delta^s (P_{(1)}^{\alpha,s} - R_{(1)}^{\alpha,s} + S_{(1)} - Q_{(1)}^{\alpha,s})(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha,$$

где полиномы  $P_{(0)}(x)$ ,  $R_{(0)}(x)$  и  $S_{(0)}(x)$  определяются по формулам (1), (3), полиномы  $P_{(1)}^{\alpha,s}(x)$ ,  $R_{(1)}^{\alpha,s}(x)$  и  $S_{(1)}(x)$  определяются по формулам (2), (4), а полином  $Q_{(1)}^{\alpha,s}(x)$  имеет вид

$$Q_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \frac{(1 - \alpha)^2}{(2s + 4)(2s + 6)} Q(x).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1674–1694.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Кибирев В. В.

*Бурятский государственный университет,  
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ, 670000 Россия*

Для исследования задачи о наклонной производной для гармонических функций [1] предложен метод редукции этой задачи к исследованию некоторой динамической системы. В [2, 3] этот метод получил дальнейшее развитие. Задачу о наклонной производной будем рассматривать в следующей постановке: найти регулярную в шаре  $\Sigma : \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$  непрерывно-дифференцируемую в замкнутом шаре  $\bar{\Sigma}$  гармоническую функцию  $u$ , удовлетворяющую на сфере  $S : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  условию

$$au_x + bu_y + cu_z = f, \quad (1)$$

где  $a, b, c, f$  — непрерывно дифференцируемые на  $S$  функции.

В этой работе рассмотрена задача (1) при  $a = x, b = y, c = -(z - \beta)$  при помощи дальнейшего усовершенствования метода работы [2].

В результате исследования данной задачи доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Задача (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям*

$$U/L = p(\varphi), \quad U/M = q(\varphi)$$

где  $p$  и  $q$  — любые наперед заданные непрерывно-дифференцируемые функции;  $L$  и  $M$  — окружности выхода векторного поля в касательную к сфере плоскость.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бицадзе А. В.** Задача наклонной производной с полиномиальными коэффициентами // Докл. Акад. Наук СССР. 1964. Т. 157, № 6. С. 1273–1276.
2. **Бицадзе А. В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. **Янушаускас А. И.** Применение вырождающихся уравнений к изучению задачи о наклонной производной // Дифф. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 81–90.

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Коврижкин В. В.

*Омский государственный университет,  
просп. Мира, 55а, Омск, 644077 Россия;  
rudin09@rambler.ru*

Пусть  $Lu \equiv yu_{xx} + u_{yy}$  — формальный дифференциальный оператор,  $D$  — криволинейный треугольник в нижней полуплоскости с вершинами в точках  $A(0, 0)$ ,  $B(l, 0)$ ,  $C$ , стороны которого  $AB$  и  $AC$  — отрезки прямых, а  $BC$  — дуга характеристики оператора  $L$  ( $x + (2/3)|y|^{3/2} = l$ ). Угол  $\angle A$  таков, что треугольник  $D$  является выпуклым относительно характеристик  $L$ .

Под задачей Дирихле будем понимать задачу об отыскании решения  $u \in W_2^1(D)$  уравнения  $Lu = f$ ,  $f \in L_2(D)$ , такого, что  $u|_{\partial D} = 0$ . Рассмотрим характерный параметр

$$d = \sup \left\{ \frac{\|u_y(x, 0)\|_0}{\|Lu\|_0} \mid u \in C^2(\bar{D}), u|_{\partial D} = 0 \right\},$$

где  $\|\cdot\|_0$  — норма в  $L_2$  над соответствующим множеством.

**Теорема.** *Параметр  $d$  монотонно убывает при  $l \rightarrow 0$ .*



**РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ  
КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ  
ФИНАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ**

**Колтуновский О. А.**

*Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики,  
Коммунистический просп., 72, Южно-Сахалинск, 693020 Россия;  
informatic@sakhiepi.ru*

Рассматривается редуцированная проблема в прямоугольнике  $D = \{(\rho, t): 0 < \rho < 1, 0 < t < T\}$  для уравнения

$$K u_{tt} - u_{\rho\rho} - \frac{n-1}{\rho} u_{\rho} + q(\rho) u_t = f_0(\rho, t), \quad (1)$$

где  $K = \text{const} > 0$ ,  $n$  — натуральное число.

Изучается **обратная задача**. Найти функции  $u(\rho, t)$  и  $q(\rho)$ , связанные в области  $D$  уравнением (1) и такие, что выполняются условия

$$u_{\rho}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \mu(t), \quad \text{если } 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(\rho, 0) = u_0(\rho), \quad u_t(\rho, 0) = u_1(\rho), \quad u(\rho, T) = \bar{u}_0(\rho), \quad \text{если } 0 < \rho < 1. \quad (3)$$

Кроме естественного согласования начально-краевых условий основными являются следующие предположения.

**Предположение 1.** Исходные функции обладают следующей гладкостью:

$$f_0(\rho, t) \in C^2(D), \quad \mu(t) \in C^4[0, T], \\ \rho^{-3/2} u_0(\rho), \quad \rho^{-3/2} u_1(\rho), \quad \rho^{-3/2} \bar{u}_0(\rho) \in C^3[0, 1].$$

**Предположение 2.** Постоянная  $K$  достаточно велика и растет с ростом  $n$ , число  $\mu'(T)$  достаточно велико, норма  $\|\mu''(t)\|_{C^2[0, T]}$  достаточно мала. Введем пространство

$$V = \left\{ v(\rho, t): v \in W_2^2(D); v_{tt} \in W_2^1(D); \frac{v_{\rho t}}{\rho}, \frac{v_{\rho t t}}{\rho}, \frac{v_{t t}}{\rho^2} \in L_2(D); \right. \\ \left. v_{t t}, v_{\rho t} \in L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, 1)); \frac{v_{t t}}{\rho}, \frac{v_{\rho t}}{\rho} \in L_{\infty}(0, T; L_2(0, 1)) \right\}.$$

Тогда задача (1)–(3) имеет решение  $(u(\rho, t), q(\rho))$  такое, что  $u(\rho, t) \in V$ ,  $\rho^2 q(\rho) \in L_{\infty}(0, 1)$ .

## ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Кононенко Л. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4,  
Новосибирск, 630090 Россия; volok@math.nsc.ru*

При моделировании широкого круга задач химической кинетики используются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, t, \varepsilon), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  — медленные,  $y = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^n$  — быстрые переменные;  $f, g$  — достаточно гладкие функции,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon$  — положительный малый параметр [1, 2].

Задача отыскания функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ , удовлетворяющих системе (1), по некоторым исходным данным при известных функциях  $f, g$  представляет собой так называемую прямую задачу для дифференциальных уравнений.

Основная цель наших исследований — постановка и анализ задач, обратных к этой. В задачах химической кинетики часто правые части системы (1) задаются полиномами. Поэтому в медленной подсистеме функция  $f$  имеет вид  $f = \Sigma_J A_J X^J$ ,  $J$  — мультииндекс,  $X = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$ .

Мы будем интересоваться такими постановками обратных задач, когда матрицы  $A_J$  неизвестны и их требуется найти по некоторой известной информации о решении прямой задачи [3]. У нас есть предположение, что по заданию решения на медленной поверхности, определяемой уравнением  $g = 0$ , можно восстановить неизвестные коэффициенты  $A_J$ . Ясно, что для однозначного восстановления этих матриц минимальная информация о решении, лежащем на медленной поверхности, должна быть той же размерности, что и информация о восстанавливаемых элементах матриц  $A_J$ .

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 12-01-00074), СО РАН (проект 80).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988.
2. Кононенко Л. И. О гладкости медленной поверхности сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. мат. 2002. Т. 5, № 2. С. 109–125.
3. Романов В. Г., Слинючева Л. И. Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка / Математические проблемы геофизики. Вып. 3. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 187–215.

## НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Коркина И. О., Чушева Н. А.

*Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043  
Россия; irinka.korkina@mail.ru, chuesheva@ngs.ru*

**Задача 1.** В области  $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, 1), t \in (0, 1)\}$  рассмотрим уравнение

$$k(t)u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u_{xxx} + b(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + d(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

с начальными-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u_{xx}|_{x=1} = 0, \quad u_{xxx}|_{x=0} = 0. \quad (2)$$

**Теорема существования единственности.** Пусть правая часть уравнения (1)  $f(x, t) \in L_2(D)$ . Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия

- 1)  $k(t) \in C^3[0, 1]$ ,  $c(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $d(x, t) \in C^3(\bar{D})$ ;
- 2) пусть существуют вещественные постоянные  $\lambda$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  такие, что  $2d(x, t) - \lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x, t) + b_{xx}(x, t) - c_{xxx}(x, t) \geq \delta_1 > 0$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ ;
- 3)  $3c_x(x, t) - 2b(x, t) \geq \delta_2 > 0$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ ;
- 4)  $k(1) \leq 0$ ;
- 5)  $a(0, t) - b_x(0, t) + c_{xx}(0, t) \geq 0$ ,  $t \in [0, 1]$ ;
- 6)  $c_x(x, t) < 2$ ,  $c(1, t) = 0$ ,  $c(0, t) = 0$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ .

Тогда решение задачи (1), (2) из пространства  $H^{4,1}(D)$  существует.

**Замечание.** Если не выполнены условия на коэффициенты уравнения, то можно привести примеры некорректности начально-краевой задачи (2) для уравнения (1).

**Задача 2.** В односвязной, ограниченной области  $D \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$a u_x \cdot u_{xxxx} + b u_{xx} \cdot u_{xxx} + c (u_x)^2 \cdot u_{xx} + d u_x \cdot u_{xt} + e u_t \cdot u_{xx} = 0, \quad (3)$$

где  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ;  $c \neq 0$ ,  $d + c \neq 0$ ,  $a + b \neq 0$ . Для уравнения (3), аналога уравнения Романи, можно в явном виде выписать, не равное константе, решение.

**NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS  
OF SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS  
FOR THE NONHOMOGENEOUS POLYHARMONIC  
EQUATIONS IN A SPHERE**

**Koshanov B. D.**

*Institute Mathematics, Informatics and Mechanics MES RK, Almaty, Kazakhstan;*  
koshanov@list.ru

Let  $m$  — natural number and  $n$  — dimensional unit ball  $\Omega = \{x: |x| < 1\} \subseteq R^n$  we consider the nonhomogeneous polyharmonic equation [1]

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}} u \Big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}} u \Big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi_2(x), \quad \dots, \\ \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}} u \Big|_{x \in \partial\Omega} = \varphi_m(x), \quad x \in S = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

where  $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq 2m - 1$ .

**Theorem 1.** Let  $f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi_s(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ . Then a necessary and sufficient condition for the solvability of problem (1), (2) in the class  $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$  for arbitrary  $m$  and any  $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq 2m - 1$  is the condition:

$$\text{rang } A(k_1, k_2, \dots, k_m) = \text{rang } (A(k_1, k_2, \dots, k_m), \mathbf{F}), \tag{3}$$

where  $A(k_1, k_2, \dots, k_m)$  denotes a matrix of dimension  $m \times m$ , which stores the rows of matrix  $A$  (dimension  $2m \times m$ ) with numbers equal to  $k_1, k_2, \dots, k_m$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0!/0! & 2!/2! & 4!/4! & 6!/6! & \dots & (2m-4)!/(2m-4)! & (2m-2)!/(2m-2)! \\ 0 & 2!/1! & 4!/3! & 6!/5! & \dots & (2m-4)!/(2m-5)! & (2m-2)!/(2m-3)! \\ 0 & 2!/0! & 4!/2! & 6!/4! & \dots & (2m-4)!/(2m-6)! & (2m-2)!/(2m-4)! \\ 0 & 0 & 4!/1! & 6!/3! & \dots & (2m-4)!/(2m-7)! & (2m-2)!/(2m-5)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2m-4)!/0! & (2m-2)!/2! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (2m-2)!/1! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (2m-2)!/0! \end{bmatrix},$$

also a vector-columns  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  (dimension  $m$ ) with elements  $\mathbf{U} = (u_0(0), u_1(0), \dots, u_{m-1}(0))^T$ ,

$$\mathbf{F} = \left( \frac{1}{\omega_n} \int_S \left[ \varphi_1(x) - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}} \varepsilon_{2m,n} * f \right] dS_x, \dots, \frac{1}{\omega_n} \int_S \left[ \varphi_m(x) - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}} \varepsilon_{2m,n} * f \right] dS_x \right)^T,$$

i.e. rank of matrix  $A(k_1, k_2, \dots, k_m)$  complies with the rank of extended matrix systems:

$$A(k_1, k_2, \dots, k_m)\mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{4}$$

REFERENCES

1. **Bitsadze A. V.** On some properties of polyharmonic functions // Differential equations. 1988. V. 24, N 5. P. 825–831.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Лукина Г. А.

*Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального  
университета им. М. К. Аммосова, Тихонова, 5/1, Мирный, 678170 Россия;  
lukina-g@mail.ru*

Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений привлекает в последнее время внимание многих авторов. Нелокальные краевые задачи, в частности, задачи с интегральными условиями как по времени, так и по пространственным переменным, для ультрапараболических уравнений ранее не изучались.

Пусть  $\Omega$  есть интервал  $(0,1)$  оси  $Ox$ ,  $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$ ,  $0 < T_1 < +\infty$ ,  $0 < T_2 < +\infty$ . Далее, пусть  $c(x, t, \tau)$ ,  $f(x, t, \tau)$ ,  $K_1(x, t, \tau)$ ,  $K_2(x, t, \tau)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T_1]$ ,  $\tau \in [0, T_2]$ .

**Краевая задача 1:** найти функцию  $u(x, t, \tau)$ , являющуюся в параллелепипеде  $Q$  решением уравнения

$$u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x, t, \tau)u = f(x, t, \tau)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0, \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, T_2), \quad u(x, t, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1),$$

$$u(0, t, \tau) = \int_0^1 K_1(x, t, \tau)u(x, t, \tau)dx,$$

$$u(1, t, \tau) = \int_0^1 K_2(x, t, \tau)u(x, t, \tau)dx, \quad t \in (0, T_1), \quad \tau \in (0, T_2).$$

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $R^n$  с границей  $\Gamma$ ,  $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$ ,  $0 < T_1 < +\infty$ ,  $0 < T_2 < +\infty$ ,  $G = \Omega \times (0, T_2)$ ,  $S = \partial\Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$ . Далее, пусть  $c(x, t, \tau)$ ,  $f(x, t, \tau)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T_1]$ ,  $\tau \in [0, T_2]$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_n$ ,  $B$  — линейный оператор, ставящий в соответствие функции  $v(x, t, \tau)$  функцию  $(Bv)(x, \tau)$ .

**Краевая задача 2:** найти функцию  $u(x, t, \tau)$ , являющуюся в  $Q$  решением уравнения

$$u_t + u_\tau - \Delta u + c(x, t, \tau)u = f(x, t, \tau)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0, \tau) = Bu + u_0(x, \tau), \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, T_2),$$

$$u(x, t, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1), \quad u(x, t, \tau)|_S = 0, \quad t \in (0, T_1), \quad \tau \in (0, T_2).$$

Доказана разрешимость поставленных краевых задач с использованием метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА — КИПРИЯНОВА ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ляхов Л. Н., Попова О. И.

*Воронежский государственный университет, Университетская площадь, 1,  
Воронеж, 394000 Россия; lyakhov@box/vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru*

Пусть  $\gamma$  — фиксированное положительное число и  $\Pi_t^\gamma$  — оператор Пуассона, действующий по переменной  $t \in R_1^+ = \{t : t > 0\}$  по формуле

$$\Pi_t^\gamma g(x, t) = \frac{\Gamma((\gamma + 1)/2)}{\Gamma(\gamma/2)\Gamma(1/2)} \int_0^\pi g(x, t \cos \alpha) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Преобразование Радона — Киприянова функции  $f$  введено в работе [1] и имеет вид

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{R_n^+} f(x) \Pi_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) x_1^\gamma dx,$$

где  $R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x'), x_1 > 0\}$ ,  $\langle \xi, x \rangle - p = 0$  — нормальное уравнение плоскости с единичным вектором нормали  $\xi$ , проходящей на расстоянии  $|p|$  от начала координат.

Весовой сферической функцией называется сужение  $B$ -гармонического многочлена (см. [2]) на единичную сферу:  $Y_m^\gamma(\theta) = P_m(x)/|x|^m = P_m^\gamma(\theta)$ ,  $\theta = x/|x| \in S_1^+(n)$ . Здесь  $S_1^+(n)$  — поверхность единичной полусферы в  $R_n$  с центром в начале координат, определенная неравенствами  $x_1 > 0, \dots, x_n > 0, n \leq N$ .

Пусть  $F_c$  — cos-преобразование Фурье и  $H^\nu$  —  $j$ -преобразование Ганкеля [2].

**Теорема.** Преобразование Радона — Киприянова общей весовой сферической функции порядка  $m$  вида  $\Phi = f(|x|) Y_m^\gamma(\Theta) \in S_{ev}(R_N^+)$  есть снова общая весовая сферическая функция того же порядка и вида:

$$K_\gamma[f(|x|) Y_m^\gamma(\Theta)](\Theta; p) = \lambda \phi(p) Y_m^\gamma(\Theta),$$

где

$$\lambda = \frac{i^m \pi^{(N-n)/2} \prod_{j=1}^n \Gamma((\gamma_j + 1)/2)}{2^{(N+|\gamma|)/2+n+m-1} \Gamma(N + |\gamma| + m)}, \quad \phi(p) = S_{\nu, m}[f(r)](p),$$

а  $S_{\nu, m}[f(r)](p)$  — оператор преобразования (типа оператора преобразования Пуассона — Сонина [3]) индекса  $\nu = N + |\gamma| + 2m - 1$ , который определяется равенством  $S_{\nu, m}[f(r)](p) = F_c[r^m H^\nu[f(r)]]$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье — Бесселя и Радона // ДАН. 1998. Т. 360, № 2. С. 157–160.
2. Ляхов Л. Н. Весовые сферические функции, и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 1997.
3. Катрахов В. В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // СМЖ. 1980. Т. 21, № 1. С. 86–97.

**СИНГУЛЯРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
ОПЕРАТОРЫ ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ  
В ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ  
КЛАССАХ СОБОЛЕВА — КИПРИЯНОВА  $H_\gamma^s$**

Ляхов Л. Н.<sup>1</sup>, Рошупкин С. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1,  
Воронеж, 394000 Россия; lyakhov@box.vsi.ru

<sup>2</sup>Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,  
ул. Ленина, 17, Елец 394000; roshupkinsa@mail.ru

Следуя [1], смешанным полным прямым и обратным преобразованием Фурье — Бесселя функции  $u$  назовем соответственно выражения

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \int_{R_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi') e^{-i(x'', \xi'')} u(x) \prod_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2} dx,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[f](x) = C_\gamma \mathcal{F}_B[f](-x),$$

где  $\mathbf{j}_\gamma(x', \xi') = \prod_{i=1}^n \left( j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i) - i \frac{x_i \xi_i}{\gamma_i+1} j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i \xi_i) \right)$ ,  $x' \in R_n$ ,  $x'' \in R_{N-n}$ , а  $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(t)$  —  $j$ -функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода  $J_\nu(t)$  равенством  $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$ .

Функция  $a(x; \xi) \in C^\infty(R_N \times R_N)$ , принадлежащая классу Л. Шварца основных функций  $S(R_N)$  по  $x$  равномерно по  $\xi$ ,  $|\xi|=1$  и удовлетворяющая условию однородности  $a(x; \lambda \xi) = \lambda^m a(x; \xi)$ ,  $\lambda \geq 1$  вещественной степени  $m$ , называется символом канонического с.п.д. оператора, если выполнено одно из следующих условий:

(i) функция  $a(x; \xi)$  четна по каждой из переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и  $D_{x_i}^k a(x; \xi)|_{x_i=0} = 0$ ,  $|k| \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

(ii) функция  $a(x; \xi)$  нечетна по каждой из переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и  $D_{x_i}^k a(x; \xi)|_{x_i=0} = 0$ ,  $|k| \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Каноническим сингулярным псевдодифференциальным оператором Фурье — Бесселя  $A = a(x; D, B)$  с символом  $a(x; \xi)$  назовем оператор, действующий на функции из  $S(R_N)$  по формуле

$$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int_{R_N} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi') e^{-i(x', \xi')} a(x; \xi) u(x) \prod_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2} dx.$$

Для любого вещественного числа  $s$  через  $H_\gamma^s(R_N)$  обозначим пополнение пространства Шварца основных функций по норме

$$\|u\|_{s, \gamma}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}_B[u](\xi)|^2 (\xi')^\gamma d\xi.$$

**Теорема 1.** Канонический сингулярный псевдодифференциальный оператор  $A$  имеет порядок  $m$  в  $H_\gamma^s$ :  $\|Au\|_{s, \gamma} \leq C \|u\|_{s+m, \gamma}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Катрахов В. В., Ляхов Л. Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 49, № 5. С. 49–68.

**видоизмененная задача Коши для гиперболического уравнения второго рода с комплексным параметром**

Мамадалиев Н. К.<sup>1</sup>, Гаипов Я. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Вузгородок 1, Ташкент, 100174 Узбекистан; mamadaliev57@mail.ru

<sup>2</sup>Ташкентский институт ирригации и мелиорации, ул. Кары-Ниязова, 39, Ташкент, 100000 Узбекистан

В данной работе будем рассматривать представление обобщенного решения видоизмененной задачи Коши для уравнения:

$$U_{xx} + yU_{yy} + \alpha U_y = 0, \tag{1}$$

где  $\alpha$  — комплексное число, с начальными условиями:

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha [U(x, y) - A_n^-(\tau)]'_y = \nu(x). \tag{2}$$

Непрерывное решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными (2), которая является корректной, в характеристических переменных записывается в виде:

$$U(\xi, \eta) = \gamma_1 \sum_{k=0}^n N_k(\alpha, n, \delta) (\eta - \xi)^{-2\delta-1} \int_{\xi}^{\eta} \tau^{(2k)}(\lambda) (\lambda - \xi)^{k+\delta} (\eta - \lambda)^{k+\delta} d\lambda - (-1)^n \gamma_2 4^{2(\alpha-1)} \int_{\xi}^{\eta} \nu(\lambda) (\lambda - \xi)^{1/2-\alpha} (\eta - \lambda)^{1/2-\alpha} d\lambda, \tag{3}$$

где  $\gamma_1 = \Gamma(2 + 2\delta)/\Gamma^2(1 + \delta)$ ,  $\gamma_2 = \Gamma(1 - 2\alpha)/[(1 - \alpha)\Gamma^2(1/2 - \alpha)]$ ,  $N_k(\alpha, n, \delta) = 2^{2k} C_n^k \Gamma(1 + \delta)/[\Gamma(1 + \delta + k)(\alpha)_n]$ ,  $\delta = \alpha + n - 3/2$ ,  $\alpha = -n + \alpha_0$ ,  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1)$ .

Рассмотрим случай, когда  $n = 4$ . Так как  $\alpha$  — комплексный параметр, то введем обозначение  $\alpha = k + il$ , где  $k = \text{Re } \alpha$ ,  $l = \text{Im } \alpha$ .

Из того, что  $\alpha = -n + \alpha_0$  получаем, что в случае  $1/2 < \alpha_0 < 1 \Rightarrow \text{Re } \alpha \in (-3.5, -3)$ . Далее будет приведено обоснование данному утверждению.

Аналогично, как в работе [1], для конкретных интервалов  $\alpha$ , доказано, что единственное обобщенное решение задачи Коши (1), (2) для рассматриваемого уравнения имеет следующий вид:

$$U(\xi, \eta) = \int_0^\xi (\eta - \zeta)^{-k+1/2-il} (\xi - \zeta)^{-k+1/2-il} T(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2 \cos \pi(k - 1/2 + il)} \int_{\xi}^{\eta} (\eta - \zeta)^{-k+1/2-il} (\zeta - \xi)^{-k+1/2-il} T(\zeta) d\zeta - 2^{4(k-1+il)} \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} \nu(t) (\eta - t)^{1/2-k-il} (t - \xi)^{1/2-k-il} dt,$$

где

$$N(\zeta) = \frac{1}{2 \cos \pi(k - 1/2 + il)} T(\zeta) - 2^{4(k-1+il)} \gamma_2 \nu(\zeta).$$

Работа частично поддержана грантом № ОТ-Ф1-112.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Мамадалиев Н. К. О представлении решения видоизмененной задачи Коши // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.



## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Мамадалиев Н. К., Юлдашев З. У.

<sup>1</sup> *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Вузгородок 1,  
Ташкент, 100174 Узбекистан; mamadaliev57@mail.ru*

<sup>2</sup> *Ташкентский институт ирригации и мелиорации, ул. Кары-Ниязова, 39,  
Ташкент, 100000 Узбекистан*

На корректность постановки краевых задач для уравнения вида

$$L_\alpha u \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \quad (1)$$

в области, при  $y < 0$  граница которой содержит линию параболического вырождения, существенно влияет коэффициент перед младшими членами уравнения (1). Поэтому естественно следует ожидать, что от него же будут зависеть и условия склеивания решения на линии вырождения в краевых задачах для уравнения в смешанной области.

Пусть  $D$  — конечная односвязная область, ограниченная при  $y > 0$  гладкой кривой  $\sigma$  с концами в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  и при  $y < 0$  характеристиками уравнения (1). Обозначим через  $D_1$  и  $D_2$  части области  $D$  в которых соответственно  $y > 0$  и  $y < 0$ . Пусть  $A_0(0, 0)$  — начало координат,  $A_0C_1 : x + 2\sqrt{-y} = 0$ ,  $A_0C_2 : x - 2\sqrt{-y} = 0$  характеристики уравнения (1), пересекающейся с характеристиками  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $C_1[-1/2, -1/16]$  и  $C_2[1/2, -1/16]$ . Через  $D^*$  обозначим область, ограниченную контуром  $A_0C_2B\sigma AC_1A_0$ , а через  $D_{21}$  и  $D_{22}$  — части области  $D_2$  соответственно с границами  $AC_1A_0A$  и  $A_0C_2BA_0$ . Для области  $D$  нормальным контуром является кривая  $\sigma = \sigma_0 : x^2 + 4y = 1$ . Пусть  $\alpha = -n + \alpha_0$ ,  $-1/2 < \alpha_0 < 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Задача  $G_n$ .** Требуется определить в области  $D$  функцию  $u(x, y)$  со следующими свойствами:

- а)  $u(x, y) \in C(\overline{D^*})$ ;
- б)  $u(x, y)$  — является регулярным решением уравнения (1) в области  $y > 0$  и обобщенным решением класса  $R_2$  в области  $D_{21} \cup D_{22}$ ;
- в) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$(-1)^n \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha [u - A_n^-(\tau)]'_y = \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha [u_y + A_n^+(u)] = \nu(x);$$

- г)  $u(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u|_\sigma = f(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$u|_{A_0C_1} = \varphi_1(x), \quad -1/2 \leq x \leq 0, \quad u|_{A_0C_2} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2,$$

где  $u(x, 0) = \tau(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $l$  — длина кривой;  $f(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  — непрерывные заданные функции, причем  $\varphi_j(0) = \varphi_j^{(k)}(0) = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\varphi_j^{(n+1)}(x) = x^{1-2\beta-n} \bar{\varphi}_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , — известная непрерывная функция и  $\bar{\varphi}(0) \neq 0$ ,

$$A_n^-(\tau) = \gamma_1 \sum_{k=0}^n N_k(\alpha, n, \delta) (-y)^k \int_0^1 \tau^{(2k)}(\lambda) [t(1-t)]^{k+\delta} dt,$$

$$A_n^+(u) = \sum_{i=1}^n \delta_i y^{i-1} \frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}}, \quad \delta_i — \text{const}.$$

Воспользуясь обобщенным решением задачи Коши из класса  $R_2[1]$  получаем функциональное соотношение между  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  принесенные из областей  $D_{21}$  и  $D_{22}$  соответственно

$$\tau(x) = \int_x^0 T_1(t)(t-x)^{-2\beta} dt, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (2)$$

$$\tau(x) = \int_0^x T_2(t)(x-t)^{-2\beta} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

С помощью функции  $G(\xi, \eta; x, t)$  определяем [2], что соотношение между  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ , принесенное из области  $D_1$ , имеет вид

$$\tau(x) = -k \int_{-1}^1 [|t-x|^{-2\beta} - (1-xt)^{-2\beta}] \nu(t) dt + F(x), \quad (4)$$

где

$$F(x) = 4^{1-\alpha} k \beta (1-x^2) \int_{-1}^1 f_2(\xi) (1-\xi^2)^{n+\alpha_0-2} (1+x^2-2x\xi) d\xi,$$

$$f(s) = f_1(x) = (1-x^2)^{1-2n} f_2(x), \quad f_2(x) \in C[-1, 1].$$

Из соотношений (2)–(4), исключая  $\tau(x)$  для  $\nu(x) \in H(\theta)$ , получаем систему сингулярных интегральных уравнений. Поступая так же, как в работе [2], убеждаемся, что задача  $G_n$  эквивалентна следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода со слабой особенностью:

$$\nu(x) - \int_{-1}^1 K(x, t) \nu(t) dt = \Psi(x),$$

однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи  $G_n$  [2].

Работа частично поддержана грантом № ОТ-Ф1-112.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Мамадалиев Н. К.** О представлении решения видоизмененной задачи Коши // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.
2. **Исамухамедов С. С.** Краевые задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа второго рода // Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения. Ташкент: Фан, 1977. С. 33–40.

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ  
НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ**

**Марков В. Г.**

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, ул.  
Кулаковского, 48, Якутск, 677013 Россия; bntr@rambler.ru*

Рассматриваются дифференциальные операторы вида

$$Lu = \frac{1}{g(x)} L_0 u, \quad x \in (a, b),$$

где  $L_0$  — обыкновенный дифференциальный оператор порядка  $2m$ , вещественная функция  $g(x)$  меняет знак на интервале  $(a, b)$  [1]. Рассматривается случай, когда оператор  $L$  равномерно  $J$ -диссипативен в пространстве Крейна  $F_0 = L_{2,g}(a, b)$  и область определения оператора  $L$  содержит, вообще говоря, разрывные функции, удовлетворяющие общим условиям склейки в точках взаимодействия.

Доказано, что почти во всех случаях ответ на вопрос существования максимальных инвариантных подпространств не зависит от вида граничных условий.

В случае существования этих подпространств оператор допускает разложение на сумму коммутирующих операторов, определенных в соответствующих подпространствах, при определенных условиях эти операторы с точностью до умножения на  $-1$  — генераторы аналитических полугрупп. Последний факт позволяет исследовать самые разные вопросы, связанные с разрешимостью уравнений, куда этот оператор входит.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 02.740.11.0609.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.** Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

## К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Масаева О. Х.

*Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,  
ул. Шортанова, 89А, Нальчик, 360000 Россия; olesya.masaeva@yandex.ru*

В области  $\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y): 0 < x < r, \alpha < y < \beta\}$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ , рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\gamma} u_{\eta}(x, \eta) = 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1)$$

где  $D_{0y}^{\gamma}$  — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка  $\gamma$  с началом в точке 0 [1, с. 9].

Уравнение (1) при  $\gamma = 1$  совпадает с уравнением Лаврентьева — Бицадзе  $u_{xx} - \text{sign } y u_{yy} = 0$ .

В работе [2] была исследована задача Дирихле для уравнения  $u_{xx} + \text{sign } y u_{yy} = 0$  в прямоугольной области и доказана единственность ее решения. В работе [3] исследовалась задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа. В данной работе доказана единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1).

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию  $u = u(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega_{\alpha\beta}$ , из класса  $u \in C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta})$ ,  $D_{0y}^{\gamma-1} u_{\eta} \in C(\Omega_{\alpha\beta})$ ,  $u_{xx}$ ,  $D_{0y}^{\gamma} u_{\eta} \in C(\Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta})$ , удовлетворяющую уравнению (1) для всех  $(x, y) \in \Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta}$ .

**Задача Дирихле.** Найти регулярное в области  $\Omega_{\alpha\beta}$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(x, y)|_{\partial\Omega_{\alpha\beta}} = 0. \quad (2)$$

Доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $(\pi^2/r^2)\beta^{\nu} \geq \max\{z_1, z_2\}$ , где  $z_1 = \max\{z \in \mathbb{R} : E_{1/\nu}(-z; \nu) = 0\}$ ,  $z_2 = \max\{z \in \mathbb{R} : E_{1/\nu}(-z; 1) = 0\}$ ,  $\nu = \gamma + 1$ , тогда задача (1), (2) имеет только тривиальное решение.

Здесь  $E_{1/\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\rho k + \mu)$  — функция типа Миттаг — Леффлера [4, с. 117].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Ann. de Math. pura ed Appl. 1963. V. 62. P. 371–377.
3. Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 442–446.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ АТМОСФЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Медведев С. Б.

*Институт вычислительных технологий СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
medvedev@ict.nsc.ru*

Рассмотрены различные геометрические приближения для уравнений вращающейся мелкой воды. Первое приближение состоит в переходе от уравнений на эллипсоиде к уравнениям на сфере. Второе приближение состоит в переходе от уравнений на сфере к уравнениям на касательной поверхности.

Получены приближенные уравнения для всех геометрических приближений. Главное требование к построенным приближениям состояло в сохранении гамильтоновой структуры. Этой цели удалось достигнуть двумя способами. Во-первых, благодаря тому, что метрический тензор поверхности определяет гамильтонову структуру уравнений на ней, поэтому первый способ состоял в выборе в качестве приближенных уравнений, ту часть полной системы системы, которая связана с соответствующим разложением метрического тензора. Во-вторых, было замечено, что скобка Пуассона для ковариантных компонент скорости почти не зависит от коэффициентов Ламе, поэтому основная зависимость от коэффициентов Ламе переносится в гамильтониан системы и все приближения строятся разложением гамильтониана по малому параметру.

Полученные уравнения требуют дальнейшего исследования. Поскольку уравнения на  $f$ -плоскости и бета-плоскости хорошо исследованы, то главный вопрос для них состоит в области применимости преобразований при переходе от сферической геометрии к плоской. Хотя уравнения получаются одинакового вида, переход к ним может иметь особенности и разные области обратимости. Предложенный метод позволяет строить высшие приближения с сохранением гамильтоновой структуры.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 11-01-12075-офи-м-2011, 12-01-00648-а) и Правительством РФ (грант по договору № 11.G34.31.0054).

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мелишева Е. П.

*Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, ул.  
Антонова-Овсеевко, 26, Самара, 443090 Россия; melisheva86@mail.ru*

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} - b^2 u(x, y) + C(y) u(x, 0) = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ ,  $\alpha, \beta, b$  — заданные положительные постоянные,  $C(y) = C_1(y)$  при  $y \geq 0$ ,  $C(y) = C_2(y)$  при  $y \leq 0$ ,  $C_i(y)$ ,  $i = 1, 2$ , — заданные непрерывные функции.

**Задача Дирихле.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные достаточно гладкие функции, при этом  $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ .

Отметим, что краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах [1, 2]. В [2] для нагруженного парабола-гиперболического уравнения в прямоугольной области  $D$  изучена начально-граничная задача, в которой методом спектральных разложений [3] установлен критерий единственности решения этой задачи и само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. В статье [4] изучена задача (2)–(5) для уравнения (1) при  $b = 0$  в прямоугольной области  $D$ . В данной работе эта задача исследована при всех  $b > 0$ , установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5) и решение задачи представлено в виде ряда Фурье, сходимость которого в классе функций (2) установлена, когда  $\alpha$  является положительным рациональным и квадратичным иррациональным числом. Показана устойчивость по отношению к граничным функциям.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т. 11, № 1. С. 66–73.
3. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 273–279.
4. Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. Т. 80, № 6. С. 39–47.

## ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мирсабуров М., Курбанов К.

*Термезский гос. университет, ул. Ф. Ходжаева, 43, Термез, 190111 Узбекистан;*  
mirsaburov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad (1)$$

где постоянные  $m > 0$ ,  $\beta_0 \in (-m/2, 1)$ , в конечной односвязной области  $\Omega$  плоскости независимых переменных  $(x, y)$ , ограниченной при  $y > 0$  нормальной кривой  $\sigma_0$ :  $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ , с концами в точках  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , а при  $y < 0$  — характеристиками  $AC$  и  $BC$  уравнения (1). Обозначим через  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  части области  $\Omega$ , лежащие в полуплоскостях  $y > 0$  и  $y < 0$  соответственно, а через  $C_0$  и  $C_1$  соответственно точки пересечения характеристик  $AC$  и  $BC$  с характеристиками, исходящими из начала координат.

**Задача ТФ.** *Требуется найти функцию  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую следующим условиям:*

- 1)  $u(x, y) \in C^2(\Omega^+)$  и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 2)  $u(x, y) \in \mathbb{R}_1$  — обобщенное решение уравнения (1) в области  $\Omega^-$  [1];
- 3) на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J \setminus \{O\}, \quad (2)$$

где  $J = (-1, 1)$  — интервал оси  $y = 0$ , причем эти пределы при  $x = \pm 1$ ,  $x = 0$  могут иметь особенности порядка не выше  $1 - 2\beta$ , где  $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2)$ ;

4)

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (3)$$

$$a(x)D_{-1,x}^{1-\beta} u[\theta(x)] - b(x)D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta(-x)] = \psi(x), \quad -1 < x < 0, \quad (4)$$

$$u(-x, 0) - \mu(x)u(x, 0) = f(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

где  $\theta(x_0) = (x_0 - 1)/2 - i[(m+2)(1+x_0)/4]^{2/(m+2)}$  — аффикс точки пересечения характеристики  $AC$  с характеристикой, исходящей из точки  $(x_0, 0)$ ,  $x_0 \in J = (-1, 1)$  — интервал  $y = 0$ ,  $\psi(x), f(x), \mu(x), a(x), b(x) \in C[-1, 0] \cap C^{1,\alpha}(-1, 0)$ ,  $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}(\bar{J})$ ,  $\varphi(x) = (1 - x^2)\bar{\varphi}(x)$ ,  $\bar{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha}(\bar{J})$  — заданные функции, причем  $a(x)b(x) \neq 0$  и, в силу условия согласованности, из (5) при  $x = -1$  имеем  $f(-1) = \varphi(1) - \mu(-1)\varphi(-1) = 0$ .

Условия (4) и (5) являются аналогами условиям Франкля, заданными соответственно на характеристике  $AC$  и на отрезке вырождения  $\bar{J}$  [2].

**Теорема.** *Задача ТФ при выполнении условий*

$$a(x)b(x) < 0, \quad 0 < \mu(x) < 1 \quad (6)$$

однозначно разрешима.

Работа поддержана Ф.Ф.И. Республики Узбекистан (грант Ф-4-32).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Смирнов М. М.** Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985.
2. **Франкль Ф. И.** Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. мат. механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.



## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Нахушев А. М.

НИИ ПМА КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89"а", Нальчик, 360000 Россия;  
niipma@mail333.com

В прямоугольной области  $\Omega = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$  евклидовой плоскости точек  $z = (x, y)$  рассматривается модельное нагруженное уравнение в частных производных

$$aD_{0y}^{\alpha}u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [bD_{0y}^{\alpha}u(x, y) + cu(x, y)] + f(x, y)y^{\alpha-1} \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами  $a, b, c$ , с оператором дробного дифференцирования Римана-Лиувилля  $D_{0y}^{\alpha}$  порядка  $\alpha \in ]0, 1[$  [1], и с функцией  $f(z) = f(x, y)$ , непрерывной в замыкании  $\bar{\Omega}$ .

Уравнение (1) при  $a = 1, \alpha = 1, f(z) = 0$  известно как уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

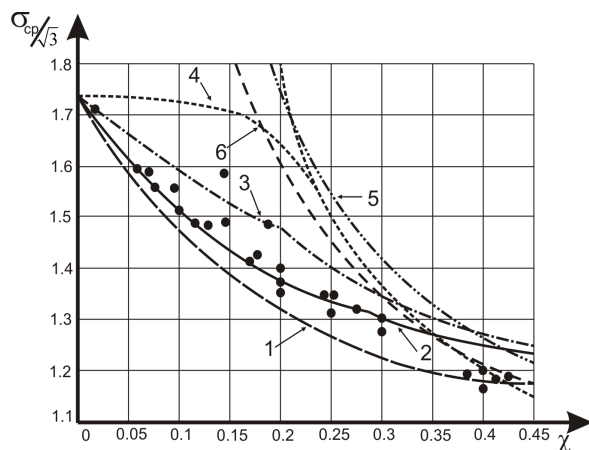
и его решение  $u(z) = u(x, y)$  интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузии  $c$  и коэффициентом влагопроводности  $b$  в точке  $x$  почвенного слоя  $0 \leq x \leq r$  в момент времени  $y \in [0, T]$ .

При  $a = 0, \alpha = 1$  уравнение (1) в области  $\Omega$  переходит в уравнение

$$b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(z), \quad (3)$$

решение  $u(z)$  которого моделирует деформацию снега с коэффициентом вязкости  $b$  и коэффициентом одностороннего сжатия  $1/c$  в точке  $x$  снежного покрова  $0 \leq x \leq r$  толщины  $r$  в момент времени  $y \geq 0$  под действием нагрузки  $f = \rho g$  ( $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение,  $b/c$  — время релаксации одностороннего сжатия [2]).

Уравнение (1) при  $a \neq 0, b = 0$  является уравнением диффузии дробного порядка [3, с. 64].



В работе предлагается эффективный метод исследования структурных и качественных свойств решения смешанных прямых и обратных краевых задач для уравнения (1) с начальным условием

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = \tau(x), \quad 0 < x \leq r.$$

Особый акцент делается на прикладные аспекты уравнений (2) и (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. **Жекамухов М. Х., Жекамухова И. М.** Классические реологические модели и квазистатические методы определения вязкоупругих характеристик снега // Тр. Высогогорного геофизического института. Физика облаков и активные воздействия. Вып. 95. С. 84–122.
3. **Нахужева В. А.** Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006.

## АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

Нахушева В. А.

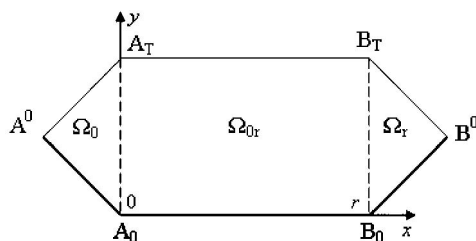
НИИ ПМА КБНЦ РАН, ул. Шортанова, 89<sup>а</sup>, Нальчик, 360000 Россия;  
niipma@mail333.com

На евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  точек  $z = (x, y)$  рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^{1+H[x(x-r)]}u(z)}{\partial y^{1+H[x(x-r)]}} = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} \quad (1)$$

с функцией Хевисайда  $H[x]$ .

Пусть  $\Omega$  — область, ограниченная характеристиками  $A_0B_0 = \{(x, 0): 0 \leq x \leq r\}$ ,  $B_0B^0 = \{(x, y): x - y = r, 0 \leq y \leq T/2\}$ ,  $B^0B_T = \{(x, y): x + y = r + T, T/2 \leq y \leq T\}$ ,  $A_TA_T = \{(x, T): 0 \leq x \leq r\}$ ,  $A_TA^0 = \{(x, y): y - x = T, T/2 \leq y \leq T\}$ ,  $A^0A_0 = \{(x, y): x + y = 0, 0 \leq y \leq T/2\}$  уравнения (1). Через  $\Omega_0$  и  $\Omega_r$  обозначим внутренности треугольников  $A_0A_TA^0$  и  $B_0B_TB^0$  соответственно (см. рисунок).



В работе доказаны принцип экстремума, единственность и существование решения следующей краевой задачи, являющейся аналогом задачи Трикоми.

**Задача 1.** Найти регулярное в областях  $\Omega_0$ ,  $\Omega_{0r}$ ,  $\Omega_r$  решение  $u(z) = u(x, y)$  уравнения (1) из класса  $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(-y/2, y/2) = \psi_0(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r;$$

$$u(y/2 + r, y/2) = \psi_r(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

где  $\psi_0(y)$  и  $\psi_r(y) \in C^2[0, T]$ ,  $\varphi(x) \in C[0, r]$ .

Область  $\Omega$  представляет собой внутренность характеристического шестиугольника с вершинами в точках  $A_0 = (0, 0)$ ,  $B_0 = (r, 0)$ ,  $B^0 = (r + T/2, T/2)$ ,  $B_T = (r, T)$ ,  $A_T = (0, T)$ ,  $A^0 = (-T/2, T/2)$ . Носителем краевых условий является часть границы области  $\Omega$   $A^0A_0 \cup A_0B_0 \cup B_0B^0$ .

К краевой задаче 1 приводится задача теплообмена в составных средах [1, с. 115].

Первая краевая задача для гиперβολо-параболического уравнения

$$u_{yy} - k(z)u_{xx} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z)$$

с двумя независимыми переменными второго порядка с гладкими коэффициентами была объектом исследования А. М. Нахушева [2, с. 190].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нахушева В. А.** Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006.
2. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОЛОЧКИ С УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ НА ГРАНИЦЕ

Неустроева Н. В.

*Научно-исследовательский институт математики СВФУ,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия;  
nnataliav@mail.ru*

Рассматривается задача о равновесии упругой оболочки с вертикальной трещиной в рамках модели Кирхгофа — Лява. Считаем, что отрицательный берег трещины выступает над положительным на известное расстояние  $l = l(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $l(\bar{x})$  — заданная функция, такая что  $0 \leq l(\bar{x}) < 2h$ ,  $2h$  — толщина оболочки. На берегах трещины будут заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенства (типа условий Синьорини)

$$[W_\nu] - h[w_\nu] + lw_\nu^- \geq 0 \text{ на } \Gamma_c,$$

$$[W_\nu] + (h - l)[w_\nu] + lw_\nu^- \geq 0 \text{ на } \Gamma_c,$$

где  $\chi(\bar{x}) = (W, w)$  вектор перемещений точек срединной поверхности. Через  $W_\nu$ ,  $w_\nu$  обозначены скалярные произведения  $W_\nu = W\nu$ ,  $w_\nu = w\nu$  соответственно;  $[v] = v^+ - v^-$  — скачок функции на берегах трещины,  $\nu$  — нормаль к кривой  $\Gamma_c$ .

В случае  $l \equiv 0$  получим известное условие непроникания берегов трещины оболочки [1].

Задача равновесия ставится как вариационная. Установлена разрешимость вариационной задачи. Найдены краевые условия, выполняющиеся на берегах трещины и имеющие вид системы уравнений и неравенств. Доказано эквивалентность двух постановок: дифференциальной и вариационной.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект N 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Khudnev A. M., Kovtunenkov V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton–Boston: WIT Press, 2000.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Николаев Н. Н.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия;  
nuke1987@mail.ru

В работе рассматриваются коэффициентные нелинейные обратные краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральным и финальным условиями переопределения. Исследованию подобных краевых задач для гиперболических уравнений посвящены работы [1–3].

Пусть  $Q = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  — прямоугольник в пространстве  $\mathbb{R}^2$ .

**Обратная задача I.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением

$$u_{ttt} + u_{xx} - q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  граничных условий

$$u(x, 0) = u_1(x), \quad u_t(x, 0) = u_2(x), \quad u(x, T) = u_3(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = \mu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (4)$$

**Обратная задача II.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2), (3), а также финальное условие переопределения

$$u_t(x, T) = \mu(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Методами регуляризации, срезающих функций и неподвижной точки доказывается существование обобщенных решений обратных задач I и II.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. мат. мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
2. Колтуновский О. А. Обратная задача для гиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом в случае интегрального переопределения // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 1. С. 57–74.
3. Колтуновский О. А. Обратная коэффициентная задача для многомерного гиперболического уравнения в случае финального переопределения // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2010. С. 136–150.

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕИЗВЕСТНЫМ  
КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ**

**Николаев О. Ю.**

*Бурятский государственный университет, Институт математики  
и информатики, ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ, Россия;  
Nikolaev.oleg1@yandex.ru*

Исследуется задача нахождения вместе с решением  $u(x, t)$  параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + u_{xxxx} + q(x)u = f(x, t)$$

также коэффициента  $q(x)$ . При выполнении естественных граничных условий, нелокального условия переопределения, условий принадлежности входных данных определенным функциональным пространствам доказывается теорема существования и единственности решения. При доказательстве используется комбинация методов линеаризации, продолжения по параметру и теорема Шаудера.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Омельченко Е. А.

*Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; omeka@ya.ru*

Пусть многочлены  $P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ ,  $Q_m(\lambda) = \sum_{j=0}^m d_j \lambda^j$  таковы, что  $c_i, d_j \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, m$ ,  $c_n, d_m \neq 0$ . Далее,  $\Omega \subset \mathbb{R}^s$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ , набор операторов  $A, B_1, \dots, B_r$  — регулярно эллиптический [1], где

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_l u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, \dots, r.$$

Потребуем также самосопряженности оператора  $A_1 \in Cl(L_2(\Omega))$ , на своей области определения  $D(A_1) = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$  [1] действующего как  $A_1 u = Au$ . Через  $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$  обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в  $L_2(\Omega)$  собственные функции оператора  $A_1$ , занумерованные по невозрастанию собственных значений  $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$  с учетом их кратности. Здесь учтено, что спектр оператора  $A_1$  вещественный и сгущается к  $-\infty$ . Пусть также  $\mu: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации и сходится интеграл  $\int_{-r}^0 \int_\Omega \int_\Omega |K(x, y, s)|^2 dx dy d\mu(s)$ . С использованием общих результатов работы [2] исследована задача

$$P_n(A) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = Q_m(A)u(x, t) + \int_{-r}^0 \int_\Omega K(x, y, s)u(y, t + s) dy d\mu(s), \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty),$$

$$B_l A^k u(x, t) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad l = 1, \dots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty), \quad (2)$$

$$u(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [-r, 0]. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $m > n$ ,  $(-1)^{m-n} \operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$ , спектр  $\sigma(A_1)$  не содержит общих корней многочленов  $P_n(\lambda)$  и  $Q_m(\lambda)$ ,  $h \in C^1([-r, 0]; H^{2rn}(\Omega))$ ,  $h(x, 0) \in H^{2rm}(\Omega)$ ,  $B_l A^k h(x, 0) = 0$  при  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $l = 1, \dots, r$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,

$$P_n(A) \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = Q_m(A)h(x, 0) + \int_{-r}^0 \int_\Omega K(x, y, s)h(y, s) dy d\mu(s), \quad x \in \Omega,$$

и для всех  $k \in \mathbb{N}$ , при которых  $P_n(\lambda_k) = 0$ , выполняется при почти всех  $(y, s)$  в смысле меры  $dy \otimes d\mu(s)$  равенство  $\int_\Omega K(x, y, s)\varphi_k(x) dx = 0$ , кроме того,  $\int_\Omega h(x, 0)\varphi_k(x) dx = 0$ . Тогда существует единственное решение  $u \in C([-r, +\infty); H^{2rn}(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); H^{2rn}(\Omega))$  задачи (1)–(3).

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-96007-р-урал.а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
2. **Федоров В. Е., Омельченко Е. А.** Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 418–429.



## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б.

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,  
ул. Ключевская, 406, Улан-Удэ Россия; oshorovbb@pochta.ru,  
scaldelfree@yandex.ru*

В работах авторов [1–4] рассматривались краевые задачи для систем уравнений первого порядка. В двумерном случае это были система уравнений Коши — Римана и обобщенная система уравнений Коши — Римана, а в трехмерном — Моисила — Теодореску и четырехмерном — системы, порожденные условиями существования производных кватернион-функций, которые являются многомерными аналогами системы Коши — Римана. По классификации Петровского все перечисленные системы являются эллиптическими. Для системы Коши — Римана и обобщенной системы Коши — Римана оказалась корректной задача Римана — Гильберта с разрывными краевыми условиями, а для их многомерных аналогов — краевые задачи с разрывными граничными условиями, которые были названы многомерными аналогами задачи Римана — Гильберта.

Оказалось, что подобная картина имеет место для систем уравнений первого порядка, которые не являются системами Фридрикса, а по классификации Петровского не имеют определенного типа. По этой причине они названы неклассическими. В частности, на плоскости рассматриваем систему уравнений

$$LU \equiv AU_x + BU_y + CU = F(x, y), \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В этом случае характеристический детерминант задается формулой

$$\det(A\lambda_1 + B\lambda_2) = \lambda_1(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2),$$

т. е. система уравнений (1), (2) по классификации Петровского не является эллиптической.

**Задача.** В прямоугольнике  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < k, 0 < y < l\}$  найти решение системы уравнений (1), (2) при граничных условиях

$$u_1(x, 0) = u_1(k, y) = u_2(0, y) = u_2(x, l) = u_3(x, 0) = u_3(k, y) = 0.$$

Эта задача имеет однозначную обобщенную разрешимость в  $L_2(D)$ . Аналогичные примеры имеются в пространствах большей размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Развитие научного потенциала высшей школы” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/1533).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ошоров Б. Б.** О некоторых краевых задачах для систем уравнений Коши — Римана и Бицадзе // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 4. С. 446–449.
2. **Ошоров Б. Б.** Задачи Римана — Гильберта и Пуанкаре с разрывными краевыми условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 696–704.

3. **Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б.** Краевые задачи для некоторых модельных систем уравнений в трехмерном пространстве // Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии: Материалы междунар. конф. Сборник материалов молодых ученых. Улан-Удэ – Байкал, ВСГАКИ, 2009. Улан-Удэ, 2009. С. 178–186.
4. **Ошоров Б. Б.** О некоторых модельных эллиптических системах уравнений в четырехмерном пространстве // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 3, вып. 3. С. 91–98.

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ЛИНЕЙНОГО РОСТА

Павленко В. Н., Федяшев М. С.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; pavlenko@csu.ru, mfyedyshev@mail.ru

Рассматривается задача

$$u_t + Lu(x, t) - \lambda_1 u(x, t) + g(x, t, u(x, t)) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^2$ ,  $T > 0$ ,  $Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$  — равномерно эллиптический дифференциальный оператор в  $\Omega$  с  $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  на  $\bar{\Omega}$ ,  $c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ,  $0 < \alpha < 1$ .  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\lambda_1$  — минимальное собственное значение оператора  $L$  с граничным условием  $u(x) = 0$  на  $\partial\Omega$ ,  $f \in L^p(Q_T)$ ,  $p > N + 2$ ,  $g(x, t, u)$  удовлетворяет условию (\*):

(\*1)  $g: Q_T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  борелева (mod 0) [1];

(\*2) для почти всех  $(x, t) \in Q_T$  сечение  $g(x, t, \bullet)$  имеет на  $\mathbb{R}$  разрывы только первого рода и для произвольного  $u \in \mathbb{R}$  верно включение  $g(x, t, u) \in [g_-(x, t, u), g_+(x, t, u)]$ , где  $g_+(x, t, u) = \lim_{\eta \rightarrow u} \sup g(x, t, \eta)$ ,  $g_-(x, t, u) = \lim_{\eta \rightarrow u} \inf g(x, t, \eta)$ ;

(\*3) существуют постоянная  $a > 0$  и функция  $b \in L^p(Q_T)$  такие, что для почти всех  $(x, t) \in Q_T$  верно неравенство  $|g(x, t, u)| \leq a|u| + b(x, t) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1)–(3) называется функция  $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ , удовлетворяющая условиям (2), (3) и для почти всех  $(x, t) \in Q_T$  включению

$$f(x, t) - u_t - Lu(x, t) + \lambda_1 u(x, t) \in [g_-(x, t, u(x, t)), g_+(x, t, u(x, t))].$$

**Теорема.** Предположим, что

- 1) для функции  $g(x, t, u)$  выполнено условие (\*) с  $p > N + 2$ ;
- 2) для почти всех  $(x, t) \in Q_T$   $g(x, t, u) \operatorname{sgn} u \geq d(x, t) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ , где  $d \in L^1(Q_T)$ ;
- 3) для положительного решения задачи Дирихле  $Lv = \lambda_1 v$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$  верны неравенства

$$\int_{Q_T} \bar{g}_-(x, t)v(x)dxdt < \int_{Q_T} f(x, t)v(x)dxdt < \int_{Q_T} \underline{g}_+(x, t)v(x)dxdt,$$

где  $\underline{g}_+(x, t) = \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(x, t, u)$ ,  $\bar{g}_-(x, t) = \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(x, t, u)$ .

Тогда задача (1)–(3) имеет обобщенное решение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

## РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

Павлов С. С.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия; ststepmath@mail.ru*

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ . Далее, пусть  $a(x, t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $K(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Обратная задача 1:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в  $Q$  уравнением:

$$u_{tt} - a(x, t)\Delta u + q(t)u_t = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  начальных условий

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

граничного условия

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

а также условия переопределения:

$$\int_{\Omega} K(x, t)u(x, t) dx = \psi(t). \quad (4)$$

**Обратная задача 2:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в  $Q$  уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + q(t)u = f(x, t), \quad (5)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий (2)–(4).

В изучаемых обратных задачах 1 и 2 условия (2) и (3) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условие (4) — условие переопределения; наличие этого условия объясняется тем, что помимо неизвестного решения  $u(x, t)$  требуется найти также еще неизвестную функцию  $q(t)$ .

Подобные обратные задачи в одномерном случае ранее изучались в работах [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Валитов И. Р.** Обратные задачи для гиперболических уравнений: ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Стерлитамакский гос. пед. академия. 2009.
2. **Валитов И. Р., Кожанов А. И.** О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами // Математические заметки ЯГУ. 2007. Т. 20, № 14. С. 3–16.

## ЯДРО ОСНОВНЫХ АЛГЕБР ЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Панов А. В.

*Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; gjd.y@ya.ru*

Рассматривается система уравнений в частных производных [1]

$$\frac{d\rho_i}{dt_i} + \rho_i \operatorname{div} \bar{u}_i = 0,$$

$$\rho_i \frac{d\bar{u}_i}{dt_i} + m_i \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) (-1)^{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

где  $\bar{u}_i = (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz})$  — вектор скорости  $i$ -ой фазы;  $\rho_i$  — плотность  $i$ -ой фазы;  $m_i$  — объемная доля  $i$ -ой фазы;  $P(\rho_1, \rho_2)$  — общее давление среды;  $d/dt_i = \partial/\partial t + \bar{u}_i \nabla$ . Система описывает неравновесное течение смеси газа и мелких частиц в трехмерном пространстве. Температурными эффектами пренебрегаем. Давление является функциональным параметром системы. Первая фаза соответствует газу, вторая — частицам.

Методами группового анализа [2] найдено ядро основных групп симметрий данной системы. Базис данного ядра состоит из инфинитезимальных операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_5 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_{1x}} + \frac{\partial}{\partial u_{2x}}, \quad X_6 = t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_{1y}} + \frac{\partial}{\partial u_{2y}}, \quad X_7 = t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial u_{1z}} + \frac{\partial}{\partial u_{2z}},$$

$$X_8 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - u_{1y} \frac{\partial}{\partial u_{1x}} + u_{1x} \frac{\partial}{\partial u_{1y}} - u_{2y} \frac{\partial}{\partial u_{2x}} + u_{2x} \frac{\partial}{\partial u_{2y}},$$

$$X_9 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + u_{1z} \frac{\partial}{\partial u_{1x}} - u_{1x} \frac{\partial}{\partial u_{1z}} + u_{2z} \frac{\partial}{\partial u_{2x}} - u_{2x} \frac{\partial}{\partial u_{2z}},$$

$$X_{10} = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} - u_{1z} \frac{\partial}{\partial u_{1y}} + u_{1y} \frac{\partial}{\partial u_{1z}} - u_{2z} \frac{\partial}{\partial u_{2y}} + u_{2y} \frac{\partial}{\partial u_{2z}}.$$

Работа частично была поддержана РФФИ (грант 10-01-96007-р-урал.а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин П. А., Фомин В. М., Тропин Д. А., Чен Дж.-Р. Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЯХ СКАЛЯРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Панов Е. Ю.

*Новгородский государственный университет, ул. Большая  
Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003 Россия;  
Eugeny.Panov@novsu.ru*

Рассмотрим многомерный закон сохранения

$$\operatorname{div} \varphi(u) = 0, \quad u = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с лишь непрерывным вектором потока  $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .

Обозначим  $\operatorname{sign}^+(u) = \max(\operatorname{sign} u, 0)$  — функция Хевисайда,  $\operatorname{sign}^-(u) = \min(\operatorname{sign} u, 0) = -\operatorname{sign}^+(-u)$ .

Напомним, что функция  $u = u(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  называется энтропийным субрешением (суперрешением) уравнения (1), если  $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} [\operatorname{sign}^+(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq 0$$

(соответственно,

$$\operatorname{div} [\operatorname{sign}^-(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq 0)$$

в смысле распределений на  $\mathbb{R}^n$ .

Известно, что  $u(x)$  является энтропийным решением уравнения (1) в смысле С. Н. Кружкова [1] тогда и только тогда, когда она является энтропийным суб- и суперрешением этого уравнения одновременно.

Мы будем рассматривать периодические энтропийные субрешения (суперрешения)  $u(x)$  с каноническим базисом периодов  $e_i$ , которые удовлетворяют условиям:  $u(x + e_i) = u(x)$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

С использованием принципов локализации для  $H$ -мер с непрерывными индексами, введенных в работе [2] (см. также [3]), мы устанавливаем, что для существования непостоянного периодического энтропийного субрешения (суперрешения) уравнения (1) необходимым и достаточным является следующее условие линейной невырожденности:

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n, \xi \neq 0 \quad \text{функции } \varphi(u) \cdot \xi = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) \xi_i$$

не постоянны на невырожденных интервалах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00230).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кружков С. Н.** Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
2. **Панов Е. Ю.** О сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сборник. 1995. Т. 186, № 5. С. 103–114.
3. **Panov E. Yu.** Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux // Arch. rational mech. anal. 2010. V. 195, N 2. P. 643–673.

**ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ  
СОБОЛЕВСКОГО ТИПА**

Пинигина Н. Р.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; n-pinig@mail.ru*

В работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для некоторых классов вырождающихся уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическими операторами, действующими по пространственным переменным. В работах [1, 2] изучались вырождающиеся уравнения вида

$$Au_t(x, t) + Bu(x, t) = f(x, t)$$

, где  $f(x, t)$  — действительнзначная функция.

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$  — цилиндрическая область,  $0 < T < +\infty$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  — боковая граница  $Q$ .

Оператор  $A$  — эллиптико-параболический второго порядка, вида

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

оператор  $B$  — эллиптический, вида

$$Bu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0|\xi|^2, \quad m_0 > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Будем считать выполненными условия

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**Первая краевая задача.** Найти решение уравнения

$$\lambda AD_t^{2m+1}u(x, t) + (-1)^m Bu(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = D_t u(x, 0) = \dots = D_t^m u(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, T) = D_t u(x, T) = \dots = D_t^{m-1} u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где  $m \geq 0$  — целое число;  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  — комплексное число;  $D_t^k = \partial^k / \partial t^k$ .

Функция  $f(x, t)$  имеет вид  $f(x, t) = f_1(x, t) + if_2(x, t)$ . Функции  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $b^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a_0(x)$ ,  $b_0(x)$  — действительнзначные функции, заданные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

В работе для поставленной первой краевой задачи (1)–(3) доказываются теоремы существования регулярных решений.

Работа поддержана Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кожанов А. И.** О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.
2. **Kozhanov A. I.** Composite type equation and inverse problem. Utrecht: VSP, 1999.



## ЖЕСТКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Плеханова М. В.

Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск,  
454001 Россия; mariner79@mail.ru

В гильбертовых пространствах  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t)) + Bu(t), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(x) = (1/2)\|x - \tilde{x}\|_{H^1(0,T;\mathcal{X})}^2 \rightarrow \inf. \quad (4)$$

Здесь операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  (линейный, замкнутый, плотно определенный в  $\mathcal{X}$  действует в  $\mathcal{Y}$ ), нелинейный оператор  $N: [t_0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ .

Управление задано функцией  $u \in H^{p+1}(0, T; \mathcal{U})$ . Решение задачи рассматривается в пространстве  $\mathcal{Z}_{p+1} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : Lz - Mz \in H^{p+1}(\mathcal{Y})\}$ .

Множеством  $\mathfrak{W}$  допустимых пар задачи (1)–(4) называется множество пар  $(x, u)$ , таких, что  $u \in \mathfrak{U}_\partial$ ,  $x \in H^1(\mathcal{X})$  — сильное решение задачи (1), (2).

Решение задачи (1)–(4) состоит в нахождении пар  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$ , минимизирующих функционал стоимости  $J(x, u): J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x,u) \in \mathfrak{W}} J(x, u)$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален, оператор  $N: [t_0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  липшицев по двум переменным,  $\text{im } N \subset \mathcal{Y}^1$ ,  $\text{im } B \subset \mathcal{Y}^1$ ,  $\mathfrak{U}_\partial$  является непустым замкнутым выпуклым ограниченным подмножеством пространства  $H^{p+1}(0, T; \mathcal{U})$ ,  $x_0 \in \text{dom } M \cap \mathcal{X}^1$ . Тогда существует решение  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times \mathfrak{U}_\partial$  задачи (1)–(4).

Для  $x_0 \in \text{dom } M$  множество  $u \in H^1(0, T; \mathcal{U})$  таких, что

$$(I - P)x_0 + M_0^{-1}(I - Q)N(t_0, Px_0) = -M_0^{-1}(I - Q)Bu(t_0),$$

обозначим  $H_\partial(x_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, оператор  $N: [t_0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  липшицев по двум переменным, для любых  $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathcal{Y}$  выполняется равенство  $N(t, x) = N(t, Px)$ ,  $\mathfrak{U}_\partial$  является непустым замкнутым выпуклым ограниченным подмножеством пространства  $H^1(0, T; \mathcal{U})$  и  $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(x_0) \neq \emptyset$ . Тогда существует решение  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_1 \times \mathfrak{U}_\partial$  задачи (1)–(4).

## SEMI-FREDHOLM SOLVABILITY OR EXPONENTIAL GROWTH FOR PROTTER PROBLEMS

Popivanov N.<sup>1</sup>, Popov T.<sup>1</sup>, Scherer R.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Department of Mathematics and Informatics,  
University of Sofia, 1164 Sofia, Bulgaria;  
nedyu@fmi.uni-sofia.bg, topover@fmi.uni-sofia.bg*

<sup>2</sup>*Institute for Applied and Numerical Mathematics,  
Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 76128 Karlsruhe, Germany;  
rudolf.scherer@kit.edu*

We study four-dimensional boundary value problems for the nonhomogeneous wave equation, which are analogues of Darboux problems (or Cauchy-Goursat problems) in the plane. Originally they were proposed by Murray H. Protter in the fifties at an AMS conference in New York. The wave equation is considered in a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ , which corresponds to the characteristic triangle in the classical planar Darboux problem. The set  $\Omega$  is bounded by two characteristic cones  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  and a ball  $\Sigma_0$  centered at the vertex  $O$  of  $\Sigma_2$ . The homogeneous data are prescribed on  $\Sigma_1$  and the noncharacteristic ball  $\Sigma_0$ . Many authors studied these problems using different methods, like: Wiener-Hopf method, special Legendre functions, a priori estimates, nonlocal regularization and others. Initially the expectation was that such BVPs are classically solvable for very smooth right-hand side functions. Contrary to this traditional belief, soon it became clear that unlike the planar Darboux problem, the Protter's problem is not well posed. In fact, the adjoint homogeneous problem has smooth classical solutions and the linear space they generate is infinite dimensional. Thus, in the frame of classical solvability the Protter problem is not Fredholm, since it has infinite-dimensional cokernel. Alternatively, Popivanov and Schneider (1995) introduced the notion of generalized solution. They showed that for each  $n \in \mathbb{N}$  there exists a right-hand side function  $f \in C^n(\bar{\Omega})$  of the wave equation, for which the unique generalized solution of the Protter problem has a strong power-type singularity like  $|x|^{-n}$ . It is interesting that the singularity is isolated at a single point – the vertex  $O$  of the characteristic light cone  $\Sigma_2$ , and does not propagate along the bicharacteristics, which makes this case different from the traditional case of propagation of singularity.

In order to study the behavior of the generalized solution, we began in [1] with the case when the right-hand side function  $f$  is a harmonic polynomial. We found the exact asymptotic expansion of the generalized solution in negative powers of the distance to the singular point  $O$ . Based on this result in [2] we treated the general case of smooth right-hand side. When  $f \in C^{10}(\bar{\Omega})$  we found the necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solution. They involve infinite number of orthogonality conditions for  $f$  that comes from the fact that this is not a Fredholm problem. On the other hand, the results show that the linear operator mapping the generalized solution  $u$  into the right-hand side  $f$  is a semi-Fredholm operator in  $C^{10}(\bar{\Omega})$ , i.e., it is a bounded operator that has a finite dimensional kernel or cokernel, and closed range.

While in the case when the right-hand side function is a harmonic polynomial only power type singularities are possible, in the general case of smooth function  $f$  some known estimates suggest that the solution may have at most exponential growth, but the question whether such solutions really exist was still open. We performed numerical experiments and constructed a right-hand side function  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$  such that the corresponding unique generalized solution has indeed exponential growth at the point  $O$ .

The work were partly supported by the Bulgarian NSF under Grants DO 02-75/2008 and DO 02-115/2008.

#### REFERENCES

1. **Popivanov N., Popov T., Scherer R.** Asymptotic expansion of the singular solutions of Protter's problem for the  $3 + 1 - D$  wave equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 331. P. 1093–1112.
2. **Popivanov N., Popov T., Scherer R.** Protter–Morawetz multidimensional problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 278 (to appear).

## О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Попов Н. С.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; popovns@yandex.ru*

В работе рассматриваются краевые задачи для неклассических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе. Исследованию подобных нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений посвящены работы [1,2]. Отметим, что многомерные псевдопараболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  — боковая граница  $Q$ . Пусть  $V$  есть пространство:

$$V = \{v(x, t) : v \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\},$$

норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

**Краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$  являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy|_{(x, t) \in S}. \quad (3)$$

**Краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)}|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy|_{(x, t) \in S}, \quad (4)$$

где  $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  есть вектор внутренней нормали к  $\Gamma$ .

В работе методом продолжения по параметру доказывается регулярная разрешимость нелокальных краевых задач I и II в пространстве  $V$ .

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача со смещением для уравнений в частных производных // Известия вузов. Математика. 2007. Т. 540, № 5. С. 3–26.
2. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Попов С. В., Антипин В. И.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; madu@ysu.ru*

Пусть  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma \in C^2$ . В цилиндрической области  $Q = G \times (0, T)$  с границей  $\Gamma_1 = \Gamma \times (0, T)$  ( $T \leq \infty$ ) рассматривается уравнение третьего порядка:

$$Mu \equiv g(x, t) u_{ttt} + L(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $L$  — эллиптический оператор второго порядка, заданный равенством

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \delta \|\xi\|^2 \quad (\delta > 0, a_{ij} = a_{ji}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, (x, t) \in Q.$$

Без ограничения общности требуем существования открытых подмножеств  $G^+(0)$ ,  $G^+(T)$ ,  $G^-(0)$  и  $G^-(T)$  множества  $G$  таких, что  $\mu(\overline{G^\pm(0)} \setminus G^\pm(0)) = 0$  ( $\mu(\overline{G^\pm(T)} \setminus G^\pm(T)) = 0$ ),  $g(x, 0) > 0$  п.в. (почти всюду) в  $G^+(0)$  ( $g(x, T) > 0$  п.в. в  $G^+(T)$ ),  $g(x, 0) < 0$  п.в. в  $G^-(0)$  ( $g(x, T) < 0$  п.в. в  $G^-(T)$ ) и  $g(x, 0) = 0$  п.в. в  $G^0(0) = G \setminus (\overline{G^+(0)} \cup \overline{G^-(0)})$  ( $g(x, T) = 0$  п.в. в  $G^0(T) = G \setminus (\overline{G^+(T)} \cup \overline{G^-(T)})$ ). Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= 0, & u(x, 0) &= u(x, T) = 0, \\ u_t(x, 0) &= u_0(x) \quad (x \in G^+(0)), & u_t(x, T) &= u_T(x) \quad (x \in G^-(T)), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= 0, & u(x, 0) &= u(x, T) = 0, \\ u_t(x, 0) &= u_0(x) \quad (x \in G^+(0)), & \lim_{t \rightarrow \infty} u_t(x, t) &= 0, \quad T = \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения вида (1) рассматривались в работах [1–3]. В данной работе, уравнение (1) рассматривается при наиболее слабых условиях на коэффициенты уравнения и данные задачи, получены точные результаты о внутренней гладкости решений.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пятков С. Г.** Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск. 1986. С. 65–84.
2. **Пятков С. Г.** О некоторых свойствах решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени // Неклассические уравнения математической физики: Труды 4-го Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000). Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. С. 97–106.
3. **Егоров И. Е., Федоров В. Е.** Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

## ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Попова Т. С.

*Северо-Восточный федеральный университет, ул. Беллинского, 58, Якутск,  
677000 Россия; ptsokt@mail.ru*

В работе рассмотрена задача о равновесии трехмерного вязкоупругого тела, имеющего жесткое включение.

Пусть  $\Omega \subset R^3$  — ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ , данная область задает форму рассматриваемого тела в недеформированном состоянии. Пусть  $\omega \subset \Omega$  — подобласть, которую занимает жесткое включение,  $\partial\omega = \Gamma_\rho$ ,  $\Gamma_\rho$  — гладкая кривая,  $\Gamma \cap \Gamma_\rho = \emptyset$ ,  $\nu$  — внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma_\rho$ . Будем считать, что область  $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{\omega}$  соответствует вязкоупругой части. Для части тела, занимающей область  $\omega$ , мы использовали термин “жесткое включение” в том смысле, что перемещения  $\rho$  точек  $\omega$  являются элементами пространства  $R(\omega)$  инфинитезимальных жестких перемещений.

Пусть  $u = (u_1, u_2, u_3)$  — функции, задающие перемещения точек тела  $\Omega$ ,  $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$  — тензор малых деформаций:  $\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Введем следующие функции

$$w(t, x) = u(t, x) + \int_0^t u(\tau, x) d\tau. \quad (1)$$

Задачу сформулируем следующим образом. В цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$  требуется найти функцию  $u(t, x)$ ,  $u(t, x) = \rho(x)$  в  $\bar{\omega}$ ,  $\rho(x) \in R(\omega)$ ; одновременно в  $Q_0 = \Omega_0 \times (0, T)$  найти функции  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в } Q_0, \quad (2)$$

$$\sigma = A\varepsilon(w) \quad \text{в } Q_0, \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$-\int_{\Gamma_\rho} \sigma \nu \cdot \bar{\rho} = \int_\omega f \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}(x) \in R(\omega). \quad (5)$$

Здесь  $f(t, x) = (f_1, f_2, f_3) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  — заданная функция внешних воздействий,  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$  — тензор напряжений,  $A = \{a_{ijkl}\}$ , при этом коэффициенты  $a_{ijkl}$  удовлетворяют условиям положительной определенности и симметричности.

Сформулированная задача (2)–(5) о равновесии трехмерного вязкоупругого тела с жестким включением имеет единственное решение.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Потапова С. В.

*Научно-исследовательский институт математики СВФУ, ул. Кулаковского, 48,  
Якутск, 677000 Россия; sargur@mail.ru*

В работе А. И. Кожанова [1] методом регуляризации и методом продолжения по параметру доказано существование регулярных решений первой краевой задачи для псевдогиперболических уравнений переменного направления с непрерывными коэффициентами. В данной работе применением тех же методов доказана регулярная разрешимость следующих краевых задач для псевдогиперболических уравнений с разрывным коэффициентом при старшей временной производной и с переменным направлением времени.

Пусть  $Q$  есть прямоугольник  $(-1, 1) \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  — заданные при  $(x, t) \in \bar{Q}$  функции,  $\alpha$  и  $\beta$  — заданные действительные числа. Обозначим  $Q^+ = \{(x, t): (x, t) \in Q, x > 0\}$ ,  $Q^- = \{(x, t): (x, t) \in Q, x < 0\}$ ,  $Q_1 = Q^+ \cup Q^-$ .

**Краевая задача I:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся на множестве  $Q_1$  решением уравнения

$$\operatorname{sign} x u_{tt} - u_{xxt} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0, \quad -1 < x < 0, \quad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(+0, t) = \alpha u(-0, t), \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$\beta u_x(+0, t) = u_x(-0, t), \quad 0 < t < T. \quad (6)$$

**Краевая задача II:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся на множестве  $Q_1$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5), (6), а также условия

$$u(x, T) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad -1 < x < 0. \quad (8)$$

**Краевая задача III:** найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся на множестве  $Q_1$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются граничные условия (2), (5), (6), а также условия

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (9)$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кожанов А. И.** Существование регулярных решений первой краевой задачи для одного класса уравнений соболевского типа переменного направления // Мат. заметки ЯГУ. 1997. Т. 4, № 2. С. 39–48.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Прокопьев А. В.

*Институт математики и информатики СВФУ им. М. К. Аммосова,  
Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия; ProkopyevAV85@gmail.com*

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $Q$  есть цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $K(x, t)$ ,  $\mu(x)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  соответственно. В работе рассматривается уравнение эллиптико-параболического типа:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ k_0 \rho^\alpha(x) |\xi|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq k_1 \rho^\alpha(x) |\xi|^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < k_0 \leq k_1$ ,  $0 < \alpha < n - 1$ ,  $\rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma; x \in \bar{\Omega})$ .

**Обратная задача.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2), а также интегральное условие переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

**Обратная задача II.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2), а также финальное условие переопределения

$$u(x, T) dt = \mu(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Методами регуляризации, срезающих функций и неподвижной точки доказывается существование обобщенного решения обратных задач I и II.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 02.740.11.0609.



## МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ЗАМКНУТОМ МНОЖЕСТВЕ

Прудников В. Я.

*Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136,  
Хабаровск, 680035 Россия; prudnikov.vit@yandex.ru*

Известно [1], что слабо полунепрерывный снизу функционал достигает наименьшего значения на ограниченном замкнутом выпуклом множестве рефлексивного пространства, причем условие выпуклости множества существенно. Целью данной работы является установление условий на функционал, при выполнении которых задача минимизации функционала разрешима и без условия выпуклости множества. Введем следующие обозначения:  $X, Y$  – банаховы пространства, причем  $X$  рефлексивно. Если  $A : X \rightarrow Y$  – линейный слабо замкнутый оператор [2], то определим пространство  $Z$  элементов  $u \in X$  таких, что  $\|u\|_X + \|Au\|_Y < \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть пространство  $Z$  компактно вложено в  $X$ ,  $K$  – ограниченное замкнутое множество из  $Z$ .

Если функционал  $f : \overline{\text{co}} K \times Y \rightarrow R$  таков, что функционалы:

- 1)  $v \rightarrow f(u, v)$  пн. сн. строго равномерно выпуклый для всякого  $u \in \overline{\text{co}} K$ ;
- 2)  $u \rightarrow f(u, v)$  слабо непрерывен на  $\overline{\text{co}} K$  равномерно относительно  $v \in Y$ ,

то при условии слабой полунепрерывности снизу функционала  $F(u) := f(u, Au)$  на  $K$  существует элемент  $u_o \in K$  такой, что  $F(u_o) = \inf_K F$ .

**Теорема 2.** Пусть пространство  $Z$  компактно вложено в  $X$ ,  $K$  – ограниченное замкнутое множество из  $Z$ .

Если функционал  $f : \overline{\text{co}} K \times Y \rightarrow R$  таков, что функционалы:

- 1)  $v \rightarrow f(u, v)$  пн. сн. строго равномерно выпуклый на  $Y$  с модулем выпуклости, не зависящим от  $u \in \overline{\text{co}} K$ ;
- 2)  $u \rightarrow f(u, v)$  слабо непрерывен на  $\overline{\text{co}} K$  для любого  $v \in Y$ ,

то при условии слабой полунепрерывности снизу функционала  $F(u) := f(u, Au)$  на  $K$  существует элемент  $u_o \in K$  такой, что  $F(u_o) = \inf_K F$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
2. Морозов В. А. О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейным неограниченным оператором // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1453–1458.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Пулькина Л. С.

*Самарский государственный университет, ул. Акад. Павлова, 1, Самара, 443011  
Россия; louise@samdiff.ru*

В сообщении представлены некоторые результаты исследования нелокальных задач с интегральными условиями для уравнений с частными производными. Такие задачи в настоящее время весьма активно изучаются, однако в основном рассматриваются уравнения второго порядка.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений высокого порядка  $2m$ ,  $\forall m > 1$ , изучены пока еще мало.

Рассмотрим в прямоугольнике  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ ,  $l, T < \infty$ , уравнение

$$Lu \equiv (-1)^{m-1} D_t^{2m} u - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу: найти в области  $Q$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m, \quad D_t^k u|_{t=T} = 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$\int_0^l K_i(x)u(x, t) dx, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Функции  $K_i(x)$  предполагаются заданными в  $[0, l]$ .

В результате проведенных исследований получены условия, при выполнении которых задача однозначно разрешима.

Обозначим  $W_2^{2,2m}(Q)$  замыкание множества гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), по норме

$$\|u\|_{2,2m}^2 = \int_0^T (\|u\|_{W_2^{2,2m}(0,l)}^2 + \|D_t^{2m} u\|_{L_2(0,l)}^2) dt.$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in Q, \quad c(x, t) - c_t(x, t) > 0; \quad (4)$$

$$K_i(x) \in C^2[0, l], \quad K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0; \quad (5)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_x(x, t) \in L_2(Q), \quad (6)$$

тогда для достаточно большой функции  $c(x, t) - c_t(x, t)$  существует единственное решение  $u(x, t) \in W_2^{2,2m}(Q)$  поставленной задачи. Центральным моментом доказательства этого утверждения является вывод априорных оценок. Необходимые оценки установлены с помощью как классических, так и выведенных в работе [2] неравенств, а так же теорем вложения для анизотропных пространств [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
2. Пулькина Л. С. Краевые задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений высокого порядка / Неклассические уравнения математической физики: Сб. научн. работ. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2010. С. 220–232.

## О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Пятков С. Г.

*Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16,  
Ханты-Мансийск, 628012 Россия; pyatkov@math.nsc.ru*

Мы рассматриваем систему

$$u_t - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = \mathbf{f} + \beta_C C + \beta_T T, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

$$T_t - \lambda T + u \cdot \nabla T = f_T, \quad (2)$$

$$C_t + u \cdot \nabla C - \omega_0 C_z + kC - \lambda_C \Delta C = f_c, \quad (3)$$

где  $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$  ( $G \subset R^n$ ),  $u$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $C$  есть вектор скорости, температура жидкости, давление, и концентрация примеси в жидкости, соответственно. Коэффициент  $f_c$  есть объемная плотность источников загрязнения. Система (1)–(3) дополняется начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = g_1(t, x), \quad T|_{t=0} = T_0, \quad T|_S = g_2(t, x),$$

$$C|_{t=0} = C_0, \quad C|_S = g_3(t, x).$$

Прямые задачи как в стационарном так и в нестационарном случае для системы (1)–(3) хорошо изучены. Имеются также ряд работ по численному решению краевых задач. Мы рассматриваем обратную задачу об определении правой части  $f_c$  in (3), используя данные дополнительных измерений на сечениях области  $G$ . Предполагается, что правая часть представима в виде

$$f_C = \sum_{i=1}^m f_i(x, t) a_i(x', t) + f_0(x, t), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_s), \quad x'' = (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n).$$

Функции  $a_i(x', t)$  в этом представлении неизвестны и восстанавливаются по дополнительной информации вида

$$u|_{S_i} = \psi_i(t, x') \quad (S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (4)$$

где  $\{\Gamma_i\}$  есть набор гладких  $k$ -мерных поверхностей, лежащих в  $G$ . Проблемы такого вида возникают при описании процессов теплопереноса, фильтрации, диффузии и других физических процессов. Отметим, что для параболических уравнений и систем обратные задачи такого вида рассматривались в работах Белова Ю. Я., Аниконова Ю. Е., Иванчова М. и многих других авторов (см. [1, 2]). Мы доказываем локальную а в линеаризованной постановке и глобальную по времени разрешимость задачи (1)–(4). Решение ищется в пространствах Соболева.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант 12-01-00260).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Belov Yu. Ya.** Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. **Ivanchov M.** Inverse problems for equation of parabolic type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. Math. Studies. Monograph Series. V. 10.

## ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

**Раджабов Н. Р.**

*Таджикский национальный университет, ул. Рудаки, 17,  
Душанбе, 734025 Таджикистан; nusrat38@mail.ru*

Пусть  $D = \{|z| < R\}$  и  $\Gamma = \{|z| = R\}$ . В области  $D$  рассмотрим комплексное интегральное уравнение

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \iint_D \left[ p + q \ln \left( \frac{R-r}{R-\rho} \right) \right] \frac{\exp(i\psi)\varphi(s)}{(R-\rho)(s-z)} d\xi d\eta = f(z), \quad (1)$$

где  $p, q$  — заданные вещественные постоянные,  $\theta = \arg s$ ,  $s = \xi + i\eta$ ,  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ ,  $z = x + iy$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $f(z)$  — заданная функция,  $\varphi(z)$  — искомая функция. В случае, когда

$$f(z) = f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (R-\rho)^{k+\gamma} f_k,$$

где  $f_k$  — известные постоянные,  $\gamma = \text{const} > 0$ , имеет место следующее утверждение

**Теорема 1.** Пусть в интегральном уравнении (1)  $p < 0$ ,  $q > 0$ ,  $d = p^2 - 4q > 0$ ,  $\gamma \neq \lambda_1, \lambda_2$ , где  $\lambda_1 = (|p| + \sqrt{d})/2$ ,  $\lambda_2 = (|p| - \sqrt{d})/2$ . Тогда любое решение уравнения (1) класса  $C(\bar{D})$ , представимо в виде

$$\varphi(z) = (R-r)^{\lambda_1} \Phi_1(z) + (R-r)^{\lambda_2} \Phi_2(z) + (R-r)^\gamma \omega(r), \quad (2)$$

где

$$\omega(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\gamma)f_k(R-r)^k}{(k+\gamma)^2 + p(k+\gamma) + q},$$

$\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  — произвольные аналитические функции комплексного переменного  $z$  в  $D$ .

Представление вида (2) дает возможности для интегрального уравнения (1) ставить и исследовать различные граничные задачи. В частности, следующие задачи:

**Задача  $R_1$ .** Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$ , обращающееся в нуль на  $\Gamma$  при  $p < 0$ ,  $q > 0$ ,  $d > 0$  по граничным условиям

$$\begin{cases} [(R-r)^{-\lambda_1}(\lambda_2\varphi(z) + D_{\bar{z}}\varphi(z))]_{\Gamma} = g_1(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ [(R-r)^{-\lambda_2}(\lambda_1\varphi(z) + D_{\bar{z}}\varphi(z))]_{\Gamma} = g_2(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

где  $g_1(\theta), g_2(\theta)$  — заданные функции точек  $\Gamma$ ,  $D_{\bar{z}} = 2(R-r) \exp[-i\psi] \partial/\partial\bar{z}$ .

**Задача  $G_1$ .** Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$ , обращающееся в нуль на  $\Gamma$  при  $p < 0$ ,  $q > 0$ ,  $D > 0$  по граничным условиям

$$\begin{cases} \{(R-r)^{-\lambda_1} \text{Re}[(a_1(t) + ib_1(t))(\lambda_2\varphi(t) + D_{\bar{t}}(\varphi(t)))]\}_{\Gamma} = g_3(\theta), \\ \{(R-r)^{-\lambda_2} \text{Re}[(a_2(t) + ib_2(t))(\lambda_1\varphi(t) + D_{\bar{t}}(\varphi(t)))]\}_{\Gamma} = g_4(\theta), \end{cases}$$

где  $g_3(\theta), g_4(\theta), a_j(t), b_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) — заданные функции точек  $\Gamma$ .

## ЗАДАЧА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Репин О. А.<sup>1</sup>, Кумыкова С. К.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный экономический университет,  
ул. Советской Армии, 141, Самара, 443090 Россия; matstat@mail.ru

<sup>2</sup>Кабардино-Балкарский государственный университет,  
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004 Россия; bsk@rect.kbsu.ru

Рассмотрим уравнение

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где  $l = m$  при  $y > 0$  и  $l = n$  при  $y < 0$ ,  $m, n$  — положительные постоянные, в конечной области  $\Omega$ , ограниченной характеристиками

$$\begin{aligned} AC: \quad x - \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} = 0, & \quad BC: \quad x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} = 1, \\ AD: \quad x - \frac{2}{n+2} (-y)^{(n+2)/2} = 0, & \quad BD: \quad x + \frac{2}{n+2} (-y)^{(n+2)/2} = 1 \end{aligned}$$

уравнения (1).

Пусть  $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$ ,  $J$  — интервал  $0 < x < 1$  прямой  $y = 0$ .

**Задача.** Найти решение

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

уравнения (1) из класса  $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Omega_2 \cup J) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$a_i(x) I_{0+}^{-\beta_i, 0, 2\beta_i-1} u[\theta_0^{(i)}](x) + b_i(x) I_{1-}^{-\beta_i, 0, 2\beta_i-1} u[\theta_1^{(i)}](x) = \gamma_i(x) \quad \forall x \in J, \quad i = 1, 2$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \alpha(x) \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) + \beta(x),$$

где  $\beta_1 = m/(2m+4)$ ,  $\beta_2 = n/(2n+4)$ ,  $\theta_0^{(i)}(x)$ ,  $\theta_1^{(i)}(x)$  — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(x, 0) \in J$ , с характеристиками  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  соответственно;  $a_i(x)$ ,  $b_i(x)$ ,  $\gamma_i(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  — заданные функции, причем

$$a_i(x), b_i(x), \gamma_i(x), \alpha(x), \beta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J),$$

$$a_i^2(x) + b_i^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{J} \quad (i = 1, 2).$$

$I_{0+}^{\alpha, \beta, \gamma} f$ ,  $I_{1-}^{\alpha, \beta, \gamma} f$  — обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования.

При  $m < n$ ,  $m = n$ ,  $m > n$  доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

**ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ,  
ЗАДАНЫМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ  
И НА ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ,  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА  
С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Рузиев М. Х.

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана, ул.  
Дурман йули, 29, Ташкент, 100125 Узбекистан; mruziev@mail.ru*

Пусть  $D = D^+ \cup D^- \cup I$  - область комплексной плоскости  $z = x + iy$ , где  $D^+$  - полуплоскость  $y > 0$ ,  $D^-$  - конечная область полуплоскости  $y < 0$ , ограниченная характеристиками  $AC$  и  $BC$  уравнения

$$(\text{sign } y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\alpha_0/|y|^{1-m/2})u_x + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , и отрезком  $AB$  прямой  $y = 0$ ,  $I = \{(x, y): -1 < x < 1, y = 0\}$ . В уравнении (1)  $m > 0$ ,  $-m/2 < \beta_0 < 1$ ,  $|\alpha_0| < (m + 2)/2$ . Пусть  $D_R^+$  — конечная область, отсекаемая от области  $D^+$  дугой  $A_R B_R$  нормальной кривой  $x^2 + 4y^{m+2}/(m + 2)^2 = R^2$ ,  $-R \leq x \leq R$ ,  $0 \leq y \leq ((m + 2)R/2)^{2/(m+2)}$ ,  $A_R(-R, 0)$ ,  $B_R(R, 0)$ .

Введем обозначения:  $\bar{I}_1 = \{(x, y): -\infty < x \leq -1, y = 0\}$ ,  $\bar{I}_2 = \{(x, y): 1 \leq x < \infty, y = 0\}$ ,  $C_0(C_1)$  — точки пересечения характеристики  $AC(BC)$  с характеристикой, исходящей из точки  $E(c, 0)$ , где  $c \in I$  — произвольное фиксированное число,  $D_R = D_R^+ \cup D_R^-$ ,  $D_R$  — подобласть неограниченной области  $D$ . Рассмотрим диффеоморфизм  $q(x) \in C^1[c, 1]$ , переводящий отрезок  $[c, 1]$  в отрезок  $[-1, c]$ , причем  $q'(x) < 0$ ,  $q(c) = c$ ,  $q(1) = -1$ . В качестве примера такой функции приведем линейную функцию  $q(x) = p - kx$ , где  $k = (1 + c)/(1 - c)$ ,  $p = 2c/(1 - c)$ . Отметим, что в задаче Геллерстедта [1] значение искомой функции в гиперболической части смешанной области  $D$  задается на характеристиках  $EC_0$  и  $EC_1$ .

В данной работе решается новая краевая задача, где характеристика  $EC_0$  освобождена от краевого условия и это недостающее условие Геллерстедта заменено внутренне краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения.

**Задача G.** Требуется найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) Функция  $u(x, y)$  непрерывна в любой подобласти  $\bar{D}_R$  неограниченной области  $D$ ;
- 2)  $u(x, y)$  принадлежит пространству  $C^2(D^+)$  и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3)  $u(x, y)$  является обобщенным решением класса  $R_1(\tau'(x), \nu(x) \in H)$  в области  $D^-$ ;
- 4)  $\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $R^2 = x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{m+2}$ ;
- 5)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям  $u(x, y)|_{y=0} = \tau_i(x)$ ,  $x \in \bar{I}_i$  ( $i = 1, 2$ ),

$$u(x, y)|_{EC_1} = \psi(x), \quad c \leq x \leq (c + 1)/2, \quad u(q(x), 0) = \mu u(x, 0) + f(x), \quad c \leq x \leq 1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при  $x = \pm 1$ ,  $x = c$  могут иметь особенности порядка ниже  $1 - \alpha - \beta$ , где  $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/(2(m + 2))$ ,  $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/(2(m + 2))$ ,  $f(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\tau_i(x)$  — заданные функции, причем  $f(x) \in C[c, 1] \cap C^{1, \delta_1}(c, 1)$ ,  $f(c) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $\psi(x) \in C[c, (c + 1)/2] \cap C^{1, \delta_1}(c, (c + 1)/2)$ ,  $\psi(c) = 0$ ,  $\mu = \text{const}$ , функции  $\tau_i(x)$  удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках  $[-N, -1]$ ,  $[1, N]$ ,  $N > 1$  и для достаточно больших  $|x|$  удовлетворяют неравенству  $|\tau_i(x)| \leq M|x|^{-\delta}$ , где  $\delta$ ,  $M$  — положительные постоянные.

Доказана однозначная разрешимость задачи  $G$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Gellerstedt S.** Quelques problèmes mixtes pour l'équation  $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$  // Arkiv for mat. astron. och. fysik. 1937. N 26A. P. 1–32.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Сайганова С. А.

*Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская,  
244, Самара, 443100 Россия; syomina\_sa@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^\alpha u, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \quad -1 < m < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_{0+,y}^\alpha$  — частная дробная производная Римана — Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , от функции  $u(x, y)$  по второй переменной [1, с. 341].

Уравнение рассматривается в области  $D$ , которая представляет собой объединение верхней полуплоскости  $D^+ = \{(x, y): -\infty < x < \infty, y > 0\}$  и области  $D^-$ , лежащей в нижней полуплоскости ( $y < 0$ ) и ограниченной характеристиками

$$AC: \quad x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC: \quad x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), а также отрезком  $[0, 1]$  прямой  $y = 0$ . Обозначим через  $J = (0, 1)$  единичный интервал прямой  $y = 0$ , а через  $\theta_0(x) = x/2 - i[(m+2)x/2]^{2/(m+2)}$  — точку пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки  $(x, 0) \in J$ , с характеристикой  $AC$ .

Пусть  $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$  — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования, введенный в [2] (см. также [1, С. 326–327]).

**Задача.** Найти решение уравнения (1) в области  $D$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$y^{1-\alpha} u|_{y=0} = 0 \quad (-\infty < x \leq 0, \quad 1 \leq x < \infty),$$

$$A_1(I_{0+}^{a,b,-a-\beta} t^{2\beta-1} u[\theta_0(t)])(x) + A_2(I_{0+}^{a+\beta,0,\beta-a-b-1} u(t,0))(x) = \varphi(x) \quad (x \in J).$$

Здесь  $\beta = m/(2m+4)$ ,  $A_1, A_2, a, b$  — заданные действительные числа,  $\varphi(x)$  — заданная функция.

В работе доказаны теоремы единственности и существования решения исследуемой задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А, Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, N 2. P. 135–143.



**EXISTENCE OF THE GLOBAL SOLUTION OF  
THE INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR  
BOLTZMANN'S MOMENT SYSTEM EQUATIONS  
IN SECOND APPROXIMATION**

**Sakabekov A.**

*Kazakh-British Technical University,  
Tole bi str., 59, Almaty, 050000 Kazakhstan; a.sakabekov@kbtu.kz*

We prove the existence of the global on time solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonlinear Boltzmann's moment system equations in the function space that are continuous by time and summable by  $x$ .

We consider initial and boundary value problem for non-stationary nonlinear Boltzmann's moment system equations in second approximation

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \psi_3 \\ -\sqrt{3} \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10} (D\theta\psi, \theta\psi) \\ -2(D\theta\psi, \theta\psi) \\ -2(D\theta\psi, \theta\psi) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$t > 0, \quad x \in [-a, a],$$

$$\psi_i(0, x) = \psi_i^0(x), \quad x \in [-a, a], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2)$$

$$\psi_i(t, -a) = \psi_i(t, a), \quad t > 0, \quad i = 3, 4, \quad (3)$$

where  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ ,  $\psi_i^0(x) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,

$$(D\theta\psi, \theta\psi) = \left[ \sqrt{\frac{2}{5}} \psi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \right) \right] \left[ \frac{\sqrt{5}}{3} \psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\psi_3 + \psi_4) \right] - \frac{(\psi_4 - \psi_3)^2}{2\sqrt{3}}.$$

**Theorem.** *Let's assume that initial functions satisfy the conditions*

$$\psi_i^0 \in L^1[-a, a], \quad \psi_i^0 \geq 0, \quad x \in [-a, a], \quad \int_{-a}^a \psi_i^0 |\ln \psi_i^0| dx < \infty, \quad i = \overline{1, 4}$$

and the equality (1) take place. Then problem (1)–(3) has nonnegative global solution on time, belonging to space  $C([0, T]; L^1[-a, a])$ , more exactly to space  $C([0, T]; L^1 \ln L^1)$ , moreover

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-a}^a \left( \sum_{i=1}^4 \psi_i (1 + |\ln \psi_i|) \right) dx < \infty, \quad 0 < T < \infty.$$

## ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сафаров Д. С.

*КГУ им. Н. Хусрава Республики Таджикистан, ул. Айни, 299/4,  
Душанбе, 743065 Таджикистан; safarov-5252@mail.ru*

На плоскости  $\mathbb{C}$  рассмотрим эллиптическую систему

$$w_{\bar{z}z} + a^2 w = f(z), \tag{1}$$

$z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $4w_{\bar{z}z} = w_{xx} + w_{yy} + 2iw_{xy}$  — дифференциальный оператор Бицадзе,  $f(z)$  — заданная функция,  $a$  — постоянная.

Будем искать двойкопериодические решения (1) с основными периодами  $h_1, h_2$ ,  $\text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$  в классе Соболева  $W_p^*(\Omega)$ ,  $p > 2$ ,  $\Omega$  — один из параллелограммов решетки  $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 \text{ — целые}\}$ . Класс таких функции обозначим через  $W_p^*$ ,  $p > 0$ . Аналогично вводится класс  $L_p^*$ ,  $p \geq 1$ . Обозначим через  $\Gamma_1$  решетку,  $\Gamma_1 = -\pi/2\Gamma$ ,  $\Omega_1 = \text{mes } \Omega = |h_1|^2 \text{Im}(h_2/h_1)$ ,  $\text{Im}(h_2/h_1) > 0$ . Используя результаты работы [1] и свойства интегральных операторов с ядрами функции Вейерштрасса  $\zeta(z)$ -дзета-функция,  $\sigma(z)$ -сигма-функция, получим

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_p^*$ ,  $p > 0$  и  $a \in \Gamma_1$ . Тогда однородное уравнение (1) имеет два решения, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{ia\bar{z}-ibz} d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} f(z) e^{-ia\bar{z}+ibz} d\Omega = a.$$

При этом все решения (1) представимы в виде

$$w(z) = e^{ia\bar{z}-ibz} [c_1 + T_{\zeta}(f e^{-ia\bar{z}+ibz})] + e^{-ia\bar{z}+ibz} [c_2 + T_{\zeta}(f e^{ia\bar{z}-ibz})],$$

$c_1, c_2$  — произвольные постоянные, а число  $b$  удовлетворяет уравнению

$$\exp[ia\bar{h}_1 - ibh_1] = \exp[ia\bar{h}_2 - ibh_2],$$

$T_{\zeta}\rho$  — интегральный оператор с ядром дзета-функция Вейерштрасса

$$T_{\zeta}\rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} p(t)\zeta(t-z) d\Omega.$$

**Теорема 2.** Пусть  $a \notin \Gamma_1$ . Тогда уравнение (1) в классе  $W_p^*(\Omega)$ ,  $p > 2$  при любой  $f \in L_p^*$  имеет одно единственное решение вида

$$w(z) = e^{ia\bar{z}} T_{\sigma}^+(f e^{-ia\bar{t}}) + e^{-ia\bar{z}} T_{\sigma}^-(f e^{ia\bar{t}}),$$

где  $T_{\sigma}\rho$  — интегральный оператор с ядром дзета-функция Вейерштрасса

$$T_{\sigma}^{\pm}\rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} p(t) \frac{\sigma(t-z \pm \Delta)}{\sigma(\pm\Delta)\sigma(t-z)} d\Omega, \quad \Delta = -\frac{\Omega}{\pi} ia, \quad \Delta \notin \Gamma.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сафаров Д. С. Дифф. уравнения. 1991. Т. 1, № 2. С. 656–664.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сафиуллова Р. Р.

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Бишовой,  
просп. Ленина, 37, Стерлитамак, 453120 Россия;  
regina-saf@yandex.ru*

Для уравнений гиперболического типа исследуется разрешимость некоторой задачи нахождения вместе с решением  $u(x, t)$  дополнительной неизвестной функции  $q(t)$ .

Пусть  $Q$  есть цилиндр конечной высоты  $T$ ,  $Q = \{(x, t) | x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$ .

Пусть  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$ ,  $\mu(t)$  — заданные при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$  функции.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции  $u(x, t)$ ,  $q(t)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u_t = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = \tilde{\varphi}(t), \quad (4)$$

$$u_x(1, t) = \tilde{\psi}(t), \quad (5)$$

$$u(0, t) = \mu(t). \quad (6)$$

Для поставленной обратной задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

При доказательстве используется техника, основанная на переходе от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной задаче, доказательстве разрешимости этой задачи и далее построении с помощью решения вспомогательной задачи решения исходной задачи.

При решении вспомогательной задачи используются метод регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

## ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Сгибнев М. С.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад.Копюга, 4,  
Новосибирск, 630090 Россия; sgibnev@math.ru*

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение общего вида порядка  $m$

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h z^{(j)}(t-u) \mu_j(du) = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

в котором  $z(t)$  — неизвестная функция,  $h > 0$ ,  $\mu_j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , — конечные комплекснозначные меры, определенные на борелевских подмножествах отрезка  $[0, h]$ , а известная функция  $f(t)$  такова, что интеграл  $\int_0^\infty e^{\gamma t} |f(t)| dt$  конечен при некотором  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Зададим начальное условие в виде  $z(t) = g(t)$ ,  $t \in [-h, 0]$ , где функция  $g(t)$   $m$  раз дифференцируема на отрезке  $[-h, 0]$ , причем  $g^{(m)}(t) \in L_1(-h, 0)$ . Обозначим  $\hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{st} f(t) dt$ ,  $s \in \Pi(\gamma) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \leq \gamma\}$  и пусть  $P(s) := \sum_{j=0}^m (-s)^j \hat{\mu}_j(s)$ . Назовем уравнение  $P(s) = 0$  *характеристическим уравнением* для (1). Будем предполагать, что множество  $\mathcal{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$  корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости  $\Pi(\gamma)$ , конечно, и что  $\operatorname{Re} s_j < \gamma$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Мы не исключаем случая, когда  $\mathcal{Z} = \emptyset$ . Кратностью корня  $s_j \in \mathcal{Z}$  называется положительное целое число  $m_j$  такое, что  $P(s) = (s - s_j)^{m_j} g(s)$ ,  $g(s_j) \neq 0$ . Пусть  $\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k b_{jk} / (s - s_j)^k$  — главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки  $s = s_j \in \mathcal{Z}$  аналитической функции  $\{M(s) + \hat{f}(s)\} / P(s)$ , где

$$M(s) := \sum_{j=0}^m \hat{\mu}_j(s) \sum_{k=0}^{j-1} (-s)^k z^{(j-1-k)}(0) - \sum_{j=0}^m (g^{(j)})^\wedge(s) \hat{\mu}_j(s).$$

**Определение.** Положительная функция  $L(x)$ ,  $x > 0$ , называется медленно меняющейся на бесконечности, если  $L(tx)/L(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$  и любом  $t > 0$ . Функция  $R(x) = x^\beta L(x)$  называется правильно меняющейся на бесконечности с показателем  $\beta$ .

Обозначим через  $\mu^{k*}$  —  $k$ -кратную свертку меры  $\mu$ :  $\mu^{1*} := \mu$ ,  $\mu^{(k+1)*} := \mu^{k*} * \mu$ ,  $k \geq 1$ . Для меры  $\mu$  на  $\mathbb{R}$  обозначим через  $\mu_c$  ее абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега, а через  $\mu_s$  — ее сингулярную часть:  $\mu_s := \mu - \mu_c$ , т.е.  $\mu_s = \mu_d + \mu_s$ , где  $\mu_d$  — дискретная компонента меры  $\mu$ , а  $\mu_s$  — ее сингулярная компонента в обычном смысле. Пусть  $|\mu|$  — полная вариация меры  $\mu$ . Запись  $f(t) \sim cg(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$ , означает что  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = c$ ; здесь  $c$  — постоянная величина.

**Теорема.** Допустим, что функция  $\tau(x)$  правильно меняется на бесконечности с показателем  $\alpha \leq -1$ , причем  $\int_0^\infty \tau(x) dx < \infty$ , и выполнено условие  $\int_{0+}^{kh} e^{\gamma x} |(\mu_m^{k*})_s| dx < |\mu_m^k(\{0\})|$  при некотором целом  $k \geq 1$ . Пусть  $s_1, \dots, s_l$  — все корни характеристического уравнения, лежащие в полуплоскости  $\Pi(\gamma)$ , с кратностями  $m_1, \dots, m_l$ , причем  $\operatorname{Re} s_j < \gamma$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Предположим, что  $f(t) \sim c\tau(x)/e^{\gamma t}$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Тогда для решения  $z(t)$  уравнения (1) с указанным начальным условием справедливо разложение

$$z(t) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} b_{jk} \frac{t^{k-1} e^{-s_j t}}{(k-1)!} + r(t),$$

в котором  $r(t) \sim c\tau(x)/[P(\gamma)e^{\gamma t}]$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**О МАЛЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОКРЕСТНОСТЯХ  
НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА**

**Сидоров Н. А.**

*Иркутский госуниверситет,  
ул. К. Маркса, 1, Иркутск, 664003 Россия;  
sidorovisu@gmail.com*

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0$$

с параметром  $\lambda$ , являющимся элементом линейного нормированного пространства  $\Lambda$ . Линейный оператор  $B(0)$  не имеет ограниченного обратного. Область значений оператора  $B(0)$  может быть незамкнутой. Нелинейный оператор  $R(x, \lambda)$  непрерывен в окрестности нуля,  $R(0, 0) = 0$ .

Получены достаточные условия существования непрерывного решения в некотором открытом множестве  $S$  пространства  $\Lambda$ . Нуль пространства  $\Lambda$  принадлежит границе множества  $S$ . Решения с максимальным порядком малости строятся методом последовательных приближений. Предлагается метод последовательных асимптотических приближений разветвляющихся решений. Метод применен для исследования нелинейных краевых задач.

Работа частично была поддержана Федеральной программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, госконтракт П696.

## КОНТАКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Синявский А. С.

*Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; madu@ysu.ru*

В области  $Q_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$  рассматривается параболическое уравнение с меняющимся направлением времени:

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k (-1)^m \operatorname{sign} x \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = 0, \quad \alpha_k > 0. \quad (1)$$

При  $n = m = 1$  краевые задачи для уравнения (1) изучались в [1]. При  $m = 1$  краевые задачи для уравнения (1) рассматривались в работах [2, 3].

Известно, что в краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гильбертовским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам  $H_{xt}^{p,p/2m}$  при  $p \geq 2m$ . Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удается показать, что нецелый показатель  $p - [p]$  пространства  $H_{xt}^{p,p/2m}$  может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения (см. [4, 5]).

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для итерированных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени (1) при  $m \geq 2$ , уточняются результаты [6] при  $m = 2, 3$ .

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Ахмедов Х. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, 1989.
3. Попов С. В. Нелокальные контактные краевые задачи для итерированных уравнений теплопроводности // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т. 1, № 2. С. 55–65.
4. Попов С. В. О гладкости решений параболических уравнений сменяющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
5. Попов С. В., Потапова С. В. Гильбертовские классы решений  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.
6. Tersenov S. A. On a method of solving initial boundary value problems for higher order equations // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 1. С. 138–145.

**НОВЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С  $K$ -СЛЕДОМ  
ДЛЯ РЕШЕНИЙ С СУЩЕСТВЕННЫМИ  
ОСОБЕННОСТЯМИ  
В РАБОТАХ В. В. КАТРАХОВА**

**Ситник С. М.**

*Воронежский институт МВД России, просп. Патриотов, 53,  
Воронеж, 394065 Россия; mathsms@yandex.ru*

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики, см., например, обзор [1] и библиографию в нем. Значительный вклад в эту теорию и ее приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова, ученика Ивана Александровича Киприянова.

Особо следует выделить введенный В. В. Катраховым в [2–3] новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. При помощи операторов преобразования [4–5] В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свертки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это краевое условие  $K$ -следом. В терминах  $K$ -следа получается характеристика решений: решения без особенностей, со степенными особенностями, с существенными особенностями. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки: существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для решений без существенных особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом [6], областей в пространствах Лобачевского [7] и случая угловых точек на границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sitnik S. M.** Transmutations and Applications: a survey // arXiv. 2010. 1012.3741.
2. **Катрахов В. В.** Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1041–1045.
3. **Катрахов В. В.** Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 849–876.
4. **Катрахов В. В.** Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 1. С. 86–97.
5. **Катрахов В. В.** Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 5. С. 1049–1051.
6. **Катрахов В. В., Ситник С. М.** Краевая задача для стационарного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 797–799.
7. **Катрахов В. В., Емцева Е. Д.** Разрешимость сингулярной краевой задачи в областях плоскости Лобачевского // Сиб. журн. индустр. мат. 2008. Т. 11, № 3. С. 71–85.

## О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Сотволдиева Г. Т.

*Институт математики при университете НУУз,  
ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, 100064 Узбекистан;  
rasul.turaev@mail.ru*

Основы теории нагруженных уравнений были разработаны в работах А. М. Нахушева и его учеников. Опубликованы десятки работ, в которых исследованы различные неклассические задачи для нагруженных уравнений. Это продиктовано многочисленными практическими приложениями в газо-гидродинамике, в математической биологии и других областях. В частности появились задачи со свободной границей для нагруженного уравнения теплопроводности, где правая часть уравнения содержит значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности [1, 2].

В настоящей заметке рассматривается задача Требуется найти пару функций  $s(t)$ ,  $u(x, t)$ , такие что  $s(t)$  определена и монотонна возрастающая на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , а функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} - u_t = f(u(x_0, t)), \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

и условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0) = s_0 > 0, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(s(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где функция  $f(\xi)$  определена для  $|\xi| < \infty$  и ограничена в замкнутом множестве аргумента, а  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — заданные функции,  $x_0$ ,  $s_0$ ,  $\alpha$  — положительные постоянные, причем  $0 < x_0 \leq s_0$ . Сначала при помощи принципа экстремума устанавливаются оценки для  $u(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  и на их основе доказывается монотонность неизвестной границы, которые необходимы для глобальной разрешимости задачи. Далее исследованы вопросы монотонной и непрерывной зависимости решения от данных.

В работе [1] доказана локальная разрешимость поставленной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Briozzo A. C., Tarzia D. A.** A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. 2006. V. 181. P. 809–819.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Спиридонова Н. Р.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; nariya@yandex.ru*

В работе [1] была рассмотрена задача Трикоми в неограниченной области, где получено улучшение гладкости решения в классах Гельдера и при этом был введен новый класс решений задачи. В настоящей работе выписываются условия дополнительной гладкости задачи Трикоми в неограниченной области.

Рассматривается область  $D$ , неограниченная в верхней полуплоскости  $y > 0$ , ограниченная в нижней полуплоскости  $y < 0$  характеристиками  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 1.$$

В неограниченной области  $D$  рассматривается задача Трикоми. Задача состоит в нахождении решения  $u(x, y)$  уравнения

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (m > 0), \quad (1)$$

которая обращается в нуль на бесконечности и удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{y=0} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x \leq 0, \quad 1 < x < \infty, \quad (2)$$

$$u|_{\xi=0} = \psi(\eta) \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3)$$

где  $\psi(\eta)$  имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем  $\delta$ , причем  $\psi(0) = 0$ ,  $(\xi, \eta)$  — характеристические координаты.

Решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегрального уравнения

$$(1 + \sin \pi\beta) \Phi(x) + \frac{\cos \pi\beta}{\pi} \int_0^1 \frac{\Phi(t) dt}{t-x} = (1-x)^{-2\beta} \psi_1(x). \quad (4)$$

Разрешимость поставленной задачи сводится к исследованию сингулярного интегрального уравнения (4) (см. [2]), выписываются дополнительные условия на входные данные задачи Трикоми для существования гладких решений поставленной задачи Трикоми в классах Гельдера.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Спиридонова Н. Р. Гладкость решения задачи Трикоми в неограниченной области // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 140–147.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.

## О СИММЕТРИЯХ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ

Степанова И. В.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036 Россия;  
stepiv@icm.krasn.ru*

Как известно, процессы конвекции и термодиффузии тесно связаны между собой и, как правило, исследуются совместно. Уравнения термодиффузионной конвекции достаточно сложны, поскольку необходимо учитывать градиенты плотности, которые могут вызываться нагревом смеси, разностью концентраций или изменением давления. Несмотря на интерес к термодиффузионным течениям не только с точки зрения возможных технологических приложений, но и как к фундаментальной физической проблеме, до сих пор нет общих методов исследования уравнений, описывающих данные течения [1].

При анализе систем нелинейных уравнений в частных производных, таких, как уравнения термодиффузии, необходимо применять достаточно мощные математические методы. Одним из них является теоретико-групповой анализ, позволяющий изучить инвариантные свойства дифференциальных уравнений, в том числе и в зависимости от произвольных параметров, входящих в систему [2]. Дифференциальные уравнения часто содержат произвольные функции или параметры, которые не строго фиксированы и часто определяются из эксперимента. В групповом анализе для определения произвольных параметров решается задача групповой классификации, которая помимо аналитических представлений произвольных функций помогает также найти группы преобразований переменных, входящих в систему. Знание групп преобразований позволяет строить инвариантные подмодели, интегрировать которые, как правило, бывает проще, чем исходную систему.

В работе приведен обзор исследований по групповым свойствам уравнений конвекции в случаях однородной жидкости, бинарной смеси, нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации, а также в случае, когда коэффициенты переноса являются функциями параметров состояния. Приведены примеры, как, используя результаты групповой классификации, можно строить решения исходной системы, инвариантные относительно найденных преобразований. Построено и проанализировано несколько подмоделей, описывающих автомодельные и стационарные режимы течения. Некоторым из решений дана физическая интерпретация.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00283), а также Интеграционным проектом СО РАН № 44.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

## ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА МНОГООБРАЗИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Тарасова Г. И.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия; gi-tarasova@mail.ru*

Метод исследования граничных задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, основанный на теории вложения весовых функциональных пространств, впервые был предложен Л. Д. Кудрявцевым. Дальнейшее развитие получил в работах С. М. Никольского, П. И. Лизоркина, Н. В. Мирошина и др. [1, 2].

Данная работа посвящена исследованию однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений, вырождающихся на многообразиях произвольной размерности и изучению дифференциальных свойств решения этой задачи в зависимости от коэффициентов, правой части уравнения и граничных функций.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная  $n$ -мерная область в пространстве  $R_n$  с  $m$ -мерной границей  $\partial\Omega$ , где  $m = 1, 2, \dots, n-1$ . Символом  $\rho(x)$  обозначим регуляризованное расстояние от точки  $x \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$  и  $u^{(k)} = \partial^{|k|}u(x)/\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}$  — обобщенные производные функции  $u(x)$ , где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  — мультииндекс и  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ .

Предположим, что  $r$  — неотрицательное число,  $\alpha, p$  — действительные числа и  $p \geq 1$ . Пусть  $p_k > 0$  для любого  $k : |k| \leq r$ . В ограниченной области  $\Omega$  с  $m$ -мерной границей  $\partial\Omega$  ( $m < N$ ) рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \sum_{|k| \leq r} (-1)^{|k|} (a_k(x) |u^{(k)}(x)|^{p_k-2} u^{(k)}(x))^{(k)} = F, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

с действительными коэффициентами  $a_k(x)$ .

Функция  $U(x)$  является обобщенным решением уравнения (1) если удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{|k| \leq r} a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x) v^{(k)}(x) \right] dx = \langle F, v \rangle$$

для любого  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Для заданного функционала  $F \in V_{q,-\alpha}^{-r}(\Omega)$ ,  $q = p/(p-1)$  доказано существование и единственность обобщенного решения уравнения (1), принадлежащее пространству  $V_{p,\alpha}^r(\Omega)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Мирошин Н. В.** Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением // Тр. Мат. ин-та РАН. 1992. Т. 194. С. 179–195.
2. **Iskhokov S. A.** Existence and uniqueness of solution for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 22–38.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТИПА ФЛОРИНА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Тахиров Ж. О.<sup>1</sup>, Тураев Р. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский государственный педагогический университет,  
ул. Хос Хожиб, 103, Ташкент, Узбекистан; prof.takhirov@yahoo.com

<sup>2</sup>Институт математики при НУУз, ул. Дурмон йули, 29,  
Ташкент, 100064 Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

Задачи с интегральным граничным условием встречаются во многих физических процессах. Например, в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня [1]. Появились работы в которых исследованы задачи со свободной границей с интегральным условием [2, 3].

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина в следующей постановке: найти пару функций  $u(x, t)$ ,  $s(t)$ , такие что  $s(t)$  определена и непрерывно дифференцируема в промежутке  $0 \leq t \leq T$ , а функция  $u(x, t)$  в области  $D = \{(x, t): 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$  удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

начальным и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0) = s_0 > 0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\int_0^{s(t)} u(x, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(s(t), t) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  — заданные функции,  $p = \text{const}$ .

Сначала задача сведена к задаче типа Стефана с нелокальным условием, а затем исследовано поведение свободной границы на заданном промежутке времени. Установлены априорные оценки, при помощи которых доказаны теоремы единственности и существования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. appl. math. 1963. V. 21.
2. Cannon J. R. The one phase Stefan problem subject to the specification of energy // J. mat. anal. appl. 1982. V. 86. P. 281–291.
3. Comparini E., Tarzia D. A. A Stefan problem for the heat equation subject to on integral condition // Rend. sem. mat. univ. Padova. 1985. V. 73. P. 119–136.

## О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Телков М. Г., Наимов А. Н.

*Вологодский государственный технический университет, ул. Ленина, 15,  
Вологда, 160000 Россия; m.telkov@yandex.ru, nan@rambler.ru*

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u = u(t, x), \quad t > 0, \quad r < x < R, \quad (1)$$

$$c_r \frac{\partial u}{\partial t}(t, r) - k \frac{\partial u}{\partial x}(t, r + 0) = Q_0, \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(t, r + 0) = h_r(u(t, r) - u(t, r + 0)), \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(t, R - 0) = h_R(u(t, R - 0) - u(t, R)), \quad (4)$$

$$c_R \frac{\partial u}{\partial t}(t, R) + \alpha_R u(t, R) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(t, R - 0), \quad (5)$$

$$u(0, x) = u_0, \quad r \leq x \leq R. \quad (6)$$

Начально-краевая задача (1)–(6) характеризует процесс нагрева в системе “ТЭН-песок-воздух”. Задача подобного вида впервые была рассмотрена в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [1] при исследовании температурного режима в системе “печь-стержень”. Имеет место следующая

**Теорема.** Пусть  $k \neq 0$ ,  $c_r \neq 0$ ,  $c_R \neq 0$ ,  $h_r > 0$ ,  $\alpha_R > 0$ . Тогда существует единственное решение задачи (1)–(6), представимое в виде

$$u(t, x) = u_0(x) + u_1(x) e^{-\lambda_1 a^2 t} + \dots + u_n(x) e^{-\lambda_n a^2 t} + \dots,$$

где

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0(r + 0) + \frac{Q_0}{h_r}, & x = r, \\ \left(1 + \frac{\alpha_R}{h_R}\right) \frac{r Q_0}{R \alpha_R} + \frac{r Q_0}{k} \ln \frac{R}{x}, & r < x < R, \\ \frac{r Q_0}{R \alpha_R}, & x = R. \end{cases}$$

Для нахождения чисел  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  решаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x) + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx}(x) + \lambda v(x) = 0, \quad r < x < R,$$

$$\frac{h_r c_r a^2 \lambda}{h_r - c_r a^2 \lambda} v(r + 0) + k \frac{dv}{dx}(r + 0) = 0,$$

$$\frac{h_R(\alpha_R - c_R a^2 \lambda)}{h_R + \alpha_R - c_R a^2 \lambda} v(R - 0) + k \frac{dv}{dx}(R - 0) = 0.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Избранные** труды А. А. Самарского. М.: МАКС Пресс, 2003.

## СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тихонова И. М.

*Институт математики и информатики, Северо-Восточный федеральный  
университет, ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия;  
irinamikh3007@mail.ru*

Теория уравнений смешанного типа берет свое начало от фундаментальных исследований Ф. Трикоми и С. Геллестедта, где впервые были поставлены краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа на плоскости. Уравнения смешанного типа имеют много приложений в задачах механики, в частности, в трансзвуковой газовой динамике, а также в без моментной теории оболочек с кривизной переменного знака. В настоящее время теория уравнений смешанного типа достаточно развита, но к исследованию разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа стационарный метод Галеркина со специальным выбором базисных функций почти не применялся.

Идея решения задачи с помощью стационарного метода Галеркина следующая. Приближенное решение краевой задачи ищется в виде

$$v^N = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k. \quad (1)$$

Функции  $\{\varphi_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$  ортонормированы в  $L_2(Q)$  и являются решением спектральной задачи

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} v &\equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, & (x, t) \in Q, \\ v|_{S_T} &= 0, & v|_{t=0} = 0, & v_t|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $c_k^N$  определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Mv^N, \psi_k) = (e^{-2\lambda t} f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

Данное равенство (1) представляет с собой систему  $N$  линейных алгебраических уравнений. Если для данной смешанной задачи справедлива теорема единственности, то данная система (1) при достаточно большом  $N$  оказывается однозначно разрешимой и ее решение стремится в норме к решению смешанной задачи. В работе рассматривается краевая задача В. Н. Врагова [1] и дается доказательство единственности решения данной задачи в пространстве  $W_2^2$ , содержащем все производные входящие в уравнение и интегрируемые с квадратом по цилиндрической области  $Q$ , где рассматривается само уравнение смешанного типа. Далее строится приближенное решение краевой задачи по методу Галеркина с помощью решения алгебраической системы уравнений и для него получена априорная оценка. На основе полученной оценки доказана теорема об однозначной регулярной разрешимости краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта 02.740.11.0609) и государственной стипендией РС (Я) научным сотрудникам, молодым научным сотрудникам и аспирантам на 2012 г.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Врагов В. Н.** Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Удалова Г. Ю.

*Самарский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Молодогвардейская, 194, Самара, 443001 Россия; yueyeg@yandex.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy}) = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\alpha, \beta$  — заданные положительные числа, и следующую задачу.

**Задача 1.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad u_{xxy}, u_{yyy} \in C(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(Lu) &= 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \\ u_x(0, y) &= u_x(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad u_y(x, \beta) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где  $\psi(x), \varphi(x), g(x), h(x)$  — заданные достаточно гладкие функции,  $\psi'(0) = \psi'(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ .

Уравнение (1) в области  $D$  равносильно уравнению смешанного эллипτικο-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0. \end{cases}$$

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

**Задача 2.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$ , удовлетворяющие условиям (2), (3)–(5) и, кроме того,

$$Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in D_- \cup D_+, \quad f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Следуя [1], где изучена краевая задача для уравнения параболично-гиперболического типа третьего порядка, методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задач 1 и 2. Решения поставленных задач построены в виде сумм ортогональных рядов. Доказана устойчивость решения задач по граничным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сабитов К. Б.** Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // ДАН. 2009. Т. 427, № 5. С. 593–596.

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГЛАДКОМ ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОРЯДКАМИ НУЛЕЙ

Урбанович Т. М.

*Полоцкий государственный университет, ул. Стрелецкая, 4,  
Полоцк, 211440 Беларусь; UrbanovichTM@gmail.com*

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$a\varphi + bS\varphi = f \quad (1)$$

с оператором Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

где  $\Gamma$  — гладкий замкнутый контур, коэффициенты  $a, b$  и правая часть  $f$  принадлежат классу Гельдера  $H(\Gamma)$ .

Уравнение (1) является уравнением нормального типа, если коэффициенты  $c = a + b$  и  $d = a - b$  обратимы в классе  $H(\Gamma)$ , т.е. они отличны от нуля всюду на  $\Gamma$ . Исчерпывающее исследование уравнения этого типа было впервые проведено Ф. Д. Гаховым и изложено в его монографии [1]. Оно основывается на сведении уравнения (1) к эквивалентной задаче линейного сопряжения и эффективного решения последней.

Метод Ф. Д. Гахова также можно применить в исключительном случае, когда функции  $a \pm b$  допускают нули в конечном числе точек контура:

$$(a + b)(t) = O(|t - \tau|^{\alpha\tau}) \quad \text{при } t \rightarrow \tau \in E,$$

$$(a - b)(t) = O(|t - \tau|^{\alpha\tau}) \quad \text{при } t \rightarrow \tau \in F,$$

где конечные множества  $E$  и  $F$  не пересекаются.

В случае целых положительных  $\alpha_\tau$  уравнение (1) на гладком замкнутом контуре интегрирования  $\Gamma$  было впервые рассмотрено Ф. Д. Гаховым [2] и Л. А. Чикиным [3].

В работе [4] исследованы задачи линейного сопряжения, которые эквивалентны уравнению (1) в предположении, что одна из функций  $(a \pm b)(t)$  допускает один нуль произвольного порядка на контуре  $\Gamma$ .

В данной работе найдены условия разрешимости и явная формула решения уравнения (1) в предположении, что обе функции  $(a \pm b)(t)$  допускают на контуре  $\Gamma$  конечное число нулей произвольных неотрицательных порядков  $\alpha_\tau$  (случай, когда нули имеет лишь одна из функций  $(a \pm b)(t)$  не исключается).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.
2. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения // Изв. Казанского физ.-мат. общества. 1949. Т. 14, сер. 3. С. 75–160.
3. **Чикин Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Ученые записки Казанского гос. ун-та. 1953. Т. 113, кн. 10. С. 57–105.
4. **Михайлов Л. Г., Усмонов Н.** Сингулярные краевые задачи сопряжения // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 3. С. 309–313.



**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ  
ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА  
ПРИ НОВЫХ ИМПЕДАНСНЫХ ГРАНИЧНЫХ  
УСЛОВИЯХ С ПАМЯТЬЮ**

Урев М. В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090 Россия;  
mih.urev2010@yandex.ru*

В данной работе исследуется начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в ограниченной вакуумной области на конечном временном интервале. На хорошо проводящей границе области рассматриваются диссипативные граничные условия с памятью, которые отличаются от применяемых в настоящее время [1, 2]. Данное граничное условие получено в работе [3] автора и имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{H}(\mathbf{x}, \xi) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\xi}{\sqrt{t - \xi}} \equiv C_\sigma D_{t_0+, t}^{1/2}(\mathbf{H})(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $D_{t_0+, t}^{1/2}$  обозначает левосторонний оператор дробного дифференцирования по  $t$  Римана — Лиувилля порядка  $1/2$ ,  $\sigma$  — проводимость,  $\mu$  — магнитную проницаемость границы области. В случае гармонической зависимости электромагнитного поля от времени такое граничное условие при  $t_0 \rightarrow -\infty$  переходит в классическое импедансное условие М. А. Леонтовича.

В подходящих функциональных пространствах изучен оператор Максвелла

$$A\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \{\text{rot } \mathbf{H}, -\text{rot } \mathbf{E}\}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

с граничными условиями (1) и доказана теорема существования и единственности соответствующей начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fabrizio M., Morro A.** A boundary condition with memory in electromagnetism // Arch. rational mech. anal. 1996. V. 136. P. 359–381.
2. **Nicaise S., Pignotti C.** Energy decay rates for solutions of Maxwell's system with a memory boundary condition // Collectanea mathematica, North America. 2007. V. 58. P. 1–16.
3. **Urev M. V.** Boundary conditions for Maxwell equations with arbitrary time dependence // Comput. math. math. phys. V. 37, N 12. P. 1444–1451.

## О НЕКОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Уткина Е. А.

Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008  
Россия; eutkina1@yandex.ru

Рассмотрим псевдопараболическое уравнение порядка  $2n$

$$L(u) = \sum_{(i)=(0)}^{(2)} (a^{(i)} D_{(x)}^{(i)} u)(x) = f(x), \quad a^{(2)} \equiv 1, \quad (1)$$

где для компактности записи применяются мультииндексы и операции с ними: например,  $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(0) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_n$ ,  $\sum_{(i)=(0)}^{(2)} = \sum_{i_1=0}^2 \dots \sum_{i_n=0}^2$ ,  $D_{(x)}^{(i)} = D_{x_1}^{i_1} \dots D_{x_n}^{i_n}$ ,  $|i| = i_1 + \dots + i_n$ , а  $D$  — оператор дифференцирования  $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$  при  $k = 1, 2, \dots$ ,  $D_t^0$  — оператор тождественного преобразования, и оператор интегрирования  $D_{t_1}^{-1} \varphi \equiv \int_0^{t_1} \varphi(t) dt$ .

Пусть  $D = \{0 < x_k < x_{k1}, k = \overline{1, n}\}$  — прямоугольный параллелепипед в  $n$ -мерном пространстве,  $X_{k0}$ ,  $X_{k1}$  — его грани при  $x_k = 0$ ,  $x_k = x_{k1}$  ( $k = \overline{1, n}$ ) соответственно, а коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам  $a^{(i)} \in C^{(i)}(\overline{D})$ ,  $f \in C^{(0)}(\overline{D})$ .

**Задача Дирихле:** Найти функцию  $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{1,0,\dots,0}(D \cup X_{10}) \cap C^{0,1,\dots,0}(D \cup X_{20}) \cap \dots \cap C^{0,0,0,\dots,1}(D \cup X_{n0}) \cap C^{(0)}(\overline{D})$ , являющуюся в  $D$  решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u|_{X_{k0}} &= \varphi_{k0}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ u|_{X_{k1}} &= \varphi_{k1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из принадлежности  $u(x)$  классу  $C(\overline{D})$  следуют соотношения:

$$\varphi_{i0}(x_1, \dots, x_{j1}, \dots, x_n) = \varphi_{j1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Задача Дирихле разрешима однозначно не при любых гладких коэффициентах  $a^{(i)}$ . То есть однородное уравнение (1) с нулевыми условиями на границах  $D$  может иметь ненулевое решение. Подтверждением этому служат примеры.

Пример 1. В области  $D = \prod_{k=1}^n [0, \pi]$  требуется найти регулярное решение уравнения  $D_{(x)}^{(2)} u + D_{x_1}^2 \dots D_{x_{n-1}}^2 u = 0$  с нулевыми условиями на всей границе. Непосредственным вычислением можно убедиться, что искомой функцией, в частности, является  $u = \prod_{k=1}^n \sin x_k$ .

Пример 2. В той же области  $D$  требуется найти регулярное решение уравнения  $D_{(x)}^{(2)} u + (-1)^{n-1} u = 0$  с нулевыми условиями на всей границе. Непосредственным вычислением можно убедиться, что искомой функцией, в частности, является функция из примера 1.

## ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Фалалеев М. В.

*Иркутский государственный университет,  
ул. К. Маркса, 1, Иркутск, 664003 Россия; mihail@ic.isu.ru*

Ряд неклассических начально-краевых задач математической физики редуцируется к исследованию вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t k(t-s)u(s) ds + f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где  $B, A, k(t)$  — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из банахова пространства  $E_1$  в банахово пространство  $E_2$ ,  $B$  — необратим. С помощью аппарата теории обобщенных функций в банаховых пространствах задача Коши (1)–(2) для случая  $N = 1$  полностью исследована, например, в работах [1–3]. Однако для приложений к задачам теории вязкоупругости или теории многоконтурных электрических цепей более актуальными оказались случаи, когда  $N \geq 2$  и ядро интегрального оператора имеет специальный вид  $k_1(t) = g(t)A$  или  $k_2(t) = g(t)B$ , где  $g(t)$  — достаточно гладкая числовая функция при  $t \geq 0$ . С помощью теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах первый случай  $k_1(t) = g(t)A$  исследован при различных типах сингулярности операторного пучка  $(B - \lambda A)$  в серии работ [4, 5]. В этом докладе представлены результаты исследования второго случая  $k_2(t) = g(t)B$ , в предположениях фредгольмовости, нетеровости, спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка  $(B - \lambda A)$ . Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений описывающей двухконтурную электрическую цепь и одной задачи Коши — Дирихле математической теории вязкоупругости.

Работа поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № П696).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
2. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
3. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 68–79.
4. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. Вып. 7, № 4. С. 100–110.
5. Falaleev M. V. The theory of fundamental operator-functions of degenerative integro-differential operators in Banach spaces // Proc. Intern. Math. Conf. “50 years of IPPF”. 2011. ISBN 978-5-901158-15-9.

## ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛООБМЕНА В ПРОСТРАНСТВЕ

**Фаязова З. К.**

*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Вузгородок,  
Ташкент, 100144 Узбекистан; z\_fayazova@rambler.ru*

Рассматривается следующая задача. На части границы области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  находится нагреватель, имеющий регулируемую температуру. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы средняя температура в некоторой подобласти  $D$  области  $\Omega$  принимала заданное значение.

Пусть функция  $u(t, x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (t, x, y) \in \Omega = \{0 < t < T, -\pi < x, y < \pi\} \quad (1)$$

начальному и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, & -\pi \leq x, y \leq \pi, \\ u|_{x=\pi} &= 0, & 0 \leq t \leq T, \quad -\pi \leq y \leq \pi, \\ u|_{y=-\pi} &= 0, & 0 \leq t \leq T, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=\pi} &= 0, & 0 \leq t \leq T, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \\ u|_{x=-\pi} &= \mu(t)\Phi(y), & 0 \leq t \leq T, \quad -\pi \leq y \leq \pi, \\ \Phi(-\pi) &= \Phi(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Функция  $\Phi(y)$  предполагается заранее известной. Мы предполагаем, что управление  $\mu(t)$  удовлетворяет условию согласования  $\mu(0) = 0$ , а также выполняется ограничение  $|\mu(t)| \leq M$ .

**Задача.** Найти  $\mu(t)$  из условия

$$\int_{-\pi}^0 \int_{-\pi}^0 u(t, x, y) dx dy = \theta(t), \quad (3)$$

где  $\theta(t)$  — заданная функция.

В работах Ш. А. Алимова [1], S. Albiero, Sh. A. Alimov [2] рассмотрены задачи управления процессом теплообмена с точки зрения оптимальности времени. Задачам управления, описываемым уравнениями гиперболического типа посвящены работы В. А. Ильина [3] и В. А. Ильина, Е. И. Моисеева [4].

Рассматриваемая нами задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра первого рода, которая вообще говоря является некорректной задачей. Доказывается существования решения данного интегрального уравнения удовлетворяющее указанным выше условиям. Заметим, что данная задача легко обобщается и на  $n$  мерный случай.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Алимов Ш. А.** О задаче быстрогодействия в управлении процессом теплообмена // Узбекский мат. журн. 2005. № 4. С. 13–21.
2. **Albiero S., Alimov Sh. A.** On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process // Univ. Bonn. 2005. N 256.
3. **П’ин В. А.** Two-endpoint boundary control of vibrations described by a finite-energy generalized solution of the wave equation // Diff. equations. 2000. V. 36, N 11. P. 1659–1675.
4. **П’ин В. А., Моисеев Е. И.** Optimization of a boundary control of an elastic force at two ends of a string // Dokl. math. 2005. V. 71. P. 357.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Федоров В. Е., Борель Л. В.

*Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; kar@csu.ru, lidiya904@mail.ru*

Пусть  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$  — банаховы пространства,  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ . Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения соболевского типа

$$u(0) = u_0, \quad (1)$$

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)u(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где  $\mu(s)$  — функция ограниченной вариации на  $[0, T]$ . Решением задачи (1), (2) называется функция  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U})$ , удовлетворяющая уравнению (2) на отрезке  $[0, T]$  и начальному условию (1).

Для сильно  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$  [1], оператор-функции  $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$  и функции ограниченной вариации  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  определим при  $T > 0$

$$F(T) = V_0^T(\mu)K(T)\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \sum_{n=0}^{p+1} \max_{t, s \in [0, T]} \left( s \left\| \frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n}(t, s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} \right) + V_0^T(\mu) \max_{k=0,1,\dots,p} \|H^k M_0^{-1}(I - Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \sum_{n=0}^{p+1} \max_{t, s \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n}(t, s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})}.$$

Здесь  $K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\}$ ,  $K, a$  — константы из определения сильной  $(L, p)$ -радиальности.

**Теорема.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $u_0 \in \text{dom}M \cap \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ ,  $(\partial^n \mathcal{K} / \partial t^n)(0, s) \equiv 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, p$ ,  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации,  $F(T) < 1$ . Тогда существует единственное решение  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U})$  задачи (1), (2).

Обозначения для операторов  $Q$ ,  $L_1^{-1}$ ,  $M_0^{-1}$ ,  $H$  и подпространства  $\mathfrak{U}^1$  можно найти в [1].

Частным случаем задачи (1), (2) является начально-краевая задача

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3)$$

$$z(0, t) = z_{xx}(0, t) = z(\pi, t) = z_{xx}(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

для нагруженного псевдопараболического уравнения

$$-z_t(x, t) - z_{txx}(x, t) = z_{xx}(x, t) - 2z_{xxxx}(x, t) + ctz(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \quad (5)$$

**Следствие.** Пусть  $z_0 \in H^4(0, \pi)$  удовлетворяет условиям (4),  $\int_0^\pi z_0(x) \sin x dx = 0$ ,  $|c| < 9/[2(17 + 3\sqrt{2})]$ . Тогда существует единственное решение  $u \in C^1([0, 1]; H^2(0, \pi))$  задачи (3)–(5).

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-96007-р-урал.а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

## ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Федоров В. Е., Стахеева О. А.

*Челябинский государственный университет, ул. Братъев Кашириных, 129,  
Челябинск, 454001 Россия; kar@csu.ru, alda.87@mail.ru*

Рассмотрим задачу

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in (-\infty, 0], \quad (1)$$

для эволюционного уравнения с памятью

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Здесь заданная функция  $u_-: (-\infty, 0] \rightarrow \mathfrak{U}$  описывает “историю” системы,  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$  — банаховы пространства,  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$  (линейный непрерывный оператор),  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$  (линейный замкнутый плотно определенный оператор),  $\mathcal{K}: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ .

*Решением* задачи (1), (2) на интервале  $(-\infty, T)$  называется функция  $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T); \mathfrak{U})$ , удовлетворяющая уравнению (2) на  $[0, T]$  и условию (1).

Известно, что в случае сильно  $(L, p)$ -радиального оператора  $M$  [1, 2] имеет место представление пространств  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ,  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$ , действие операторов  $L: \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$ ,  $M: D(M) \cap \mathfrak{U}^k \rightarrow \mathfrak{V}^k$ ,  $k = 0, 1$ , и непрерывная обратимость оператора  $M_0 = M|_{D(M) \cap \mathfrak{U}^0}$ . Обозначим  $L_0 = L|_{\mathfrak{U}^0}$ ,  $H = M_0^{-1}L_0$ ,  $P$  — проектор на подпространство  $\mathfrak{U}^1$  вдоль  $\mathfrak{U}^0$ ,  $Q$  — проектор на  $\mathfrak{V}^1$  вдоль  $\mathfrak{V}^0$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $u_- \in C((-\infty, 0]; \mathfrak{U})$ ,  $u_-(0) \in \text{dom} M$ , оператор-функция  $\mathcal{K} \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ ,  $\mathcal{K}^{(n)} \in L_1(0, +\infty; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ ,  $\mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$  при  $n = 0, 1, \dots, p$ ,

$$(I - P)u_-(0) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (I - Q) \int_0^\infty \mathcal{K}^{(k)}(s) u_-(-s) ds.$$

Тогда при некотором  $T_0 > 0$  существует единственное решение  $u \in C^1((0, T_0); \mathfrak{U}) \cap C((-\infty, T_0); \mathfrak{U})$  задачи (1), (2).

Заметим, что ограничения на  $T_0$  определяются только операторами  $L, M$  и оператор-функцией  $\mathcal{K}$  и не зависят от  $u_-$ .

С помощью теоремы 1 исследована задача для уравнения с памятью

$$\begin{aligned} z(x, t) &= z_-(x, t), & (x, t) &\in \Omega \times (-\infty, 0], \\ z(x, t) &= \Delta z(x, t) = 0, & (x, t) &\in \partial\Omega \times [0, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)z_t(x, t) &= \Delta z(x, t) - \beta \Delta^2 z(x, t) + \int_0^\infty \int_\Omega k(x, \xi, s) z(\xi, t-s) d\xi ds, \\ &(x, t) \in \Omega \times [0, T), \end{aligned}$$

в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с гладкой границей, и некоторые другие задачи.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-96007-р-урал.а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров В. Е.** Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.
2. **Федоров В. Е.** Обобщение теоремы Хилле — Йосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Федоров Ф. М.

*Научно-исследовательский институт математики СВФУ,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000 Россия; foma\_46@mail.ru*

Получено частное решение неоднородной гауссовой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Доказано обобщение метода Гаусса для бесконечных систем. Эти результаты вместе с теоремой о необходимых и достаточных условиях существования нетривиального решения однородных гауссовых систем образуют основу общей теории бесконечных систем.



## О МОДУЛЕ ГЛАДКОСТИ, ПОРОЖДЕННОМ СМЕШАННОЙ ОБОБЩЕННОЙ КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТЬЮ

Феоктистова А. А.

*Липецкий государственный педагогический университет, ул. Ленина,  
42, Липецк, 398020 Россия; alek-feoktistova@yandex.ru*

Пусть  $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$ ,  $1 \leq n < N$ . Введем обозначения  $u = (x, y)$ ,  $x \in R_n^+$ ,  $y \in R_{N-n}$ . Переменную  $x$  размерности  $n$ , по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовой. Мультииндекс  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  состоит из положительных фиксированных чисел. Весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на  $R_N^+$  функций  $\varphi(u)$ , для которых конечна норма  $\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left( \int_{R_N^+} |\varphi(u)|^p x^\gamma du \right)^{1/p}$ ,  $1 \leq p < \infty$  будем обозначать  $L_p^\gamma(R_N^+)$ .

Через  $\mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma$  обозначим класс целых функций экспоненциального типа порядка  $\nu$ , которые как функции от действительного переменного  $u \in R_N^+$  принадлежат весовому классу Лебега  $L_p^\gamma$  (см. [1]).

Наилучшим приближением функции  $f \in L_p^\gamma(\Omega^+)$  в  $\mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma(\Omega^+)$  будем называть величину (ср. [1, 2])

$$E_\nu(f) = E_\nu(f)_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \inf_{g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu,p}^\gamma} \|f - g_\nu\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \inf_{g_\nu} \|f - g_\nu\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)},$$

где  $(\Omega^+) \subset \overline{R_N^+}$  — некоторая область точек  $u = (x, y)$ , возможно прилегающая к гиперплоскостям  $u_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Модуль гладкости  $\omega_\kappa(f, \delta)_{L_p^\gamma}$  порядка  $\kappa$  в весовых классах Лебега  $L_p^\gamma$  определим следующим образом

$$\omega_\kappa(f, \delta)_{L_p^\gamma} = \sup_{|u| \leq \delta} \|(\square_t^\kappa f)(u)\|_{L_p^\gamma},$$

где  $\square_h^\kappa f(u) = \sum_{k=0}^{\kappa} (-1)^k C_\kappa^k (T^{(\kappa/2-k)h} f)$  — центрированная обобщенная конечная разность, построенная на основе смешанного обобщенного сдвига в работе [1].

Пусть  $l = (l'; l'')$ , где  $l'$ ,  $l''$  — мультииндексы, состоящие из целых неотрицательных чисел размерности  $n$  и  $N - n$  соответственно и  $(BD)^l = (B_x^{l'} D_y^{l''})$ , где  $B_{u_i} = \partial^2 / \partial u_i^2 + (\gamma_i / u_i) \partial / \partial u_i$  — оператор Бесселя, действующий по одной переменной,  $D_{u_j} = \partial / \partial u_j$ . Выражение вида  $(BD)^l f(x, y) = (B_x^{l'} D_y^{l''}) f(x, y)$  будем называть смешанной В-производной от функции  $f(x, y)$ . Порядок этой производной равен  $2|l'| + |l''|$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  принадлежит пространству  $L_p^\gamma(R_N^+)$  вместе со всем смешанными В-производными. Тогда для любого положительного числа  $\nu$  выполняется неравенство

$$E_\nu(f)_{L_p^\gamma(\varepsilon)} \leq \frac{C(l, \gamma, \kappa)}{\nu^{2|l'| + |l''|}} \omega_\kappa\left((BD)^l f, \frac{1}{\nu}\right)_{L_p^\gamma},$$

где  $C(l, \gamma, \kappa)$  — некоторая положительная постоянная.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
2. Гоц Е. Г., Ляхов Л. Н. Обращение преобразования Радона — Киприянова посредством дробного дифференцирования Грюнвальда — Летникова — Рисса // ДАН. 2007. Т. 412, № 1. С. 11–14.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Филиппов А. И.<sup>1</sup>, Михайлов П. Н.<sup>1</sup>, Идрисов Р. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных исследований АН Республики Башкортостан,  
ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103 Россия;  
filippovai@rambler.ru, mihaylov\_pn@rambler.ru*

<sup>2</sup> *Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Бишовой,  
пр. Ленина, 49, Стерлитамак, Россия; idrisovrg@yandex.ru*

Использование асимптотических методов в задачах сопряжения для уравнений с частными производными является относительно недостаточно обоснованным. Отметим возникающие при этом проблемы, связанные с сингулярностью. Поэтому представляет известный интерес сопоставление построений асимптотических представлений, полученных различными методами на примере простых задач.

Рассмотрено применение так называемого “в среднем точного” асимптотического метода к задачам сопряжения для уравнения теплопроводности с цилиндрической геометрией. Показано, что этот метод приводит к тем же результатам, что и разложение точного решения в ряд Маклорена по асимптотическому параметру.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad r > 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = q(r), \quad r < 1, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} T|_{r=1} = T_1|_{r=1}, \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial r}|_{r=1}, \\ T|_{t=0} = T_1|_{t=0} = 0, \quad T_1|_{r \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Точное решение задачи (1)–(3) несложно получить в пространстве изображений Лапласа — Карсона.

Решение задачи (1)–(3) найдено также в виде асимптотических формул путем редукции задачи на задачи для коэффициентов разложения

$$T_j = T_j^{(0)} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i T_j^{(i)} + \theta_j, \quad (4)$$

где  $\theta_j$  —  $n$ -ый остаточный член,  $j =$  пробел или 1 — номер области,  $i$  — порядковый номер приближения,  $\varepsilon$  — формальный параметр асимптотического разложения,  $I_0$ ,  $K_0$  — модифицированные функции Бесселя 0-го порядка 1-го и 2-го рода, соответственно. Подставляя (4) последовательно в (1)–(3), получим постановки задач для нулевого  $T^{(0)}$ , первого  $T^{(1)}$  приближения решения  $T(r)$ , а также для остаточного члена  $\theta$ .

В работе доказано, что решения задач для нулевого  $T^{(0)}$ , первого  $T^{(1)}$  приближения в пространстве изображений совпадают, соответственно, с первым и вторым коэффициентом тейлоровского разложения точного решения (4) по параметру  $\varepsilon$ . Результат остается верным и для нестационарного источника  $q = q(r, t)$ , а также при  $\alpha = 0$ , что соответствует широко используемому в теплофизике квазистационарному случаю.

Рассмотренный пример является одним из немногих, допускающих разложение точного решения в ряд Маклорена.

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

Филиппов А. И.<sup>1</sup>, Михайлов П. Н.<sup>1</sup>, Идрисов Р. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладных исследований АН Республики Башкортостан,  
ул. Одеская, 68, Стерлитамак, 453103 Россия;  
filipovai@rambler.ru, mihaylov\_pn@rambler.ru

<sup>2</sup>Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Бишовой,  
пр. Ленина, 49, Стерлитамак, Россия; idrisovrg@yandex.ru

Одним из важнейших инструментов математики является метод асимптотического разложения. Например, его применение в обыкновенных дифференциальных уравнениях, в том числе нелинейных, привело к получению важнейших научных результатов. Однако, до настоящего времени недостаточно рассмотрены возможности его использования для задач сопряжения. Установлено, что при асимптотическом разложении задачи сопряжения основное значение имеет так называемый фундаментальный оператор. В докладе рассмотрен способ построения такого оператора и некоторые его свойства. В качестве примера выбрана задача о температурном поле в прямолинейной галерее и прилегающем массиве, когда профиль скорости конвективного переноса зависит от расстояния до оси галереи и градиент температуры вдоль галереи считается постоянным. Такие задачи имеют важные приложения в энергетике, нефтедобыче и составляют основу теплофизики. Параметризованная задача имеет вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, \quad x > 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$LT = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T \Big|_{t=0} = T_1 \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$T_1 \Big|_{x=1} = T \Big|_{x=1}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1}.$$

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотических формул

$$T_j = T_j^{(0)} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i T_j^{(i)} + \theta_j, \quad (4)$$

где  $\theta_j$  —  $n$ -ый остаточный член,  $j$  = пробел или 1 — номер области,  $i$  — порядковый номер приближения,  $\varepsilon$  — формальный параметр асимптотического разложения.

Подставляя (4) последовательно в (1)–(3), получим постановки задач для нулевого  $T^{(0)}$ , первого  $T^{(1)}$  приближения решения  $T(x)$ , а также для остаточного члена  $\theta$ .

**Определение.** Оператор  $\mathcal{L} : LT \rightarrow \int_0^1 Lf dx, x \in (0, 1)$  назовем фундаментальным оператором задачи сопряжения.

Для оператора  $\mathcal{L}$  справедливы свойства:

1.  $\mathcal{L}T^{(0)} = L\langle T \rangle = \langle q \rangle$ .
2.  $\mathcal{L}\langle T^{(1)} \rangle = 0$ .
3.  $\mathcal{L}\langle \theta \rangle = 0$ .

Введение оператора  $\mathcal{L}$  обусловлено построением “в среднем точных” решений, для которых решение усредненной задачи для остаточного члена обращается в нуль.

Явный вид оператора  $\mathcal{L}$  в общем случае зависит от геометрии задачи.

## О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ ДВУМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ КОШИ

Фроленков И. В., Белов Ю. Я.

*Институт математики СФУ, просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041 Россия;*  
igor@frolenkov.ru, belov@lan.krasu.ru

В пространстве  $E_1$  выберем  $r$  различных точек  $x = a_k$ ,  $k = \overline{1, r}$  и  $s$  различных точек  $z = \beta_m$ ,  $m = \overline{1, s}$ .

В  $G_{[0, T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1, z \in E_1\}$  исследуется задача Коши для нагруженного нелинейного параболического уравнения

$$u_t(t, x, z) = a_1(t, x, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t, x))u_{xx} + a_2(t, z, \bar{w}_0(t), \bar{w}_2(t, z))u_{zz} + b_1(t, x, z, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t, x), \bar{w}_2(t, z))u_x + b_2(t, x, z, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t, x), \bar{w}_2(t, z))u_z + f(t, x, z, u, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t, x), \bar{w}_2(t, z)), \quad u(0, x, z) = u_0(x, z). \quad (1)$$

Через  $\bar{w}_0(t) = (u(t, \alpha_k, \beta_m), \partial^{j_1+j_2}u(t, \alpha_k, \beta_m)/\partial x^{j_1} \partial z^{j_2})$ ,  $k = \overline{1, r}$ ,  $m = \overline{1, s}$ ,  $j_1 = 0, 1, \dots, p$ ,  $j_2 = 0, 1, \dots, q$ , обозначена вектор функция, компоненты которой являются следами, зависящими только от переменной  $t$ , функции  $u(t, x, z)$  и всех ее производных по пространственным переменным  $x$  до порядка  $p$  и по  $z$  до порядка  $q$  включительно.  $\bar{w}_1(t, x) = (u(t, x, \beta_m), \partial^j u(t, x, \beta_m)/\partial z^j)$ ,  $m = \overline{1, s}$ ,  $j = 0, 1, \dots, q$  — состоит из следов, зависящих только от переменных  $t, x$ , функции  $u(t, x, z)$  и ее производных по переменной  $z$  до порядка  $q$  включительно.  $\bar{w}_2(t, z) = (u(t, \alpha_k, z), \partial^j u(t, \alpha_k, z)/\partial x^j)$ ,  $k = \overline{1, r}$ ,  $j = 0, 1, \dots, p$  — состоит из следов, зависящих только от переменных  $t, z$ , функции  $u(t, x, z)$  и ее производных по переменной  $x$  до порядка  $p$  включительно.

Получен ряд достаточных условий существования решения в классе  $C_{t,x,z}^{1,p,q}(G_{[0,t^*]}) = \{u(t, x, z) \mid u, \partial u/\partial t, \partial^{j_1+j_2}u/\partial x^{j_1} \partial z^{j_2} \in C(G_{[0,t^*]}), j_1 = 0, 1, \dots, p, j_2 = 0, 1, \dots, q\}$ , ограниченного при  $(t, x, z) \in G_{[0,t^*]}$  вместе со всеми производными, входящими в уравнение задачи (1). Здесь  $0 < t^* \leq T$  — константа, зависящая от входных данных.

Уравнения вида (1) представляют особый интерес, поскольку большое количество коэффициентных обратных задач, после сведения их к прямым, приводятся к уравнениям такого вида.

Доказательство проводится с использованием методов расщепления на дифференциальном уровне.

Стоит отметить, что ранее в работе [1] был рассмотрен алгоритм расщепления, получены оценки на решение расщепленной задачи и доказана сходимост для многомерного параболического уравнения специального вида

$$u_t(t, x) = \sum_{i=1}^n (a_i(t, x_i)u_{x_i x_i} + b_i(t, x)u_{x_i}) + cu + f(t, x), \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in E_n.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Belov Yu. Ya.** On estimates of solutions of the split problems for some multi-dimensional partial differential equations // J. Sib. Fed. University. Math. Phys. 2009. V. 2, N 3. P. 258–270.

## К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Халилов Ш. Б.

*Институт математики АН Республики Таджикистан, ул. Айни, 299/4,  
Душанбе, 743065 Таджикистан; shavkat58@mail.ru*

Пусть  $D$  ограниченная область евклидова пространства  $R^n$  с достаточно гладкой границей  $S$ . Рассматривается в этой области система дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

$$-\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n L_{kj}(u_k) = f_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$L_{kj}(u_k) = \sum_{l=1}^n a_{kj}^{(l)}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + b_{kj}(x) u_k, \quad k, j = \overline{1, n}$$

— дифференциальные операторы первого порядка,  $a_{kj}^{(l)}$ ,  $b_{kj}$ ,  $f_j$  — достаточно гладкие функции заданные на замкнутой области  $\bar{D} = D \cup S$ .

Система (1) при  $\lambda \neq 1$  является эллиптической по Петровскому, но при  $\lambda < 1$  является сильно эллиптической, а при  $\lambda > 1$  не является таковой. При  $\lambda = 2$  главной части этой системы совпадает с многомерным аналогом системы А. В. Бицадзе [1].

**Задача.** Найти регулярное в области  $D$  решение  $u_1, u_2, \dots, u_n$  системы (1) удовлетворяющее на границы  $S$  области  $D$  краевые условия

$$u_j|_S = g_j(x), \quad j = \overline{1, k}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial n}|_S = h_j(x), \quad j = \overline{k+1, n},$$

где  $g_j$  и  $h_j$  известные функции класса  $C^{1,\alpha}(S)$ ,  $C^{0,\alpha}(S)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , соответственно.

Методом классической теории потенциала находится условия фредгольмовости поставленной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Янушаускас А. И. Методы потенциала в теории эллиптических уравнений. Вильнюс: Моклас, 1990.

## АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Ханхасаев В. Н.**

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,  
Улан-Удэ, Россия; hanhvladnick@mail.ru*

В работах автора, посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье. Продолжая это исследование, модифицируем математическую модель, заменяя гиперболическое уравнение теплопроводности гипероло-параболическим уравнением в частных производных 2-го порядка

$$Lu = k(x, t)u_{tt} + a(x, t)u_t - \sum_{i=1}^2 u_{x_i x_i} + c(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

в цилиндрической области  $G = \Omega \times [T_1, T_2]$ ,  $\Omega = [0, m] \times [0, n]$ ,  $T_1 < 0$ ,  $T_2 > 0$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ ;  $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$ ,  $\gamma = \partial\Omega$ . При этом  $k(x, t) = 0$ ,  $t \leq 0$ ;  $k(x, t) > 0$ ,  $t > 0$ ;  $a(x, t) > 0$ ,  $\forall (x, t) \in G$ , т. е. при  $t \leq 0$  уравнение (1) параболическое, а при  $t > 0$  гиперболическое.

**Краевая задача.** Найти решение уравнения (1) в области  $G$  такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{t=T_1} = 0. \quad (2)$$

Для двумерной пространственной задачи как явная, так и неявная обычные разностные схемы приводят к одинаковому объему вычислений, пропорциональному  $N^4$  операций. Вычисление решения приведенной разностной схемы осуществляется в два этапа. На первом - вычисление значений  $u_{ij}$  на полуцелом слое  $t_{k+1/2}$  ведется прогонкой в направлении оси  $0x_1$ . Второй этап — прогонка на слое  $t_k$  по оси  $0x_2$ . Эту схему называют продольно-поперечной или схемой переменных направлений.

Всего на одном слое осуществляется  $2N$  прогонок, т. е. число арифметических операций на одном слое пропорционально  $N^2$ . В используемой неявной схеме можем положить  $\tau = h$  и тогда для расчета до момента  $T$  по времени надо сделать  $N$  шагов. Таким образом, трудоемкость решения всей задачи оценивается числом, имеющим порядок  $N^3$ , что более чем на порядок лучше по сравнению с вышеописанными схемами. При некоторых условиях на коэффициенты уравнения доказана следующая теорема.

**Теорема.** Разностное решение краевой задачи (1), (2) устойчиво и интерполляции  $u_h^T(x, t)$  решений этой разностной задачи сходятся слабо в  $W_2^1(G)$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$  к решению  $u(x, t)$  краевой задачи (1), (2) из пространства  $W_2^2(G)$ .

Работа выполняется в рамках проекта “Государственное задание высшим учебным заведениям (2012–2014 гг.) для проведения НИР” (проект № 1.926.2011).

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Хашимов А. Р.

*Ташкентский финансовый институт; abdukomil@yandex.ru*

В данной статье изучается характер стремления к нулю обобщенных решений уравнения третьего порядка составного типа в окрестности нерегулярных точек границы в зависимости от геометрических характеристик области.

В области  $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$  рассмотрим уравнение

$$l_0 Au = f(x), \quad (1)$$

где  $l_0 u = \alpha^k u_{x_k}$ ,  $Au = a^{ij} u_{x_i x_j} + a^i u_{x_i} + au$  — равномерно эллиптический оператор,  $\alpha_k, a^{ij}, a^i, a$  — постоянные.

**Задача.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_1} = 0, \quad \alpha^k u_{x_k}|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k \nu_{x_k} > 0\}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\nu = (\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_n})$  — вектор внутренней нормали к границе  $\Gamma$ .

Введем следующие обозначения и класс функции:  $\Omega_\tau = \Omega \cap \{x : 0 < x_1 < \tau\}$ ,  $H(\Omega_\tau) = \{u : l_0 u \in W_2^1(\Omega_\tau), l_0 u|_{\Gamma_\tau} = 0, u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0\}$ .

Отметим, что если  $\Gamma_\tau = \partial\Omega_\tau$  кусочно-гладкая, то в работе А. И. Кожанова была построена обобщенные решения уравнения (1) в классе  $H(\Omega_\tau)$  (см. [1]).

**Определение.** Функцию  $u(x)$  будем называть обобщенным решением уравнения (1) в ограниченной области  $\Omega_\tau$ , с граничными условиями  $l_0 u|_{\Gamma_\tau} = 0$  и  $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ , если  $u(x) \in H(\Omega_\tau)$  и удовлетворяет тождеству

$$p(l_0 u, v) \equiv \int_{\Omega_\tau} [-a^{ij} (l_0 u)_{x_i} v_{x_j} + a^i (l_0 u)_{x_i} v + a(l_0 u)v] dx = \int_{\Omega_\tau} f v dx \quad (3)$$

для произвольной функции  $v \in W_2^1(\Omega_\tau)$ ,  $v|_{\partial\Omega_\tau} = 0$ .

**Теорема.** Пусть  $a \leq 0$ , область  $\Omega$  ограничена и лежит в полуплоскости  $\{x : x_1 > 0\}$ , множество  $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$  при любом  $\tau \in (0, \tau^0)$  не пусто,  $f(x) \equiv 0$  в  $\Omega_{\tau^0} = \Omega \cap \{x_1 < \tau^0\}$ . Тогда для обобщенного решения  $u(x)$  уравнения (1) в области  $\Omega_{\tau^0}$  с граничными условиями  $l_0 u|_{\partial\Omega_{\tau^0} \cap \partial\Omega} = 0$  и  $u|_{\sigma_{1,\tau^0}} = 0$  справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau^0}} (l_0 u)^2 \Lambda(x_1) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) dx, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .

Здесь  $\Phi(x_1, \tau^0)$  является решением следующей задачи

$$\Phi' = -(1 - \varepsilon)\mu(x_1)\Phi, \quad 0 < x < \tau^0, \quad \Phi(\tau^0, \tau^0, \varepsilon) = 1; \quad (5)$$

$\Lambda(\tau), \mu(\tau)$  — непрерывные функции.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кожанов А. И.** Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990.

## УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ И СТРУКТУРОЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Хлуднев А. М.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090 Россия  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия; khlyud@hydro.nsc.ru*

Одной из практически важных задач создания упругих конструкций с заданными свойствами является выбор оптимальных форм и структурных параметров. Как правило, наличие трещин и включений в упругом теле существенно усложняет постановку и методы анализа подобных задач. В докладе обсуждаются результаты, относящиеся к оптимальному выбору формы и структурных параметров включений в упругом теле при наличии трещин для задач с неизвестными границами.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 10-01-00054) и ФЦП Кадры (грант П597).



## ОБ ОДНОМ НАГРУЖЕННОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Холиков Д. К.

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,  
ВУЗ городок, Ташкент, 100174 Узбекистан; xoliqov23@mail.ru*

Рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Lu = f(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx, \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_{xt} + c(x, t)u_x + d(x, t)u_t + e(x, t)u;$$

$a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $e(x, t)$ ,  $f(x, t)$  — заданные функции;  $\alpha$ ,  $\beta$  — заданные постоянные, причем  $0 \leq \alpha < \beta \leq l$ .

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах, в теории влагопереноса в почве, в теории теплопроводности в различных средах и в многих других.

В данной работе рассматривается вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с условиями типа Стеклова для уравнения (1) в следующей постановке: *требуется найти в области  $D = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$  решение уравнения (1) из класса  $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ , удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

*и граничным условиям*

$$u_x(0, t) = \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u_x(l, t) = \beta_1 u(0, t) + \beta_2 u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $\varphi(x)$  — заданная функция;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) — заданные постоянные, причем  $\beta_i \neq 0$ .

Отметим, что нелокальные условия (3), (4) относятся к типу нелокальных условий Стеклова первого класса [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М: Высшая школа, 1995.

## ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ С НЕКОТОРЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Хриптун М. Д.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Копюга, 4,  
Новосибирск, 630090 Россия; Khriptun@math.nsc.ru*

Известно, что производящие функции для различных классических специальных функций и полиномов широко применяются для решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных и играют важную роль в решении многих других задач (включая, например, теорию массового обслуживания и стохастических процессов) см. [1,2].

В классической теории специальных функций существует много различных методов для получения известных производящих функций для последовательностей полиномов и специальных функций.

В этом докладе мы рассмотрим различные производящие функции для последовательностей одного ОФБ вида:

$$U_{\nu_m}^m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu_m+mk}}{k! \Gamma[(m-1)k + \nu_m + 1]} \quad (z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]; \nu_m \in \mathbf{C}),$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера;  $\mathbf{C}$  — пространство комплексных чисел (функция  $U_{\nu_m}^m(z)$  при  $m = 2$  есть модифицированная функция Бесселя  $I_{\nu}(z) = U_{\nu_2}^2(z)$ , где  $\nu_2 = \nu$ ) [3. С. 287, формула (3)]. Эти функции при целом индексе  $\nu_m$  применяются при решении одноканального уравнения теории массового обслуживания. Более наглядно, мы рассмотрим задачу: имея последовательность  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  функций с производящей функцией  $G(x, t)$ , т. е.  $G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$ , найдем другую производящую функцию типа  $G_{\gamma}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n U_n(x)t^n$ , где  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  есть последовательность действительных чисел, не зависящих от  $x$  и  $t$ , и которую можно представить в виде

$$\gamma_n = \int_0^{\infty} t^n d\mu(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\mu$  — неотрицательная мера на  $[0, \infty)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Srivastava H. M., Manocha H.** A treatise on generating functions. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
2. **Srivastava H. M., Kashyap B. R. K.** Special functions in queueing theory and related stochastic processes. New York: Academic Press, 1982.
3. **Хриптун М. Д.** Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя  $m$ -го порядка // Дифф. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Хуштова Ф. Г.

*Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,  
ул. Шортанова, 89-А, Нальчик, 360000 Россия; khushtova@ya.ru*

В области  $\Omega = \{(x, t): |x| < \infty, 0 < t < T\}$  рассмотрим уравнение

$$|x|^\alpha u_{xx} - Lu = 0, \quad Lu \equiv \begin{cases} D_{0t}^\beta u, & 0 \leq x < \infty, \\ D_{Tt}^\beta u, & -\infty < x \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_{at}^\beta$  — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля порядка  $\beta$  с началом в точке  $a$  [1, с. 9],  $0 < \beta \leq 1$ .

В работе [2] для уравнения (1) при  $\alpha < 1$ ,  $\beta = 1$  доказывается существование и единственность решения краевой задачи в полуплоскости  $t > 0$  с начальным условием  $u(x, 0) = h(x)$ ,  $0 < x < \infty$ . Такая же краевая задача для уравнения (1) при  $\alpha = \beta = 1$  исследовалась в работе [3], а в работе [4] — в области  $\Omega$  с условиями  $u(x, 0) = f_1(x)$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $u(x, T) = f_2(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ .

Пусть  $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$ ,  $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$ .

Регулярным решением уравнения (1) в области  $\Omega$  назовем функцию  $u = u(x, y)$  из класса  $u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $D_{0t}^\beta u$ ,  $D_{Tt}^\beta u$ ,  $u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ , удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках  $(x, t)$  области  $\Omega$  и для которой справедливо соотношение  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u_x(\varepsilon, t) - u_x(-\varepsilon, t)] = 0$ ,  $0 < t < T$ .

Для уравнения (1) рассматривается следующая

**Задача.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\beta-1} u(x, \tau) = \psi_1(x), \quad 0 < x < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T} D_{Tt}^{\beta-1} u(x, \tau) = \psi_2(x), \quad -\infty < x < 0,$$

где  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  — заданные функции.

Вопрос существования решения поставленной задачи при  $0 \leq \alpha < 1$  эквивалентным образом редуцируется к вопросу существования решения сингулярного интегрального уравнения

$$[1 - \cos \gamma \pi] \varphi(t) + \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \int_0^T \frac{\varphi(\eta)}{\eta - t} d\eta = f(t),$$

где  $\gamma = \beta/(2 - \alpha)$ ,  $\varphi(t) = t^{1-\gamma} du(0, t)/dt$ ,  $f(t)$  — известная функция, удовлетворяющая условию Гельдера.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Pagani C. D. On the parabolic equation and a related one. Ann. mat. pura ed appl. 1974. T. 99, N 4. P. 333–339.
3. Arena O. On a degenerate elliptic-parabolic equation // Comm. in partial differential equations. 1978. V. 3, N 11. P. 1007–1040.
4. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Цыбиков Б. Н.

*Югорский государственный университет,  
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012 Россия; b\_tsibikov@ugrasu.ru*

Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов уравнения в параболических уравнениях и системах. Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$  класса  $C^{2m}$  и  $Q = (0, T) \times G$ . Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = \sum_{i=1}^r b_i(t, x)q_i(t, x') + f, \quad (t, x) \in Q, \quad x = (x', x''), \quad (1)$$

где  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ ;  $A$  — матричный эллиптический оператор порядка  $2m$  с матричными коэффициентами размерности  $h \times h$ , представимый в виде

$$A(t, x, D) = \sum_{i=r+1}^{ls} q_i(t, x')A_i(t, x, D_x) + A_{ls+1}(t, x, D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{i\alpha}(t, x)D^\alpha \quad (i = r+1, \dots, ls+1), \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x)D^\beta u|_S = g_j(t, x), \quad (2)$$

где  $m_j < 2m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  и  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Неизвестными в (1), (2) являются решение  $u = (u', u'')$ , где  $u' = (u_1, u_2, \dots, u_l)$ ,  $u'' = (u_{l+1}, u_{l+2}, \dots, u_h)$ , функции  $q_i(t, x')$  ( $i = 1, 2, \dots, sl$ ,  $sl \geq r$ ), входящие как в правую часть (1) так и в оператор  $A$  как коэффициенты. Условия переопределения для нахождения этих функций  $q_i$  имеют вид

$$u'|_{S_i} = \psi_i(t, x') \quad (S_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

где  $\{\Gamma_i\}$  — множество гладких  $k$ -мерных поверхностей, лежащих в  $G$ .

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Для уравнений второго порядка большое количество обратных коэффициентных задач с условиями переопределения вида (3) было рассмотрено в случае  $k = n - 1$  в работах Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова и ряда других авторов (см. [1]). В случае  $k = 0$  (в этом случае неизвестные функции зависят только от  $t$ ) как линейные так и нелинейные задачи рассматривались М. Иванчиковым [2]. В данной работе, для произвольных граничных операторов и произвольной системы вида (1) при выполнении только лишь условия параболичности мы рассматриваем вопрос о локальной разрешимости в случае задачи об определении коэффициентов и о глобальной разрешимости в случае задачи об определении правой части.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант 12-01-00260а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Belov Yu. Ya.** Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. **Ivanchov M.** Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003.

## ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Шадрина А. И.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677016 Россия; shadrina.ai@mail.ru*

Пространственно нелокальные краевые задачи для параболических уравнений, а также для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [1, 2].

В работах [3, 4] явно представлены условия  $[p]$ -разрешимости для краевых задач для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени, когда  $n$  — произвольное натуральное число. Для доказательства  $[p]$ -разрешимости при  $n = 2$  и  $n = 3$  были рассмотрены общие диагональные условия склеивания, более того, были найдены зависимости показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания, а при  $n \geq 4$  были рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая  $(2n - 1)$ -ю производную.

В работе рассматриваются пространственно нелокальные краевые задачи для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для таких задач гладкость начальных и граничных данных не обеспечивают принадлежность решения гильбертовским пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи, указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам  $H_{x,t}^{p,p/2n}$  при  $p \geq 2n$ . Применение единого подхода при общих условиях склеивания (сопряжения) для таких уравнений дает показать, что нецелый показатель  $p - [p]$  гильбертовского пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кожанов А. И.** О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 3. С. 165–174.
2. **Туласынов М. С.** Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени с нелокальными граничными условиями Самарского // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. С. 279–292.
3. **Попов С. В.** О гладкости решений параболических уравнений сменяющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
4. **Попов С. В., Потапова С. В.** Гильбертовские классы решений  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 594–596.

## О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТИЗИРОВАННОГО ОТКЛОНЕНИЯ ВЫБРОСА

Ширяева Л. К.

*Самарский государственный экономический университет,  
ул. Советской Армии, 141, Самара, 443090 Россия; shiryeva\_lk@mail.ru*

Пусть наблюдения  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{out}$  являются независимыми случайными величинами, причем  $X_1, \dots, X_{n-1}$  имеют нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ , а выброс  $X_{out}$  имеет нормальное распределение  $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$ , где  $\lambda \geq 0$  и  $\nu > 0$ . Обозначим через  $\tilde{T}_n$  студентизированное отклонение выброса  $X_{out}$  от среднего по выборке:

$$\tilde{T}_n = (X_{out} - \bar{X})/S,$$

где  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ;  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ;  $X_n = X_{out}$ .

В работе [1] был найден закон распределения случайной величины  $\tilde{T}_n$ . В настоящей работе получено новое представление для плотности распределения вероятностей случайной величины  $\tilde{T}_n$  через специальную функцию Эрмита. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Плотность распределения вероятностей случайной величины  $\tilde{T}_n$  для  $n \geq 3$  имеет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} B_n \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{3/2}} \cdot f_{V_n(t)}(0), & |t| < (n-1)/\sqrt{n}, \\ 0, & |t| \geq (n-1)/\sqrt{n}, \end{cases}$$

где  $f_{V_n(t)}(v)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$ ; случайные величины  $W$  и  $Z$  являются независимыми;  $W$  имеет  $\chi^2(n-1)$  распределение;  $Z$  имеет нормальное  $N(\mu, 1)$  распределение;

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{n-1}{1 + \nu(n-1)}}; \quad \beta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\eta}} \frac{t}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}}, \quad |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}};$$

$$B_n = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)}; \quad \eta = \frac{1 + \nu(n-1)}{n}.$$

**Теорема 2.** Для  $\forall t \in (-(n-1)/\sqrt{n}; (n-1)/\sqrt{n})$  плотность вероятностей случайной величины  $V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$  в точке  $v = 0$  может быть вычислена следующим образом:

$$f_{V_n(t)}(0) = A_n [(n-1)^2 - nt^2]^{(n-1)/2} H_{-n+1}(-t\mu/\sqrt{2q}),$$

где

$$A_n = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\mu^2/2} \left(\frac{\eta}{nq}\right)^{(n-1)/2}; \quad q = \eta \frac{(n-1)^2}{n} + (1-\eta)t^2;$$

функция Эрмита с отрицательным целым значком [2]

$$H_k(z) = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty e^{-\xi^2 - 2z\xi} \xi^{-k-1} d\xi, \quad k < 0.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяева Л. К. Вычисление мер мощности критерия Граббса проверки на один выброс // Сиб. журн. индустр. мат. 2010. Т. 13, № 4. С. 141–154.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963.

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шубин В. В.

*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090 Россия; vlad.v.shubin@gmail.com*

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей и  $Y > 0$ . Рассмотрим в цилиндре  $Q = \Omega \times (-Y, Y)$  уравнения

$$\operatorname{sign} y u_{yyy} - Au + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

$$\operatorname{sign} y u_{yyy} + Au + c(x, y)u = f(x, y). \quad (2)$$

Для уравнения (1) рассмотрены краевые задачи с заданием краевых условий на боковой поверхности цилиндра  $Q$  и на основаниях, а также условий сопряжения на сечении  $\Omega \times \{0\}$  вида

$$u(x, +0) = \alpha u(x, -0), \quad \beta u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) \quad (3)$$

и для другой задачи условия вида

$$u(x, +0) = \alpha u(x, -0), \quad \beta u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \quad (4)$$

Для задачи с условием (3) доказана теорема существования и единственности решения из пространства

$$\{u \in L_2(Q) \mid u|_{Q \cap \{y > 0\}} \in W_2^{2,3}(Q \cap \{y > 0\}), u|_{Q \cap \{y < 0\}} \in W_2^{2,3}(Q \cap \{y < 0\})\}.$$

Для задачи с условием (4) доказана теорема существования и единственности решения из весового пространства с весом  $|y|$ .

Для уравнения (2) рассмотрена задача с четырьмя условиями сопряжения и доказана теорема существования и единственности решения.

Также рассмотрено уравнение

$$u_x + \operatorname{sign} y u_{yyy} + c(x, y)u = f(x, y) \quad (5)$$

в прямоугольнике  $Q_1 = (0, X) \times (-Y, Y)$ . Для этого уравнения рассмотрены задачи с различным числом условий сопряжения и доказаны теоремы существования и единственности решений этих задач.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

**ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ  
С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ  
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

**Якушев И. А.**

*Мирнинский политехнический институт (филиал) Северо-Восточного  
федерального университета, ул. Тихонова, 5/1, Мирный, 678170 Россия;  
yakushevilya@mail.ru*

Пусть  $R_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Обозначим  $R_n^+ = \{x: x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0\}$ . Функция  $\varphi(t) \in C^\infty(R_1^+)$  такая, что  $0 \leq \varphi(t) \leq 1$  для любого  $t \in [1/2; 1]$  и  $\varphi(t) \equiv 0$ , когда  $t \geq 1$ ;  $\varphi(t) = 1$  для любого  $t \in [0; 1/2]$ . Для любых двух вещественных чисел  $\alpha, \beta$  определим функцию  $\sigma_{\alpha, \beta}(t) = \varphi(t)t^{-\alpha} + (1 - \varphi(t))t^\beta$  ( $t > 0$ ),  $p \in (1; +\infty)$ ,  $r$  — некоторое целое неотрицательное число. Обозначим через  $W_{p; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$  пространство функций  $u(x)$  ( $x \in R_n^+$ ) с конечной нормой

$$\|u; W_{p; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)\| = \{\|u; L_{p; \alpha, \beta}^r(R_n^+)\|^p + \|u; L_{p; \alpha, \gamma}^0(R_n^+)\|^p\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L_{p; \alpha, \beta}^r(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha, \beta}(x_n) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Обозначим через  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  множество бесконечно дифференцируемых функций в  $R_n^+$  финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях  $x_n$ . Если  $D$  — некоторое весовое пространство функций, заданных в  $R_n^+$ , то через  $\mathring{D}$  обозначим пополнение класса  $C_0^\infty(R_n^+)$  в метрике пространства  $D$ , через  $\tilde{D}$  — пополнение класса  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  в метрике пространства  $D$ , а символом  $D'$  обозначим пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на  $D$ , наделенное нормой сопряженного пространства.

В данной работе исследована разрешимость следующей задачи Дирихле

**Задача D.** Для заданного функционала  $F \in (\mathring{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+))'$  и заданного элемента  $\Psi(x) \in \tilde{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$  требуется найти решение  $U(x) \in \tilde{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$  уравнения

$$\sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha, \beta}^2(x_n) a_{kl}(x) U^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx = \langle F, v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(R_n^+),$$

удовлетворяющее условию  $U(x) - \Psi(x) \in \mathring{W}_{2; \alpha, \beta, \gamma}^r(R_n^+)$ .

Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве  $R_n^+$  ранее исследовалась в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Киприянов И. А.** Об одной вариационной задаче в полупространстве // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1967. Т. 91. С. 19–26.
2. **Исхоков С. А.** Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве // Докл. АН. 1995. Т. 345, № 2. С. 164–167.



# Дополнительные доклады

---

## ON THE WAVE EQUATIONS WITH $p(X, T)$ -LAPLACIAN AND WITH VISCOUS DAMPING: EXISTENCE AND BLOW-UP

S. Antontsev

*CMAF, University of Lisbon, Av. Prof. Gama Pinto, 2, 1649-003 Lisbon, Portugal;*  
anton@ptmat.fc.ul.pt, antontsevsn@mail.ru

We study the Dirichlet problem

$$u_{tt} = \operatorname{div} (a(x, t)|\nabla u|^{p(x, t)-2}\nabla u + \varepsilon\nabla u_t) + b(x, t)|u|^{\sigma(x, t)-2}u,$$

$$(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T), \quad \Omega \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T).$$

Under suitable condition on the data, we prove local and global existence theorems and study the finite time blow-up of the energy solutions. Also we consider Young measure solutions of this problem with  $\varepsilon = 0$ . The analysis relies on the methods developed in [1–5].

### REFERENCES

1. **Antontsev S. N., Díaz J. I., Shmarev S. I.** Energy methods for free boundary problems: Applications to non-linear PDEs and fluid mechanics. Birkhäuser, Boston, 2002.
2. **Antontsev S. N.** Wave equation with  $p(x, t)$ -Laplacian and damping term: Blow-up of solutions // *C. R. Mecanique*. 2011. V. 339, N 12. P. 751–755.
3. **Antontsev S. N.** Wave equation with  $p(x, t)$ -Laplacian and damping term: Existence and blow-up // *Differ. Equ. Appl.* 2011. V. 3. P. 503–525.
4. **Antontsev S. N., Shmarev S.** Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions // *J. Comput. Appl. Math.* 2010. V. 234. P. 2633–2645.
5. **Antontsev S. N., Shmarev S.** Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity // *Publicacions. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*. 2009. P. 355–399.

## EMISSION TOMOGRAPHY OF FLAMES

N. Denisova, P. Tretyakov, A. Tupikin

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Institutskaja 4/1, 630090, Novosibirsk, Russia;  
denisova@itam.nsc.ru*

Computed tomography is receiving increasing attention as a powerful method for the reconstruction of the local characteristics in flames. Chemiluminescent radical radiation occurs in a narrow region close to the flame reaction zone and gives information on the reaction zone topology within a flame. A chemiluminescence sensing technology based on the ratios of the local chemiluminescence intensity of one species to another (CH/C<sub>2</sub>/OH) is becoming a standard approach in industrial applications. However, the optical spectral technique provides line-of-sight integral data. Tomographic methods should be applied to recover the local parameters from the optically collected data. The tomographic reconstruction procedure is complicated by the ill-posed nature of the reconstruction problem. The main difficulty in solutions of ill-posed problems is the instability with respect to the noise in the measured data. Ill-posedness can amplify small perturbations in the measured data into large errors in the recovered source function. The second difficulty is incomplete data. The number of views in real flame measurements is usually small because of problems with limited access and the cost and complexity of the diagnostic system. The third difficulty is that the source function describing the spatial distributions of flame parameters has narrow high-gradient peaks.

The reconstruction method based on the entropy concept (MENT) is applied for reconstruction of local flame parameters. MENT is known as the best algorithm in the case when the number of views is strongly limited, but this algorithm assumes that the data are noiseless. MENT algorithm with correctly performed data preprocessing procedure is a regularized approach to the reconstruction problem. Based on our previous experience with the MENT [1–3], we concluded that this algorithm is excellent in combination with data preprocessing.

Flame tomographic reconstruction has a specific problem which did not discussed in the previous tomographic researches of flames. The problem is that the source function describing the spatial distributions of flame parameters has narrow high-gradient peaks. To solve this problem the approach based on a local regularization was developed. The reconstruction technology includes numerical simulations performed as close as possible to the real experimental situation. The method is applied for the reconstructions of emitting radical OH, CH and C<sub>2</sub> spatial profiles in Bunsen flame.

The work has been performed under RFBR grant 11-01-00158-a.

## REFERENCES

1. **Denisova N. V.** Maximum-entropy-based tomography for gas and plasma diagnostics // J. Phys. D. Appl. Phys. 1998. V. 31. P. 1888–1895.
2. **Denisova N.** Plasma diagnostics using computed tomography method // IEEE Trans. Plasma Sci. 2009. V. 37, N 4. P. 502.
3. **Denisova N. V., Tupikin A. V.** Study of burning processes by using emission tomography method // ICMAR XV Abstracts. Novosibirsk, 1–5 November, 2010, Russia. Pt 1. P. 75–76.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ

М. М. Немирович-Данченко

*Россия, Томск*

В работе развит метод расчета сейсмических полей в трещиноватых средах. Трещина в предлагаемой модели — это бесконечно тонкий надрез, на берегах которого ставятся специальные граничные условия. Условия таковы, что волны сжатия проходят через трещину как в сплошной среде; для волн растяжения берега трещины свободны от напряжений.

Трещин может быть любое конечное число (в том числе одна или две). При прохождении упругих волн в среде с трещинами последние могут раскрываться и служить источниками излучения. Таким образом, метод позволяет, с одной стороны, адекватно моделировать волновые поля в трещиноватых средах, и, с другой стороны, описывать трещинообразование в горной породе и излучение при этом упругих волн.

В работе рассматриваются трещины, существующие (заданные, или наведенные) либо возникающие и движущиеся в твердом теле. Имеется три вида независимых относительных перемещений берегов трещины, то есть три типа трещин. В то время как первые два типа (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) могут достаточно объективно рассматриваться с использованием двух пространственных переменных, случай продольного сдвига является трехмерным. Результаты работы ограничиваются двумерными случаями.

Деформирование геосреды предполагается конечным. Рассмотрены две модели поведения среды - идеально-упругое и упругопластическое. Изучались особенности амплитудных спектров отдельных трасс рассчитанных полей.

Данные численного моделирования сравниваются с результатами обработки реальных сейсмических разрезов фильтрами Прони и Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН, интеграционный проект N 127.

## ТЕОРЕМА ТАКЕНСА И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОЛОГО-ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА

В. В. Филатов, О. Ю. Светозерский

*Сибирский научно-исследовательский институт геологии геофизики и  
минерального сырья, 630091, Новосибирск, Красный пр., 67*

Решение задачи прогноза зон перспективных на поиски различных полезных ископаемых является одной из актуальных проблем современной геофизики. Один из возможных путей получения прогнозных оценок базируется на получении дополнительной информации об объекте поиска на основе анализа реконструированных аттракторов динамических систем, в результате гипотетического воздействия которых образовались прогнозируемые геологические объекты.

Современная техника моделирования нелинейных систем основана на решении обратной задачи [1, 2], в которой наблюдаемые скалярные временные ряды рассматриваются как нелинейные проекции фазовой траектории неизвестной диссипативной динамической системы на произвольную координату. Тогда, при некоторых условиях, наложенных на систему, проекция позволяет восстановить копию аттрактора в пространстве  $\mathbb{R}^m$  подходящей размерности.

Метод реконструкции аттрактора из скалярных временных рядов был предложен как эвристический в [1] и стал строгим, благодаря теореме Такенса [2]. Эта теорема утверждает, что любое гладкое многообразие  $X$  с размерностью  $\dim X = n$  может быть вложено в  $\mathbb{R}^m$  ( $m > 2n$ ) таким образом, что для подходящего диффеоморфизма  $\alpha: X \rightarrow Y$  его образ:  $\alpha(X)$  будет дифференцируемым подмногообразием  $Y$ .

Практически, для получения копии аттрактора в  $\mathbb{R}^m$ , следует взять  $m$  отсчетов измеренного временного ряда  $y(k) = (y_m(k), y_{m-1}(k), \dots, y_1(k))$ , в качестве вектора реконструкции. Траектория модели получается последовательными сдвигами такого кортежа на один отсчет вправо. Возможная реализация выглядит следующим образом:

$$y_1(k+1) = y_2(k),$$

$$y_2(k+1) = y_3(k),$$

.....

$$y_{m-1}(k+1) = y_m(k),$$

$$y_m(k+1) = f(y_1(k), y_2(k), \dots, y_m(k)),$$

где  $f$  — функция, получаемая с помощью минимизации некоторого функционала.

Вложение гарантирует, что полученный образ будет диффеоморфной копией реального аттрактора и, следовательно, унаследует все его динамические свойства. Кроме того аттрактор отражает латентные связи между параметрами системы, учет которых позволяет по новому формировать критерии прогноза. Поэтому большее значение приобретает достоверность реконструкции аттрактора.

В работе на примере системы Реслера анализируются варианты решения обратной задачи реконструкции аттракторов и рассматриваются возможности применения реконструированных аттракторов в задачах геолого-геофизического прогнозирования.

Необходимо отметить, что моделирование реальной динамической системы является достаточно сложной проблемой. Сценарии ее нелинейной динамики зачастую являются хаотическими (пространственно-временной хаос). Проекциями динамики

пространственно-временного хаоса являются «мгновенные снимки», которые, в общем случае, описываются матрицами, содержащими скалярные или векторные значения измеряемого поля. Массивы экспериментальных данных могут иметь произвольную форму: цифровых изображений или карт. Предлагаемым вариантом обработки таких данных является подход, основанный на преобразовании пространственной информации в скалярные временные ряды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **State N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S.** Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 712–716.
2. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Math. 1981. V. 898. P. 366–381.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И СЕЙСМИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ  
В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ  
С ИЕРАРХИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

О. А. Хачай<sup>1</sup>, А. Ю. Хачай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт геофизики им. Ю. П. Булашевича, Уральского Отделения  
Российской Академии Наук, ул. Амундсена, 100, Екатеринбург 620016, Россия;  
olgakhachay@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Уральский Федеральный Университет, Институт математики и  
компьютерных наук, 51, проспект Ленина, Екатеринбург 620083, Russia;  
andrey.khachay@usu.ru*

Модель иерархически неоднородной среды для описания процессов деформирования и разрушения геофизической среды была впервые предложена академиком М. А. Садовским. Важную роль для понимания формирования и развития иерархии структурных уровней деформации в твердых телах играют теоретические и экспериментальные результаты, полученные на образцах академиком В. Е. Паниным. Явления зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок, связанные с дискретностью и фрагментацией среды, описаны академиком Е. И. Шемякиным. Настоящая работа посвящена разработке алгоритма моделирования электромагнитного и сейсмического эффекта в рамках частотно-геометрической методики при исследовании погруженной в горизонтально-слоистую среду проводящего или упругого включения с иерархической структурой. Распределение электрического и магнитного поля можно анализировать последовательно на каждом итерационном этапе перед включением неоднородностей нового иерархического уровня. В работе [1] выписан алгоритм моделирования дифракции звука на двумерном упругом однородном включении, расположенном в  $J$ -ом слое  $N$ -слойной среды. Идея построения алгоритма для электромагнитного поля реализована и для сейсмического поля для двумерного случая распространения продольной волны через локальную неоднородность с иерархической структурой, расположенной в  $J$ -ом слое  $N$ -слойной среды. Если при переходе на следующий иерархический уровень ось двумерности не меняется, а меняются только геометрии сечений вложенных структур, то аналогично электромагнитному можно выписать итерационный процесс моделирования сейсмического поля (случай формирования только продольной волны). Если на некотором иерархическом уровне структура локальной неоднородности распадается на несколько неоднородностей, то двойной и поверхностные интегралы в выражениях берутся по всем неоднородностям. В данном алгоритме рассмотрен случай, когда физические свойства неоднородностей одного и того же уровня одинаковы, различаются только границы областей. Аналогично выписывается такой же процесс для моделирования распространения упругой поперечной волны в  $N$ -слойной среде с двумерной иерархической структурой произвольной морфологии сечения с использованием интегральных соотношений [1]. Таким образом итерационные процессы позволяют определить при заданных модулях упругости во вмещающей иерархическую неоднородность слоистой среде и в неоднородности на каждом иерархическом уровне и проанализировать пространственное распределение составляющих сейсмического поля. Затем по известным формулам [2] для каждого иерархического уровня вычислить распределение составляющих тензора деформации и тензора напряжений по распределению составляющих смещений.

The author was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant RFBR No 10-05-00013.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Хачай О. А., Хачай А. Ю.** О комплексировании сейсмических и электромагнитных активных методов для картирования и мониторинга состояния двумерных неоднородностей в N-слоистой среде // Вестник ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2011. Вып. 13, № 2. С. 49–56.
2. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.