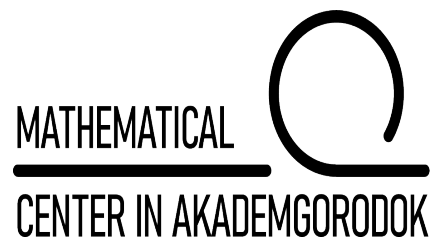


СБОРНИК ТЕЗИСОВ

<http://conf.nsc.ru/ecam2021/ru>

ЕВРАЗИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Новосибирск, Академгородок
16 - 22 декабря 2021 года



Новосибирск, 2021

Программный комитет

Сопредседатели Программного комитета:

**Член-корр. РАН С.И. Кабанихин, Профессор М.А. Бектемесов,
Профессор РАН И.В. Марчук, д.ф.-м.н. М.А. Шишленин.**

Ученый секретарь: к.ф.-м.н. О.И. Криворотько

М.А. Гузев, Ю.Г. Евтушенко, Т.Ш. Кальменов, Е.Е. Тыртышников, Ш.А. Алимов, В.В. Васин, А.Ю. Веснин, Г.Г. Лазарева, С.Н. Лебедев, Н.Ю. Лукоянов, Е.Ю. Миронов, И.Б. Петров, В.Г. Романов, М.А. Садыбеков, А.А. Шананин, В.В. Шайдуров, А.И. Шафаревич, А.Н. Шишлюк, Г.А. Бочаров, А.А. Бакланов, А.В. Гасников, В.М. Головизнин, В.И. Васильев, Е.П. Вдовин, К.Т. Искаков, И.Г. Казанцев, С.Г. Казанцев, А.Л. Карчевский, А.С. Козелков, Г.М. Курамшина, М.М. Лаврентьев, Ю.М. Лаевский, М.А. Марченко, И.В. Оселедец, А.Ю. Пальянов, В.В. Пикалов, Г.А. Платов, С.В. Фортова, А.Г. Ягола, J. Zou, J. Cheng, Ya. Efendiev, A. Hasanoglu, T. Hohage, D.N. Hao, R. Novikov, M. Klibanov, O. Scherzer, Y. Wang, Sh. Zhang.

Организационный комитет

Председатель: член-корр. РАН С.И. Кабанихин

Зам. председателя: д.ф.-м.н. М.А. Шишленин

Ученый секретарь: к.ф.-м.н. О.И. Криворотько.

**Оргкомитет: Т.А. Звонарева, Н.Ю. Зятьков,
А.В. Неверов, Н.С. Новиков, Е.С. Шельгина.**

Содержание

Averboukh Yu.V. CONTROL THEORY ASPECTS OF FINITE STATE MEAN FIELD GAMES	13
A. Litvinenko, R. Kriemann, and V. Berikov IDENTIFICATION OF UNKNOWN PARAMETERS AND PREDICTION OF MISSING VALUES. COMPARISON OF APPROACHES.	14
Rysbaiuly B., Mukhametkaliyeva N.E. QUASILINEAR INVERSE PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY	15
Noeiaghdam S., Sidorov D.N. CONTROL OF ACCURACY ON SEMI-ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING LINEAR AND NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS KERNEL	16
Novikov R.G. MULTIPOINT FORMULAS FOR INVERSE SCATTERING AT HIGH ENERGIESL	17
Shcherbakov V. AN ADAPTIVE TIME-DISCRETIZATION SCHEME FOR RATE-INDEPENDENT SYSTEMS	18
Eric Todd Quinto MICROLOCAL ANALYSIS OF FOURIER INTEGRAL OPERATORS IN SCATTERING TOMOGRAPHY	19
Аверина Т.А. ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПУАССОНОВ- СКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА	20
Akinshin A.A., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. ONE NUMERICAL MODEL OF CIRCADIAN OSCILLATOR	21
Александров П.Н., Кризский В.Н. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ	22

Rysbailuly B., Alpar S. DETERMINATION OF THE NONLINEAR DIFFUSION COEFFICIENT OF SOIL	23
Аристов В.В., Строганов А.В., Ястребов А.Д. РАЗВИТИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ХАРАК- ТЕРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПАНДЕМИИ В РОССИИ	24
Баканов Г.Б., Мелдебекова С.К. О УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО АНА- ЛОГА ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНК- ЦИЕЙ	25
Белоногов В.А. О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕН- НИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ	26
Бериков В.Б., Литвиненко А.Г. МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ ПРИ НЕКОРРЕКТНО ЗАДАННОЙ ОБУ- ЧАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ: ПОДХОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕ- ГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГООБРАЗИЯ	27
Бочаров Г.А., Гребенников Д.С., Савинков Р.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ И ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ	28
Васильев В.И., Ильина К.П. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ	29
Васин В.В., Агеев А.Л. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С АПРИОРНОЙ ИНФОР- МАЦИЕЙ	30
Волков А.М., Авербух Ю.В. ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ИГР СРЕДНЕГО ПОЛЯ	31

Гилев П.В. Папин А.А. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПО- РОУПРУГОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЯЧЕЙКИ ХЕЛЕ-ШОУ	32
Glasko Y.V. THE DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR DIFFUSION PROCESS WITH MOVING BOUNDARY	33
Ph.L.Bykov, V.A.Gordin. COMPLEX COEFFICIENT OF TURBULENT EXCHANGE ACCORDING TO HIGH-RESOLUTION SOUNDING DATA OF THE EARTH'S ATMOSPHERE (MODIFICATION OF THE AKKERBLOM - EKMAN MODEL	34
Gornov A.Yu, Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Sorokovikov P.S. NON-CONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS: CLASSIFICATION AND APPLIED STATEMENTS	35
Гражданцева Е.Ю., Солодуша С.В. ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИ- ПА В ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКО- СТИ	36
С.Ю.Доброхотов, А.И.Клевин, В.Е.Назайкинский, С.А.Сергеев, А.А.Толченников. АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙ- СТВИЯ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН, В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ИСТОЧ- НИКАМИ	37
A.N.Doludenko, S.V.Fortova, I.V.Kolokolov, V.V.Lebedev NUMERICAL MODELLING OF THE COHERENT VORTEX IN A SPATIALLY RESTRICTED TWO-DIMENSIONAL TURBULENT FLOW IN A VISCOUS MEDIA	38
Галкин В.А., Дубовик А.О. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ	40

Ерохин В.И. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ	41
A.A. Bragin, V.V. Vlasov, A.M. Deryabin, O.V. Zatsepin, G.D. Kaminsky, E.V. Karamov, A.L. Karmanov, S.N. Lebedev, G.N. Rykovanov, S.I. Samarin, A.V. Sokolov, N.A. Solomin, N.A. Teplykh, A.S. Turgiyev, M.S. Urakov, K.E. Khatuntsev A COVID-19 AGENT-BASED MODEL	42
Zvonareva T.A., Krivorotko O.I. A TENSOR TRAIN OPTIMIZATION FOR SOLVING THE DISCRETE SOURCE PROBLEM FOR THE DIFFUSION-LOGISTIC MODEL	43
С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков, Д.К.Токсеит, М.А. Шишленин МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ	44
Казанцев И.Г., Брагинская Л.П., Караваев Д.А., Ковалевский В.В. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ГРЯЗЕВОГО ВУЛКАНА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ПОЛОСЕ	46
Казанцев И.Г., Мухаметжанова Б.О., Искаков К.Т. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ УГЛОВЫХ СТРУКТУР НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ	47
Казанцев И.Г., Туребеков Р.Ж., Султанов М.А. РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕКСТУРЫ И ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕФЕКТОВ НА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ ТКАНЕЙ	48
Kazantsev S.G. ORTHOGONAL POLYNOMIAL BASIS IN THE SPACE OF VECTOR FUNCTIONS \mathbf{H}_0^1 AND STOKES SYSTEM IN A BALL	49
Калиев Д.И., Швец О.Я. СВЕРТОЧНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ И ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОЖАРОВ ПО ДАННЫМ АЭРОФОТОСЪЕМКИ	50

Калинин А.В., Тюхтина А.А. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА	51
Каминский Г.Д., Чернецова В.В., Карамов Э.В., Зацепин О.В., Лебедев С.Н. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЙ: НОВАЯ КОРОНАВИРУС- НАЯ ИНФЕКЦИЯ COVID-19	52
Karakulev A. E., Kotlyar L. A., Sofronov I. L. ON AMBIGUITY OF THE ILL-POSED PROBLEM OF PRODUCTION WELL INFLOW PROFILING USING DISTRIBUTED FLUIDS TEMPERATURE LOGGING	53
Карнаев В.М. РЕКОНСТРУКЦИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ШУМОМ В ДАННЫХ	54
Kasenov S.E., Askerbekova J. NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE ACOUSTIC EQUATION	55
Кокурин М.М., Семёнова А.В. ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ ТИПА ГАУССА- НЬЮТОНА В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	56
Kuramshina G.M. REGULARIZED APPROACH FOR CONSTRUCTING BRICK STRUCTURE MOLECULAR FORCE FIELD MATRICES OF SYSTEMS WITH NON- COVALENT INTERACTIONS	57
Lazarev N.P. INVERSE PROBLEM FOR CRACKED INHOMOGENEOUS KIRCHHOFF- LOVE PLATE WITH TWO HINGED RIGID INCLUSIONS	58

Токарева М.А., Вирц Р.А., Ларионова В.Н. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРО- УПРУГОМ ЛЬДУ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И ДВИЖЕ- НИЯ ЛЬДА.	59
Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г. «БЫСТРОЕ» РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛА- СТОГРАФИИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА	60
Логинов К.К., Перцев Н.В., Топчий В.А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	61
Lukyanenko D.V. ON SOME FEATURES OF THE NUMERICAL SOLVING OF INVERSE PROBLEMS FOR NONLINEAR EQUATIONS OF THE REACTION-DIFFUSION-ADVECTION TYPE WITH DATA ON THE POSITION OF A REACTION FRONT	62
Liu S. ANALYSIS, CONSTRUCTION AND JUSTIFICATION OF ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF MULTI PARAMETRIC OPTIMIZATION PROBLEMS BY MACHINE LEARNING METHODS	63
Наседкин А.В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕ- СКИХ КОМПОЗИТОВ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ПО МЕТОДАМ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕН- ТОВ	64
Palyanov A.Yu. 3D BIOMECHANICAL MODEL REPRODUCES REALISTIC SWIMMING OF FROG TADPOLE	65
Penenko A.V., Konopleva V.S., Bobrovskikh A.V. and Zubairova U.S. ADJOINT-ENSEMBLE-BASED ANALYSIS OF THE COEFFICIENT IDENTIFICATION PROBLEMS FOR PRODUCTION-LOSS MODELS	66

Penenko A.V., Penenko V.V., Tsvetova E.A., Gochakov A.V., Pyanova E.A. and Konopleva V.S MEASUREMENT DATA FUSION WITH SENSITIVITY OPERATORS	67
Перцев Н.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНО- ВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	68
Пескова Е.Е., Снытников В.Н. ЛАЗЕРНАЯ КОНВЕРСИЯ ЭТАН-МЕТАНОВЫХ СМЕСЕЙ В РЕАК- ТОРАХ С ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ	69
Петракова В.С., Криворотько О.И. УЧЕТ МАССОВОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ МОДЕЛИ- РОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19	70
Piskarev S.I. APPROXIMATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS	71
Popivanov N.P., Margenov S.D., Ugrinova I., Harizanov S.N., Hristov Ts.D. IDENTIFICATION OF PARAMETERS AND FORECASTING OF COVID- 19 EPIDEMIC IN BULGARIA USING A TIME-DEPENDENT SEIR-BASED MODEL WITH VACCINATION	72
Потапов В.П., Бычков И.В. ЦИФРОВОЙ ДВОЙНИК ОБЪ-ИРТЫШСКОГО БАСЕЙНА – КОН- ЦЕПЦИЯ И ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА	73
Приходько А.Ю., Шишленин М.А., Новиков Н.С. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГЛУБИННОГО ОБУЧЕНИЯ В АКУСТИ- ЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ	74
Савватеева Т.А., Демидова Т.В., Аношин С.А., Стояновская О.П. РАСЧЕТ ДИНАМИКИ СРЕД ГАЗ-МОНОДИСПЕРСНАЯ ПЫЛЬ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ	75

Савченко Н.А., Шишленин М.А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН	76
Сенницкий В. Л. ПАРАДОКСАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ СРЕДЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ	77
Sivkin V.N. RECONSTRUCTION FROM PHASELESS FOURIER TRANSFORM WITH BACKGROUND INFORMATION	79
Стояновская О.П., Сусленкова А.Н., Григорьев В.В. ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ ГАЗОПЫЛЕВОГО ШАРА В ВАКУУМ КАК ТЕСТ ДЛЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД	80
Терсенов А.С. О ВЯЗКИХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	81
С.А. Бейзель, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, И.А. Носиков, А.А. Толченников АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД РАСЧЕТА ДЛИННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ, ОСНОВАННЫЙ НА ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ.	82
Хамисов О.В., Шаманский В.А., Козлова М.А. ЗАДАЧА ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННАЯ С ВЫБОРОМ НАЧАЛЬНОГО СОСТАВА РЕАГИРУЮЩИХ ВЕЩЕСТВ	83
Худак Ю.И., Парфенов Д.В. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД (СДС)	84
Чанышев А.И., Абдулин И.М., Белоусова О.Е. ОТЫСКАНИЕ УПРУГОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УЧАСТКА ГРАНИЦЫ ВЫРАБОТКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЕРВОНАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ ПОРОД ПО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ	85

Чаньшев А.И., Ефименко Л.Л., Фролова И.В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И СТРУКТУРЫ ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ НА ПОВЕРХНОСТИ	86
Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. MATHEMATICAL MODELING OF THE STATE OF CONSUMER LOANS IN RUSSIA	87
Шельгина Е.С., Криворотько О.И. АГЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЗОННОЙ ОРВИ С УЧЕТОМ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ	88
Шепелев В.В. ГЕОМЕТРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ФЕМТОСЕКУНДНЫМ ЛАЗЕРОМ В МЕТАЛЛЕ	89
Shurup A.S. NUMERICAL RECONSTRUCTION OF HIGH-CONTRAST INHOMOGENEITY USING FUNCTIONAL ALGORITHM	90
Андреянова О.А., Щеглов А.Ю. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРОГО НАХОДИТСЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ	91
Артёмкин К.Р., Щеглов А.Ю. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ВОЗРАСТНЫМ СТРУКТУРИРОВАНИЕМ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ	92
Golubyatnikov V.P., Yunosheva E.V. ON EXISTENCE OF A CYCLE IN ONE CIRCADIAN OSCILLATOR MODE	93

И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, И.Э. Степанова, Я. Ван, А.Г. Ягола

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПЛАНЕТ ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ

94

CONTROL THEORY ASPECTS OF FINITE STATE MEAN FIELD GAMES

Averboukh Yu.V.

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg,
Higher School of Economics, Moscow
averboukh@gmail.com*

The talk is concerned with the study of the finite state mean field games. Generally, the mean field game theory examines the behavior of systems of many identical players those try to maximize their own utilities in the limit case when the number of players tends to infinity. The finite state mean field games refers to the case when the the players can occupy only finite number of states and the dynamics of each player is determined by the finite state continuous-time Markov chain with the Kolmogorov matrix $Q(t, m, u)$, where t denotes time, m stands for the distribution of players, whilst u is a control of a player. If we label the states by numbers from the set $\{1, \dots, d\}$, $Q_{i,j}(t, m, u)\Delta t + o(\Delta t)$ is the probability of transition from the state i to the state j on the time interval $[t, t + \Delta t]$ under assumption that at the time t the distribution of all players is equal to m , and the player uses the control u on this time interval.

Our research is motivated by the epidemic model with players trying to maximize their income complying or violating the quarantine restrictions. This can be formalized as follows. Being in the susceptible state the individual can choose his/her control equal either 0 or to 1. In this case the probability of transition to the infectious state is $(\beta_0 + \beta_1 u)i(t)\Delta t$. Here, $i(t)$ stands for the proportion of the individuals infected at time t . The equality $u = 0$ implies that the individual complies the quarantine restrictions, whilst the case $u = 1$ refers to the violation of these restrictions. Assuming that the individuals' payoff depends also on the control parameter, we arrive at the finite state mean field game describing the epidemic model with quarantine restrictions.

The solution of the finite state mean field game can be considered via boundary value problem for the system of Bellman and Kolmogorov equations and the additional condition providing the optimal control of the representative player. Notice that now the Bellman and Kolmogorov equations are systems of ordinary differential equations.

In the talk I will discuss the derivation of the solution of the finite state mean field game using solutions of optimal control problems and attainability sets for certain controlled systems.

**IDENTIFICATION OF UNKNOWN PARAMETERS AND
PREDICTION OF MISSING VALUES. COMPARISON OF
APPROACHES.**

A. Litvinenko^{1*}, R. Kriemann², and V. Berikov^{3,4}

¹ *RWTH Aachen, Aachen, Germany*

litvinenko@uq.rwth-aachen.de

² *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (MiS) in Leipzig*

rok@mis.mpg.de

³ *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

berikov@math.nsc.ru

⁴ *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

Often, statistical data analysis implies expensive linear algebra operations with large dense covariance matrices. After fixing the appropriate class of distributions, the next step is to estimate unknown parameters and predict missing values. To do it, we developed the hierarchical maximum likelihood estimation (H-MLE) procedure [1]. H-MLE maximizes the joint Gaussian log-likelihood function, which depends on a covariance matrix in a non-linear way [2,3]. Many expensive iterations are needed to find the maximum of the log-likelihood function. On each iteration the Cholesky factorisation, the matrix determinant and solving a linear system are necessary. To speed up all these computations, the covariance matrix is approximated in the hierarchical (H-) matrix format [Hackbusch'99]. Especially, the H-matrix technique is suitable in cases when covariance matrices are dense and unstructured.

For validation purposes, we implemented three machine learning (ML) methods: the k-nearest neighbors (kNN), random forest, and deep neural networks. From these three ML methods, the best results (for the given datasets) were obtained by the kNN method with three or seven neighbors depending on the dataset.

The developed H-matrix code and all datasets are freely available online (https://github.com/litvinen/large_random_fields).

Acknowledgment. V. Berikov was supported by the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no 0314-2019-0015) and by RFBR grant 19-29-01175, A. Litvinenko by funding from the Alexander von Humboldt Foundation.

REFERENCES

1. *Litvinenko, A., Kriemann, R., Berikov V.* Identification of unknown parameters and prediction with hierarchical matrices // UNCECOMP 2021, 4th ECCOMAS Conference on Uncertainty Quantification in CSE, M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou (Eds.), pp129-144, <https://2021.uncocomp.org>
2. *Litvinenko, A., Kriemann, R., Genton, M.G., Sun, Y., Keyes, D.E.* Likelihood approximation with hierarchical matrices for large spatial datasets, *Computational Statistics & Data Analysis* 137, 115-132, 2019
3. *Litvinenko, A., Sun, Y., Genton, M.G., Keyes, D.E.* HLIBCov: Parallel hierarchical matrix approximation of large covariance matrices and likelihoods with applications in parameter identification, *MethodsX* 7, 100600, 2020, Elsevier

QUASILINEAR INVERSE PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY

Rysbaiuly B.,^{1,a} Mukhametkaliyeva N.E.^{1,2,b}

¹ *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

² *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

^a*b.rysbaiuly@mail.ru*, ^b*nazerkem09@gmail.com*

The work develops methods for finding the thermophysical parameters of a two-layer soil. The study is based on a difference scheme for the equation of quasilinear heat conduction. Two-layer containers have been created, the side edges of which are thermally insulated. A complex of containers for measuring work was created and sensors were installed to obtain values at two end borders, the environment and at the border of two containers. This circumstance makes it possible to solve the inverse coefficient problem in each container independently of each other. Computational experiments were carried out on the basis of the developed methods and measured data. The results of which show the viability of the developed iterative methods. The coefficient inverse problems considered by us are the most undeveloped and practically important problems. As noted in [1], the stability of these problems is worse than the corresponding inverse problems for hyperbolic equations. In this regard, in this work, methods for finding all thermophysical parameters of a two-layer medium are developed and the stability of the discrete problems under study is proved.

A quasilinear equation with initial-boundary conditions is considered:

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_{ins} (u - u_{ins}(t)) \Big|_{x=0}, \quad (2)$$

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -h_{out} (u - u_{out}(t)) \Big|_{x=l}, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (4)$$

Methods for finding parameters of heat transfer, namely, the coefficients of thermal conductivity, heat capacity, heat transfer and density of a two-layer material have been developed. Moreover, the convergence of the difference problem is proved [2].

The work has been supported by the grant no. AP08855955 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems: Theory and Applications, De Gruyter, Germany,, (2011), 459 p.
2. *Rysbaiuly B., Mukhametkaliyeva N.* The method for finding the system of thermophysical parameters for two-layered structure, 9th IECMSA, Skopje-Northmacedonia (2020), 63 p.

**CONTROL OF ACCURACY ON SEMI-ANALYTICAL METHODS
FOR SOLVING LINEAR AND NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL
EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS KERNEL**

Noeiaghdam S.^{1,2} and Sidorov D.N.^{1,3}

¹*Industrial Mathematics Laboratory, Baikal School of BRICS, Irkutsk National
Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russia.*

²*Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State
University, Lenin prospect 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.*

³*Energy Systems Institute of Russian Academy of Science, 130 Lermontov Street,
664033 Irkutsk, Russia;*

snoei@istu.edu; noiagdams@susu.ru; dsidorov@isem.irk.ru

The aim of this study is to discuss application of the CESTAC method and the CADNA library to control the accuracy of the Adomian decomposition method and the homotopy perturbation method to solve the linear and nonlinear Volterra integral equations with discontinuous kernel. The importance of solving this problem is because of its applications in the load leveling problems, energy storage with renewable and diesel generation, charge/discharge storages control and others [1].

In general, the mathematical methods for solving the mentioned problem are based on floating point arithmetic and the accuracy of the method has been discussed using the traditional absolute error which depends on the exact solution and also a positive small value ε . But in real life problems we do not have the exact solution. Also, based on this condition we will not be able to find more accurate approximations because we do not have information about optimal ε . For small values of ε , the numerical algorithm can not be stopped and extra iterations will be produced without improving the accuracy. For large values of ε , the numerical algorithm will be stopped in initial steps without producing enough iterations.

Because of the mentioned problems we apply a new termination criterion which depends on two successive approximations. For this aim we apply the CESTAC method and the CADNA library which are based on stochastic arithmetic. In this condition, not only we do not need to have the exact solution but also we would be able to identify the optimal approximation, optimal iteration and optimal error of numerical procedure. Also, the CADNA library is applied as an important software for this validation. The CADNA library should be done on the LINUX operating system and its codes should be written using C, C++ or ADA codes [3].

REFERENCES

1. Noeiaghdam, S.; Sidorov, D.; Muftahov, I.; Zhukov, A. V. Control of Accuracy on Taylor-Collocation Method for Load Leveling Problem. The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Math. 2019, 30, 59-72.
2. Noeiaghdam, S.; Sidorov, D.; Sizikov, V.; Sidorov, N. Control of accuracy on Taylor-collocation method to solve the weakly regular Volterra integral equations of the first kind by using the CESTAC method. Appl. Comput. Math. Int. J. 2020, 19, 81-105.

MULTIPOINT FORMULAS FOR INVERSE SCATTERING AT HIGH ENERGIES

Novikov R.G.

*CMAP, CNRS, Ecole Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris,
91128 Palaiseau, France;
IEPT RAS, 117997 Moscow, Russia
novikov@cmaph.polytechnique.fr*

We consider the inverse scattering problem for the multidimensional *Schrödinger* equation with smooth compactly supported potential v . We give explicit asymptotic formulas for the Fourier transform $\hat{v}(p)$ at fixed p in terms of the scattering amplitude f at n points at high energies. The precision of these formulas is proportional to n . To our knowledge these formulas are new for $n \geq 2$, whereas they reduce to the Born formula at high energies for $n = 1$. This talk is based, in particular, on references [1] and [2].

REFERENCES

1. *Novikov R.G.* Multipoint formulas for scattered far field in multidimensions, *Inverse Problems* 36(9), 095001 (2020)
2. *Novikov R.G.* Multipoint formulas for inverse scattering at high energies, *Russian Math. Surveys* 76(4), 723-725 (2021)

**AN ADAPTIVE TIME-DISCRETIZATION SCHEME FOR
RATE-INDEPENDENT SYSTEMS**

Shcherbakov V.

Institute of Mathematics, University of Kassel, Kassel, Germany
shcherbakov@mathematik.uni-kassel.de

In the last two decades, several distinct solution concepts for rate-independent evolutionary systems driven by nonconvex energies have been suggested in an attempt to model properly jump discontinuities in time. Under these circumstances, numerical discretization schemes are needed that efficiently and reliably approximate directly that type of solution that one is interested in.

In this talk, we focus on a novel adaptive time-discretization scheme that is inspired by and based on the local minimization approach of Efendiev and Mielke (2006). We employ a Moreau–Yosida regularization to approximate inequality constraints enforcing the local minimality. In an abstract infinite-dimensional setting, we prove the convergence of time-discrete solutions to functions that are parametrized balanced viscosity solutions of the time-continuous problem provided that the discretization and regularization parameters are chosen appropriately. We test our scheme on a one-dimensional example and find a notable improvement compared with the original version. This is a joint work with Dorothee Knees (University of Kassel).

REFERENCES

1. *Knees D., Shcherbakov V.* A penalized version of the local minimization scheme for rate-independent systems // Applied Mathematics Letters. Vol. 115, article 106954 (2021).

**MICROLOCAL ANALYSIS OF FOURIER INTEGRAL OPERATORS
IN SCATTERING TOMOGRAPHY**

Eric Todd Quinto

*Tufts University (Medford), USA**todd.quinto@tufts.edu*

We present a novel microlocal analysis of generalized Radon transforms (which are Fourier integral operators) that describe the integrals of L^2 functions of compact support over surfaces of revolution of C^∞ curves q in \mathbb{R}^n . We show that the Radon transforms are elliptic Fourier Integral Operators (FIO) and provide an analysis of the left projections Π_L . Our main theorem shows that Π_L satisfies the semi-global Bolker Assumption if and only if $g = q'/q$ is an immersion. An analysis of the visible singularities is presented, after which we derive novel Sobolev smoothness estimates for these generalized Radon FIO.

Our theory has specific applications in Emission Compton Scattering Tomography (ECST) and Bragg Scattering Tomography (BST). We show that the ECST and BST integration curves (or surfaces in \mathbb{R}^3) satisfy the semi-global Bolker Condition and provide simulated reconstructions from ECST and BST data. Additionally we give example "sinusoidal" integration curves which do not satisfy Bolker and provide simulations of the image artifacts. The observed artifacts in reconstruction are shown to align exactly with our predictions.

This is joint work with James Webber (Brigham and Women's Hospital, formerly Tufts University)

ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА

Аверина Т.А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
ata@osmf.ssc.ru*

В данной работе рассмотрена экономичная модификация метода моделирования пуассоновского точечного процесса, позволяющая уменьшить трудоемкость вычислений в результате уменьшения числа вызовов генератора псевдослучайных чисел. Метод основан на свойстве ординарности процесса и использовании экономического метода моделирования случайных величин [1–3]. Проведена проверка статистической адекватности модифицированного метода с помощью решения тестовых задач. Метод может быть использован для статистического решения задач анализа, синтеза и фильтрации систем диффузионно-разрывного типа [4].

Работа поддержана базовым проектом ИВМиМГ СО РАН (0251-2021-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов Г.А. К вопросу о построении экономичных алгоритмов моделирования случайных величин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. Т. 6. № 6. — С. 1134–1136.
2. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Академия, 2006.
3. Аверина Т.А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
4. Averina T.A., Rybakov K.A. Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2020. V. 35. N. 2. P. 55-67.

ONE NUMERICAL MODEL OF CIRCADIAN OSCILLATOR

Akinshin A.A., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk

vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

In recent publication [1] we have obtained some conditions of existence of cycles in two models of circadian oscillator, this is our biological clock. Now, in order to emulate functioning of one of these models, represented in the form of 6-dimensional dynamical system of the kinetic type, we have elaborated client-server application based on the R-language and the Shiny package (<https://shiny.rstudio.com/>). It performs in the cloud all calculation in this 6D model, and presents the results in a browser. See <https://andreyakinshin.shinyapps.io/clock-bmal1/>

The numerical simulations are performed using the 'lsoda' solver from the Livermore family, which automatically switches between stiff and non-stiff methods.

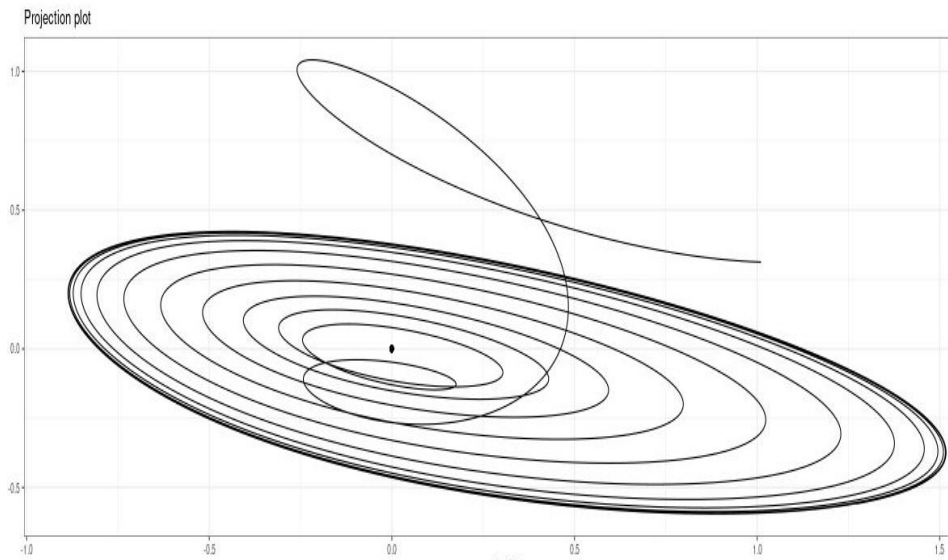


Рис. 1: Projection of trajectory onto 2D-plane

The Figure 1 shows projection of one of its trajectories and its limit cycle onto 2D plane corresponding to a pair of complex eigenvalues of the linearization matrix of this model at its equilibrium point.

REFERENCES

1. *Golubyatnikov V.P., Podkolodnaya O.A., Podkolodny N.L., Ayupova N.B., Kirillova N.E., Yunosheva E.V.* Conditions of existence of cycles in two models of circadian oscillator // *J. Appl. Industr. Math.*, 2021, v. 24, N 4, P. 39–53.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОФИЗИКИ

Александров П.Н.¹, Кризский В.Н.²

¹ ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Москва

alexandr@igemi.troitsk.ru

² СПГУ, Санкт-Петербург

Krizskiy_VN@pers.spmi.ru

Рассматриваются интегральные уравнения математической физики, которые при переходе от интегралов к суммам сводятся к системам линейных уравнений $\mathbf{X}^p = G_v^p \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_p^s$, где индексы означают: p – точку наблюдения, s – точку источника, ν – точку в неоднородности; ΔS – квадратная матрица физических параметров, имеющая квазидиагональный (принципиально для дальнейших вы-

числений) вид $\Delta S = \begin{pmatrix} \Delta S_1 & [0] & \vdots & [0] \\ [0] & \Delta S_2 & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & [0] & \vdots & \Delta S_N \end{pmatrix}$, где подматрицы ΔS_j есть тензоры

избыточных электромагнитных параметров (размерности $b \times b$ элементов; в общем случае, $3b$ параметров) j -го элемента объёма всей неоднородности V , состоящей из N элементов; \mathbf{X}_p^s – первичное поле от источника в точке наблюдения; \mathbf{X}_v – поле в неоднородности; \mathbf{X}^p – поле в точке наблюдения (как разность потенциалов); G_v^p – передаточная матрица от неоднородности в точку наблюдения. Найдем поле в неоднородностях $\mathbf{X}_v = G_v^v \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_v^s$, откуда $\mathbf{X}_v = ([1] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^s$. Следовательно $\mathbf{X}^p = G_v^p \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_p^s = G_v^p \Delta S ([1] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^s + \mathbf{X}_p^s$. Здесь \mathbf{X}_v^s – поле от источника в неоднородность – вычисляется через функцию Грина вмещающей среды, \mathbf{X}_p^s – первичное поле в точке наблюдения – вычисляется через функцию Грина вмещающей среды. Для конкретного источника с номером k имеем $\mathbf{X}_k^p = G_v^p \Delta S ([1] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^{s_k} + \mathbf{X}_p^{s_k} = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} \mathbf{X}_v^{s_k} + \mathbf{X}_p^{s_k}$. Используя дополнительные источники, введем составные матрицы $X = [\mathbf{X}_1^p, \mathbf{X}_2^p, \mathbf{X}_3^p, \dots]$, $Y = [\mathbf{X}_v^{s_1}, \mathbf{X}_v^{s_2}, \mathbf{X}_v^{s_3}, \dots]$, $Z = [\mathbf{X}_p^{s_1}, \mathbf{X}_p^{s_2}, \mathbf{X}_p^{s_3}, \dots]$. Перейдем от векторной системы уравнений к матричной $X = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y + Z$. Для переопределенной и нормально определенной системы, из цепочки уравнений $X = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y + Z$, $X - Z = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y$, $G_v^{pT} (X - Z) = G_v^{pT} G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y$, $(G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y$, $(\Delta S^{-1} - G_v^v) (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = Y$, получим $\Delta S^{-1} (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = Y + G_v^v (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z)$. Параметры среды могут быть вычислены для каждой частоты, что позволяет определять частотную зависимость электромагнитных параметров горной породы.

Исследования выполнены в рамках гос. заданий ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН № 0144-2014-0111 и СПГУ № FSRW-2020-0014.

**DETERMINATION OF THE NONLINEAR DIFFUSION
COEFFICIENT OF SOIL**

Rysbaiuly B. and Alpar S.

International Information Technology University, Almaty

rysbaiuly.b@gmail.com

An iterative method for determining the nonlinear diffusion coefficient of soil moisture is developed. The conjugate difference problem is constructed and a priori estimates for the discrete problem are obtained. These estimates ensure the boundness of the approximate value of the diffusion coefficient of soil moisture. The monotonicity of the minimizing functional is proved by solving an auxiliary difference problem.

In the region $Q = (0, H) \times (0, T)$ the following initial-boundary value problem is studied:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(W) \frac{\partial W}{\partial z} + A \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z} \right], \quad (z, t) \in Q \quad (1)$$

$$W(z, 0) = \bar{W}(z), \quad z \in [0, H], \quad (2)$$

$$\frac{\partial W(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \left(D(W) \frac{\partial W}{\partial z} + A \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z} \Big|_{z=H} \right) = f(t), \quad t \in (0, T) \quad (3)$$

Here $f(t)$ is a moisture flow on the Earth surface and W is the soil moisture. In addition, there is a measured value of soil moisture on the surface of the Earth given by

$$W(H, t) = W_q(t), \quad t \in (0, T) \quad (4)$$

It is required to find the capillary positive coefficient $D(W)$ of soil diffusion and the moisture distribution W in soil.

The work has been supported by grant funding for projects of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant AP08855955).

REFERENCES

1. *Hallaire V.M.* Potential efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement. // Institut National de la Recherche Agronomique, 1963, France, Vol. 4, No. 1, P. 114-122.
2. *Reynolds A.J.* Turbulent Flows in Engineering. // Brunel University, 1974, London, P. 408.
3. *Rode A.A.* Selected works in 4 volumes. Vol. 3: Fundamentals of doctrine on soil moisture, 2008, P. 664.
4. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, 2011, De Gruyter, Germany, P. 459.

РАЗВИТИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ХАРАКТЕРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПАНДЕМИИ В РОССИИ

Аристов В.В.¹, Строганов А.В.², Ястребов А.Д.²

*1 Федеральный исследовательский центр Информатика и управление
Российской академии наук, Москва*

*2 Российский технологический университет МИРЭА, Москва
aristovvl@yandex.ru*

Ранее была предложена кинетико-переносная модель для изучения пространственного распространения COVID-19 и получены результаты, которые сравнивались с известными данными на примере некоторых стран [1]. В настоящей работе эта модель применяется для описания пандемических волн в России. Полученные ранее закономерности для первой волны и получившие подтверждение для второй волны, применяются для третьей и четвертой волн, на основе результатов делаются предсказания и для последующих возможных волн. Применяемая простая одномерная модель учитывает характер заражения для России, поскольку основной источник основным и последующими штаммами связан с Москвой. Географические особенности России (также как и рассматривавшихся ранее Италии и Чили) позволяет применять одномерную по пространству модель. На основе изученных вначале данных определены два основных параметра модели, главный из которых характеризует среднюю скорость транспортных средств, с которыми переносится заражение. С ним связана величина запаздывания проникновения волны в области России - изучались регионы к востоку от Москвы. Также это позволяет судить о сдвиге во времени начала выздоровления, что соотносится с максимумом заражения в день. Были сделаны предсказания о начале выздоровления для всей России по началу выздоровления для Москвы: по вычислениям этот сдвиг должен составлять около 3-х недель. Для третьей волны начало такого процесса для Москвы пришлось на середину третьей декады июня, прогноз о начале выздоровления для России в целом к середине июля оправдался. Аналогично для четвертой волны такими датами оказались середина третьей декады октября и середина ноября. Представлены аналитические и численные решения, сопоставляемые с реальными данными. Развивается также и двумерная модель, которая может позволить подробно исследовать пространственное распространение пандемии не только для России, но и для других стран.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аристов В.В., Строганов А.В., Ястребов А.Д. Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19. // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021, Т. 498, с. 27-32.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Баканов Г.Б., Мелдебекова С.К.

Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясауи
galitdin.bakanov@ayu.edu.kz, saule.meldebekova@ayu.edu.kz

В данной работе рассматривается дифференциально-разностный аналог задачи интегральной геометрии для семейства кривых, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности.

Отметим, что необходимость исследования дифференциально-разностных и конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии впервые было высказано академиком М.М. Лаврентьевым, сформулировано им как новое перспективное направление. Поэтому, исследование дифференциально-разностных и конечно-разностных аналогов задач интегральной геометрии является актуальной проблемой. Впервые М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым было показано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии[1]. Весьма общий результат по единственности и оценкам устойчивости для специального семейства кривых был получен Р.Г. Мухометовым. Эти оценки устойчивости основаны на сведении задачи интегральной геометрии к эквивалентной ей краевой задаче для уравнения с частных производных смешанного типа[2].

В данной работе используя методику, предложенной в работах [3]-[4] получена оценка устойчивости дифференциально-разностного аналога задачи интегральной геометрии. Эти оценки могут быть использованы при обосновании сходности численных методов решения задач геотомографии, медицинской томографии, дефектоскопии и имеет большое практическое значение при решении многомерных обратных задач акустики, сейсморазведки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М., Романов В. Г.* О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. -Т. 171. - 6. - С. 1279-1281.
2. *Мухометов Р. Г.* О задаче интегральной геометрии //Математические проблемы геофизики. Новосибирск. - 1975. - Т. 6. - С. 212-252.
3. *Кабанихин С. И. , Баканов Г. Б.* Об устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии // Докл. АН СССР. 1987. -Т. 292. - 1. - С. 25-29.
4. *Kabanikhin, S. I. and Bakanov, G. B.* On the stability estimation of finite-difference and differential-difference analogues of a two-dimensional integral geometry problem. Computerized Tomography: Proceedings of the Fourth International Symposium - VSP,Utrecht, The Netherlands, 1995, pp. 246-258.

**О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ
ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА В
СЛОИСТЫХ СРЕДАХ**

Белоногов В.А.

*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
vladimir.belonogov@yandex.ru*

В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта.

Мы исследуем обратные задачи об определении коэффициентов теплопередачи, входящих в условие сопряжения. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i(x, t)u_{x_i} + a_0(x, t)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ . Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^- , $\bar{G}^- \subset G$, $\bar{G}^+ \cup \bar{G}^- = \bar{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G^\pm$, $S_i = (0, T) \times \Gamma_i$, где Γ_i ($i = 1, 2, \dots, r_0$) – компоненты связности множества Γ_0 .

Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = g \quad (S = \Gamma \times (0, T)), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)n_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(x, t)u$ и условиями сопряжения

$$B_i^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N} \Big|_{S_i} - \beta_i(u^+ - u^-) \Big|_{S_i} = g_i^+, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N} \Big|_{S_i} = \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_{S_i}, \quad i \leq r_0 \quad (3)$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0, t) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i} \nu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^+(t, x)u_{x_i}^+ \nu_j$, $u_{x_i}^\pm = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u_{x_i}(x, t)$, $u^\pm = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(x, t)$, $a_{ij}^\pm = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} a_{ij}(x, t)$ и n, ν – внешние единичные нормали к $\Gamma, \partial G^-$, соответственно.

К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(x_i, t) = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, r_1), \quad u^-(x_i, t) = \varphi_i(t) \quad (i = r_1 + 1, \dots, r), \quad (4)$$

где $x_i \in \Gamma_0$, $\{x_i\}$ – некоторый набор точек.

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(4) и неизвестных функций β_i вида $\beta_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}(t)\Phi_{ij}(t, x)$ ($i = 1, 2, \dots, r_0$), где функции Φ_{ij} заданы, а функции α_{ij} считаются неизвестными.

В результате показана локальная по времени теорема существования и единственности решений задачи (1)-(4) в классе

$$u \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+) \cap W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-), \quad \alpha_{ij}(t) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, \tau_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r_0, \quad j = 1, 2, \dots, m_i)$$

Метод является конструктивным и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ ПРИ НЕКОРРЕКТНО ЗАДАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ: ПОДХОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГООБРАЗИЯ

Бериков В.Б., Литвиненко А.Г.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рейнско-Вестфальский технический университет, Ахен

berikov@math.nsc.ru, litvinenko@uq.rwth-aachen.de

Рассматривается задача машинного обучения в случае некорректно заданной обучающей информации. В этом случае для некоторых наблюдений значения (метки) прогнозируемой величины известны неточно, а для других – неизвестны. Неточность разметки может возникать из-за наличия случайного шума или нехватки ресурсов для детального исследования.

В работе [1] предложен метод решения данной задачи, основанный на минимизации функции потерь, при выводе которой применяется подход регуляризации многообразия и представление в малоранговой форме матрицы сходства объектов. Такое представление позволяет значительно уменьшить трудоемкость вычислений и снизить требуемую память.

При задании модели неточности используется некоторая функция, определяющая для каждого объекта распределение возможных значений меток. Для нахождения матрицы сходства в малоранговой форме применяется матрица отношений, полученная на основе кластерного ансамбля. Матрица определяет, к какому кластеру был отнесен тот или иной объект базовыми алгоритмами ансамбля. Использование кластерного анализа позволяет извлечь дополнительную информацию из неразмеченных и неточно размеченных объектов [2].

В докладе предлагается модификация данного метода, основанная на применении нечетких алгоритмов кластеризации. Матрица нечетких отношений используется для нахождения матрицы сходства, которая также представляется в малоранговом виде.

Предложенный метод исследуется на искусственных и реальных наборах данных с использованием статистического моделирования.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФ, проект 22-21-00261.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berikov V., Litvinenko A. *Weakly supervised regression using manifold regularization and low-rank matrix representation // Lecture Notes in Computer Science, vol. 12755, pp 447–461, 2021.*
2. Berikov V., Litvinenko A. *Semi-supervised regression using cluster ensemble and low-rank co-association matrix decomposition under uncertainties, Conf. Proceedings of 3rd International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering, pp 229-242, 2019.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ И ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

Бочаров Г.А., Гребенников Д.С., Савинков Р.С.

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва
g.bocharov@inm.ras.ru

В работе рассмотрены результаты реализации системного подхода к моделированию иммунных процессов при вирусных инфекциях. Задачи моделирования можно предметно разбить на следующие группы: структура лимфатической системы (ЛС) и лимфатических узлов (ЛУ) [1], регуляция противовирусного иммунного ответа [2], внутриклеточное размножение вирусов [4], построение многомасштабных мультифизических моделей. Разработаны графовые модели ЛС человека, построенные на основе анатомических данных и набора физиологических правил сетевой организации системы и изучены некоторые топологические характеристики соответствующих графов. Представлен подход к описанию дренажной функции ЛУ на основе нейронных сетей. С помощью математической модели противовирусного иммунного ответа Марчука-Петрова показан мультипликативный характер взаимодействия двух основных элементов защиты от вирусной инфекции — антител и Т-лимфоцитов. Рассмотрены математические модели внутриклеточной репликации вирусов ВИЧ-1 и SARS-CoV-2 в детерминистической и стохастической формулировках. Путем анализа чувствительности идентифицированы стадии репликации (потенциальные мишени для антивирусной терапии), изменение которых существенно влияет на степень размножения вирусов в клетке. Представлены примеры реализации гибридного подхода к мультифизическому моделированию процессов иммунного реагирования при ВИЧ-1 инфекции.

Исследования проводились при поддержке грантов РНФ (18-11-00171), РФФИ (20-01-00352, 20-04-60157) и Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2019-1624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Savinkov R., Grebennikov D., Puchkova D., Chereshnev V., Sazonov I., Bocharov G.* Graph Theory for Modeling and Analysis of the Human Lymphatic System. *Mathematics* 2020, 8, 2236. doi: 10.3390/math8122236
2. *Bocharov G., Grebennikov D., Argilaguet J., Meyerhans A.* Examining the cooperativity mode of antibody and CD8+T cell immune responses for vaccinology. *Trends in Immunology*, 2021, 42(10):852-855. doi: 10.1016/j.it.2021.08.003
3. *Sazonov I., Grebennikov D., Meyerhans A., Bocharov G.* Markov Chain-Based Stochastic Modelling of HIV-1 Life Cycle in a CD4 T Cell. *Mathematics* 2021, 9, 2025. doi: 10.3390/math9172025
4. *Grebennikov D., Kholodareva E., Sazonov I., Karsonova A., Meyerhans A., Bocharov G.* Intracellular Life Cycle Kinetics of SARS-CoV-2 Predicted Using Mathematical Modelling. *Viruses* 2021, 13, 1735. doi: 10.3390/v13091735

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Васильев В.И., Ильина К.П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск
vasvasil@mail.ru

В 1937 г. академик А.Н.Колмогоров с учениками [1] вывели квазилинейное параболическое уравнение, описывающее процесс взаимодействия между диффузией и реакцией, доказали существование и единственность решения начально-краевой задачи для нее. Авторы также рассмотрели применение данной задачи к математическому моделированию биологических процессов. В 40-х годах Я.Б.Зельдович данную задачу использовал в качестве математической модели скорости распространения пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре, а также влияние начального условия на спонтанное распространение химической реакции. Впоследствии теоретические результаты данных исследований опубликованы в его с учениками монографии [2]. Независимо от группы Колмогорова американский ученый Фишер в том же 1937 году опубликовал статью [3], в которой выведено то же уравнение. Уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Ф-КПП) и его обобщения [4] используются для количественного описания различных технологических процессов, например, в биологии, химии, теории фазовых переходов, физике плазмы и т.д.

В докладе представлены результаты численной реализации модели Ф-КПП и обобщенной модели Ф-КПП. Расчеты показали, что для получения хорошей точности вычислений при малых значениях коэффициента диффузии требуется использование достаточно подробных пространственно-временных сеток.

Работа Васильева В.И. выполнена при поддержке государственного задания №121110900017-5 на выполнение научных исследований лабораториями под руководством молодых, перспективных исследователей в рамках реализации национального проекта «Наука и университеты», работа Ильиной К.П. выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1543/1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика, 1937, 1:6, 1-16.
2. Я.Б.Зельдович, Г.И.Баренблатт, В.Б.Либрович, Г.М.Махвиладзе. Математическая теория горения и взрыва. -М.: Наука, 1980.
3. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. Ann. Eugenics, 1937, 7:4, 355-369.
4. Fuentes M.A., Kuperman M.N., Kenkre V.M. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // Phys. Rev. Lett, 2003, 91, Paper No 158104, 1-4.

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С АПРИОРНОЙ
ИНФОРМАЦИЕЙ**

Васин В.В, Агеев А.Л

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург**Уральский федеральный университет, Екатеринбург**vasin@imm.uran.ru, ageev@imm.uran.ru*

При практическом решении обратной некорректно поставленной задачи, рассматриваемой в форме операторного уравнения первого рода $Au = f$ на паре гильбертовых пространств U, F , в условиях неединственности решения неизбежно возникает проблема достоверности построенного приближенного решения, поскольку никакой метод не гарантирует, вообще говоря, что это решение аппроксимирует именно искомое решение, соответствующее изучаемой реальности. Даже классический метод регуляризации Тихонова с пробным решением u^0 в стабилизаторе не решает эту проблему, так как u^0 – нормальное решение, которое аппроксимируется регуляризованным семейством решений, может не совпадать с искомым решением.

По-видимому единственным способом построения приближенного решения, аппроксимирующего искомое решение, отвечающее физической реальности, является привлечение дополнительных априорных ограничений для "приведения в единственность" решения исходной задачи и учет этой дополнительной информации в разрешающем алгоритме. При сильной неустойчивости задачи локализация искомого решения с помощью дополнительных априорных ограничений может также оказаться полезной в случае единственности решения для построения высокоточных алгоритмов решения некорректных задач [1]. При этом исследование (не)единственности численными методами является важнейшим этапом решения некорректной задачи [2].

Рассматриваются различные методы учета априорных ограничений в алгоритме, в том числе наиболее общий и экономичный метод с помощью фейеровских отображений [3]. Обсуждаются приложения предлагаемого подхода к решению прикладных задач [4].

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (проект 18-11-00024-П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasin V.V., Skorik G.G., Kuchuk F.* A new technique for solving pressure-rate deconvolution problem in pressure transient testing // J. Eng. Math. 2016. Vol. 101, Issue 1. P. 189-200.
2. *Vasin V.V., Ageev A.L.* Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1995.
3. *Васин В.В.* Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.
4. *Skorik G.G., Vasin V.V., Toussaint F.* A modified method of solving the pressure-rate deconvolution problem // EJMCA. 2021. Vol. 9, Issue 4.

ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ИГР СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Волков А.М., Авербух Ю.В.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,

Екатеринбург

volkov@imm.uran.ru, averboukh@gmail.com

Рассматривается задача планирования — задача приведения распределения бесконечного числа однотипных агентов из заданного начального в конечное при учете их индивидуальных интересов. При этом предполагается, что задана динамика и интегральная часть функции выигрыша, а перевод в заданное состояние осуществляется за счет выбора терминальной функции выигрыша. Рассматривается случай, когда динамика каждого агента есть случайный процесс $X(t)$, задаваемый марковской цепью с конечным числом состояний и матрицей Колмогорова $Q(t, m, u)$. Здесь m — распределение агентов, а u — управление агента. Значение $Q_{i,j}(t, m, u)$ описывает плотность вероятности перехода из состояния i в состояние j при условии того, что выбрано управление u , а распределение всех агентов есть m . При этом управление $u(t)$ выбирается каждым агентом с целью максимизации показателя

$$J(m(\cdot), \varphi(\cdot), u(\cdot)) = \mathbb{E} \left[\sigma_{X(T)}(m(T)) + \int_{t_0}^T g_{X(t)}(t, m(t), u(t)) dt \right].$$

Здесь $\sigma_i(m)$ — терминальный выигрыш агента, который в момент времени T оказывается в состоянии i при условии того, что терминальное распределение всех агентов есть m , а $g_i(t, m, u)$ задает мгновенный выигрыш игрока, который находится в состоянии i в момент времени t и использует управление u , в случае когда распределение всех агентов есть m . Описание задачи сводится к системе дифференциальных уравнений, описывающих распределение всех игроков $m(\cdot)$ и функцию цены пробного игрока $\varphi(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= m(t)Q(t, m(t), u^*(t)), \quad m(t_0) = m_0, m(T) = m_T \\ \dot{\varphi}(t) &= \max \left\{ Q(t, m(t), u)\varphi(t) + g(t, m(t), u) : u \in U \right\}, \\ u^*(t) &\in \operatorname{Argmax} \left\{ Q(t, m(t), u)\varphi(t) + g(t, m(t), u) : u \in U \right\} \end{aligned}$$

Основные результаты работы следующие.

- Приведен пример задачи планирования, которая не имеет решения. При этом желаемое m_T лежит в области достижимости системы.
- Предложено определение обобщенного решения задачи через регуляризацию эквивалентной задачи. Показано, что это обобщенное решение существует, а множество обобщенных решений замкнуто и совпадает с замыканием множества классических решений, если последнее не пусто.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В
ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЕРНОЙ
ЯЧЕЙКИ ХЕЛЕ-ШОУ**

Гилев П.В. Папин А.А.

Алтайский государственный университет, Барнаул
pavrl.gilev.2000@mail.ru, papin@math.asu.ru

Математическая модель двухфазной фильтрации в пороупругой среде описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_i \phi \rho_i^0}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) &= 0, \\ s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) &= -K_0(\phi) \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \vec{g} \rho_i^0), i = 1, 2, \\ s_1 + s_2 &= 1, p_2 - p_1 = p_c(x, s_1), \\ \frac{\partial (1 - \phi) \rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \vec{u}_3 \rho_3^0) &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{u}_3 &= -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \\ p_e &= p_{tot} - (s_1 p_1 + s_2 p_2), \rho_{tot} = (1 - \phi) \rho_3^0 + \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0), \\ \nabla p_{tot} + \operatorname{div} \left(\eta (1 - \phi) \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) &= -\rho_{tot} \vec{g}, \end{aligned}$$

где $s_i, p_i, \rho_i^0, \vec{u}_i$ - соответственно насыщенность, давление, истинная плотность и скорость i -той фазы, $K_0(\phi)$ тензор фильтрации, k_{0i} - коэффициенты проницаемости, μ_i, η - коэффициенты динамической вязкости жидких и твердой фаз соответственно, \vec{g} - вектор ускорения силы тяжести, ϕ - пористость, p_c - капиллярный скачок, $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости соответственно, p_e, p_{tot} - эффективное и полное давление, ρ_{tot} - общая плотность. Данная модель является обобщением известной модели Маскета-Левретта [2]. В работе получено обобщенное решение начально-краевой задачи в приближении ячейки Хеле-Шоу.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия алтайского государственного университета. -2015.- № 1-2(85). с. 131-140.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. / Новосибирск, 1983.

**THE DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR DIFFUSION
PROCESS WITH MOVING BOUNDARY**

Glasko Y.V.

*Research Computing Center Lomonosov Moscow State University, Moscow
glaskoyv@mail.ru*

Time-dependent quasilinear parabolic equation with the source with the moving boundary and time-boundary conditions are mathematical model for the diffusion process. We can consider Cauchy problem. From the time we have the stationary model [3].

Let us consider 3D cube $V = [0, 1] \times [0, 1] \times [1/3; 4/3]$ for the diffusion. The grid domain V^h (cube in the mesh space) is the system expanding grid domains $V_3^h \subset V_2^h \subset V_1^h \subset V^h$. $h = 1/7$. Correspondingly, for the inverse problem we have the system of encapsulated grid domains. Relation of length of edges V_3 and $V_2 - 1/3$, V_2 and $V_1 - 3/5$, V_1 and $V - 5/7$. Let us consider the balayage process and the swelling process.

Three numerical experiments for the source is approximated by the grid domain V_3^h , by the grid domain $V_2^h \supset V_3^h$ and by the grid surface V_2^h/V_3^h are considered. The source density is 1 (logical yes). For the central domains we have the cross array of the densities on the 6 sides of ∂V^h . The density is sweeping by numerical 7-points scheme [2], [3]. The scheme is realization of balayage method H. Poincare [1]. The center of the source is defined by "Plateau" with maximum value δ_{max} . If $\delta_{max}/\delta_2 \approx 1.26$ (δ_2 - nearest value to δ_{max}) then the source is the domain V_3^h . If $\delta_{max}/\delta_2 \approx 1.26$ and $2 < \delta_2/\delta_3 < 2.13$ then the source-domain is V_2^h . If $\delta_{max}/\delta_2 \approx 1.23$ then the source-domain is V_2^h with zero density in the V_3^h .

For first experiment $\delta_{src}/\delta_{max} = 11.887779$ (δ_{src} - density of the source). In the numerical experiment the density in the nodes of the domain-source may be 2, 3, 4 and so on.

REFERENCES

1. *Bogolubov N.N., Arnold V.I., Pogrebissky I.B. (eds.) Henry Poincare. Selected works. V. 3. Moscow: Nauka, 1974.*
2. *Zidarov D.P. About solution some inverse problems for potential fields and it use for geophysical problems. Sofia: BAS, 1980.*
3. *Glasko Yu. V. The Inverse Problem of Interpretation of Gravitational and Magnetic Anomalies of Hydrocarbon Deposits // Journal of Applied and Industrials Mathematics - 2020. - Vol. 14. - N 1. - P. 46-55.*

**COMPLEX COEFFICIENT OF TURBULENT EXCHANGE
ACCORDING TO HIGH-RESOLUTION SOUNDING DATA OF THE
EARTH'S ATMOSPHERE
(MODIFICATION OF THE AKKERBLOM - EKMAN MODEL)**

Ph.L.Bykov¹, V.A.Gordin²

¹ *Analysis and data assimilation department, Hydrometeorological Research Center
of Russian Federation, Moscow, 123242, Russia*

bphilipp@inbox.ru

² *Department of Mathematics, Faculty of Economic Sciences, National Research
University Higher School of Economics, Moscow, 101000, Russia Analysis and data
assimilation department, Hydrometeorological Research Center of Russian*

Federation, Moscow, 123242, Russia

vagordin@mail.ru

Every modern atmospheric model includes a block that describes the atmospheric turbulence. However, the direct numerical simulation is very time consuming for operative weather forecasting. As a palliative, so-called parameterizations of the phenomenon (i.e. some empirical algorithms of its description) are used in the atmospheric models. The basic criterion for these algorithms is the minimal error of the atmospheric model, which uses the algorithm, in comparison with meteorological observations. To provide this minimum, various numerical parameters in the turbulence block are optimized.

The basic paradigm of these turbulence parameterizations is the similarity to the first molecular diffusion in a fluid. The diffusion coefficient is a positive value (a constant or a function). We are going to develop the paradigm and consider a more general tensor for the turbulence description. It includes two functions that describe the turbulence without any assumption about their positivity. It can be rewritten as an assumption about an arbitrary complexvalued function. The turbulence impact in the atmospheric dynamics reaches its maximum in close proximity to the Earth's surface (in the boundary layer). We provide a model of the Akerblom – Ekman type, but with a complex coefficient.

We optimize the agreement between the wide global archive of high-resolution wind data, provided in Binary Universal Form for the Representation (BUFR), and our model. The synchronisation between the model and observations is much better if we optimize the turbulent exchange coefficient as a complex-valued function instead of a real positive one. It is a central result of our work.

This work was prepared within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2020 - 2021 (grant № 20-04- 021) and by the Russian Academic Excellence Project 5-100.

**NON-CONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS: CLASSIFICATION
AND APPLIED STATEMENTS**

Gornov A.Yu, Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Sorokovikov P.S.

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk
gornov@icc.ru, tz@icc.ru, anton.anikin@gmail.com, sorokovikov.p.s@gmail.com*

The complexity of non-convex optimization problems currently arising in various scientific and technical fields is constantly growing. In practice, problems arise for which the non-uniqueness of the solution is naturally characteristic, the non-convexity of the reachable sets of controlled dynamical systems, the presence of various constraints, etc. (see, e.g. [1]). Many classifications of extreme problems are known; they are traditionally based on some structural features of the problem: one-dimensional – multidimensional, unconditional – conditional, static – dynamic, one-criterion – multicriteria, continuous – discrete – partial-integer, convex – non-convex [2]. The variety of optimization problems inevitably raises the question of their systematization and classification. In our opinion, this is due not only to attempts to develop theoretical approaches for their study, but also to the natural search for a unified approach to their numerical solution. It is often suggested to divide the extremal problems into a narrow class of convex ones, but convenient for mathematical analysis, and into a class of non-convex ones – “everyone else”. And optimization problems that arise in applications constantly pose new questions for researchers about the properties of non-convex functions.

The report discusses the proposed classification of non-convex optimization problems based on the characteristic properties of the function to be minimized. Thus, it is based on the unconstrained minimization problem, which is almost impossible to ignore in applied formulations. The classification includes the following set of function types: 1) convex, 2) unimodal, 3) acute minimum, 4) slightly extreme, 5) multi-extreme, 6) equal extras, 7) undifferentiable, 8) stepped, 9) noisy, 10) “degenerate”, 11) “jamming extreme”, 12) “gouged out extreme”, 13) “plateau-like”, 14) “condensation of extrema”, 15) “partially computable”, 16) “little computable”.

The proposed classification is obviously incomplete, but, we hope, it covers a significant number of statements of applied optimization problems. Methods for detecting the features of a problem, assigning it to one type or another, as well as approaches to overcoming the arisen difficulties are discussed.

This work has been supported by the Ministry of Education and Science of Russia under the project No. 121041300060-4.

REFERENCES

1. *Zinovieva A.F., Nenashev A.V., Koshkarev A.A., Zarodnyuk T.S., Gornov A.Y., Dvurechenskii A.V.* Quantum Gates with Spin States in Continuous Microwave Field // Russian Microelectronics. 2018. Vol. 47, No 4. pp. 268–278.
2. *Polak E.* Numerical optimization methods. A single approach // Moscow, Mir, 1971. 376 p.

**ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА В ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ
ЖИДКОСТИ**

Гражданцева Е.Ю., Солодуша С.В.

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
grelyur@mail.ru, solodusha@isem.irk.ru*

Была рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью вида

$$\frac{\partial p}{\partial l} + \alpha_0 \frac{\partial x}{\partial t} + \alpha_1 x^2 = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

которая описывает нестационарное движение воды в напорном трубопроводе [1], где $p = p(l, t)$ и $x = x(l, t)$ — искомые функции, достаточно гладкие по совокупности переменных l, t и в отдельности по каждой переменной, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — действительные числа.

Данная система имеет автомодельное решение вида

$$x(l, t) = \frac{1}{t} w(y), \quad p(l, t) = \frac{1}{t} g(y),$$

где

$$y = \frac{l}{t}, \quad g(y) = \frac{1}{\alpha_2} w' - \alpha_0 y w - \alpha_0 y^2 w' + \alpha_1 y w,$$

а функция $w(y)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''(\alpha_0 \alpha_2 y^2 - 1) + w' y (4\alpha_0 \alpha_2 - 2\alpha_1 \alpha_2 w) + w (2\alpha_0 \alpha_2 - 2\alpha_1 \alpha_2 w) = 0.$$

Работа проводилась в рамках государственного задания (проект FWEU-2021-0006, тема № АААА-А21-121012090034-3) программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М: Недра, 1975.

**АНАЛИТИКО–ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН,
В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ, ПОРОЖДЕННЫХ
ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ**

С.Ю.Доброхотов, А.И.Клевин, В.Е.Назайкинский, С.А.Сергеев,
А.А.Толченников

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва
s.dobrokhотов@gmail.com*

В докладе рассматриваются задачи Коши с локализованными начальными условиями для уравнений содержащих дисперсионные эффекты и описывающие взаимодействие волн с препятствиями. Обсуждаются асимптотические решения двух задач с различным поведением решений: 1) задача о распространения дисперсионных волн на поверхности несжимаемой потенциальной жидкости, набегаящих на подводную банку, и 2) задача для уравнений типа Клейна–Гордона с локализованным потенциалом. Для построения асимптотических решений этих задач имеется общий подход [1, 2], основанный на модифицированном каноническом операторе Маслова, построенном на подходящем семействе лагранжевых многообразий фазовом пространстве, сдвигаемых вдоль траекторий некоторого гамильтонового векторного поля. Получаемые асимптотические формулы реализуются с помощью численных расчетов.

В задаче Клейна–Гордона траектории системы Гамильтона, выпущенные с большими начальными импульсами, будут самыми быстрыми и будут проходить сквозь потенциал. При этом имеется некоторый средний диапазон начальных импульсов, для которых траектории будут отражаться от потенциала и даже могут возвращаться в окрестность точки локализации начального условия.

В задаче с распространением волн в воде, наоборот, самыми быстрыми будут траектории системы Гамильтона с малыми начальными импульсами, они будут образовывать передний волновой фронт (который является проекцией края лагранжевого многообразия). После прохождения подводной банки образуется каустика и на самом фронте появляются фокальные точки.

Также обсуждаются асимптотические решения указанных задач, когда начальное возмущение имеет направленный импульс и представляется движущимся волновым пакетом в виде гауссовой экспоненты.

Работа выполнена по теме гос. задания АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Yu. Dobrokhотов, V. E. Nazaikinskii, A. A. Tolchennikov*, Uniform Formulas for the Asymptotic Solution of a Linear Pseudodifferential Equation Describing Water Waves Generated by a Localized Source, Russian Journal of Mathematical Physics, 27:2, 2020, 185-191
2. *S. Yu. Dobrokhотов, V. E. Nazaikinskii, A. I. Shafarevich*, Efficient asymptotics of solutions in the Cauchy problem with localized initial data for linear systems of differential and pseudodifferential equations, Uspekhi Mat. Nauk, 76:5(461) (2021), 3-80.

**NUMERICAL MODELLING OF THE COHERENT VORTEX IN A
SPATIALLY RESTRICTED TWO-DIMENSIONAL TURBULENT
FLOW IN A VISCOUS MEDIA.**

A.N.Doludenko¹, S.V.Fortova², I.V.Kolokolov³, V.V.Lebedev³

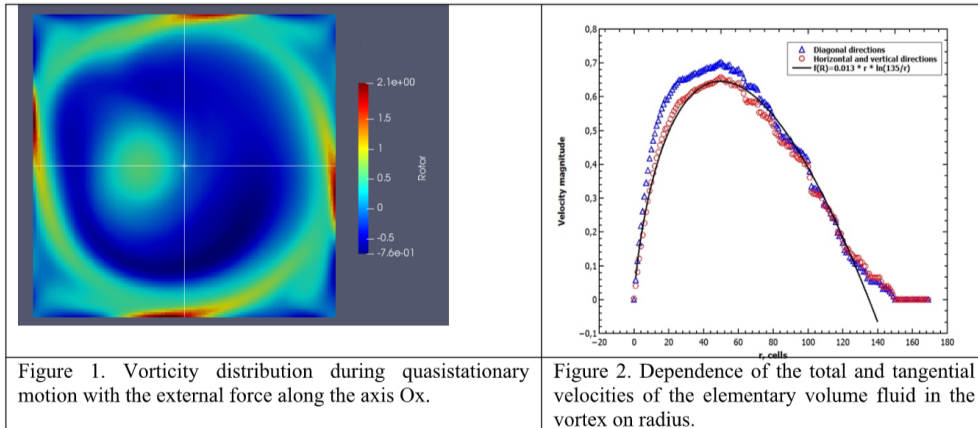
¹ *Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences (JIHT RAS), 13 Bd.2, Izhorskaya st., Moscow 125412, Russia*

² *Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, 19/18 Vtoraya Brestskaya st., Moscow 123056, Russia*

³ *Landau Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences, 1A, Akademika Semenova av., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
sfortova@mail.ru*

Turbulence in liquid and gas is the most common type of flow in the nature. Such the flow is, of course, a three-dimensional phenomenon. However, for example, in the Earth's atmosphere, such three-dimensional flows can be considered as quasi-two-dimensional flows. This can be done quite rightly because of the small height of the troposphere compared to both the dimensions of the formed vortex structures and the distances over which they move.

The main feature of a two-dimensional turbulent flow, constantly excited by an external force, is the appearance of an inverse energy cascade. Due to nonlinear effects, the spatial scale of the vortices, created by the external force, increases until the growth is stopped by the size of the cell. In the latter case, energy is accumulated at these dimensions. Under certain conditions, accumulation leads to the appearance of a system of coherent vortices. The observed vortices are of the order of the box size and, on average, are isotropic. Numerical simulation is an effective way to study such the processes. Of particular interest is the problem of studying the viscous fluid turbulence in a square cell under excitation by a short-wave and long-wave static external forces. Numerical modeling was carried out with a weakly compressible fluid in a two-dimensional square cell with zero boundary conditions. The work shows how the flow characteristics are influenced by the spatial frequency of the external force and the magnitude of the viscosity of the fluid itself. An increase in the spatial frequency of the external force leads to stabilization and laminarization of the flow. At the same time with an increased spatial frequency of the external force, a decrease in viscosity leads to the resumption of the mechanism of energy transfer along the inverse cascade due to a shift in the energy dissipation region to a region of smaller scales compared to the pump scale.



REFERENCES

1. *Kraichnan R.H.* Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Fluids*. 1967. Vol. 10. P. 1417. (1)
2. *Batchelor G.K.* Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence // *Phys. Fluids*. 1969. Vol. 12, № Suppl. II. P. 233. (2)
3. *Kolokolov I.V., Lebedev V.V.* Large-scale flow in two-dimensional turbulence at static pumping // *JETP Lett.* 2017. Vol. 106, № 10. P. 659–661. (3)
4. *Doludenko, A.N., Fortova, S.V., Kolokolov, I.V., Lebedev, V.V.* Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // *Physics of Fluids*. – 2021. – V. 33. – Paper 011704. <https://doi.org/10.1063/5.0038863>.

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА
ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ**

Галкин В.А. ^{*,1,2}, Дубовик А.О. ^{**,1,2}

¹ Сургутский государственный университет, Сургут

² Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут

* *val-gal@yandex.ru*, ** *alldubovik@gmail.com*

Рассматривается система уравнений гидродинамики, дополненная уравнением конвекции-диффузии, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом наличия загрязняющих примесей в ней

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) n = \chi \Delta n. \quad (7)$$

Граничные условия определяются следующим образом

$$\mathbf{u}|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial \mathbf{N}} \right|_{\partial D} = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{N} — вектор нормали к границе области D . Пусть область D имеет периодическую структуру и состоит из кубов длиной 2π . Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \{ \exp(\varepsilon x_3) \sin \lambda x_2; \exp(-\varepsilon x_3) \sin \lambda x_1; 0 \}, \quad (9)$$

$$n|_{t=0} = \{ \exp(-\varepsilon x_3) \cos \lambda x_1 - \exp(-\varepsilon x_3) \cos \lambda x_2 \}, \quad (10)$$

где $\lambda \neq 0$, ε — произвольные параметры. Аналитическое решение задачи (1)–(6) имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \exp((\varepsilon^2 - \lambda^2) \mu t) \{ \exp(\varepsilon x_3) \sin \lambda x_2; \exp(-\varepsilon x_3) \sin \lambda x_1; 0 \}, \\ p &= \exp(2(\varepsilon^2 - \lambda^2) \mu t) \cos(\lambda x_1) \cos(\lambda x_2), \\ n &= \exp((\varepsilon^2 - \lambda^2) \mu t) \{ \exp(-\varepsilon x_3) \cos \lambda x_1 - \exp(-\varepsilon x_3) \cos \lambda x_2 \}, \end{aligned}$$

Работа проводилась при поддержке РФФИ, код проекта 20-07-00236.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galkin V.A., Dubovik A.O.* Visualization of flows of a viscous conductive liquid with the presence of impurities in the flow field corresponding to exact solutions of the MHD equations // Scientific Visualization. 2021. V. 13. N. 1. P. 104 - 123.

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ
РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Ерохин В.И.

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург
erohin_v_i@mail.ru

Рассмотрим интервальную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b, A_c - A_r \leq A \leq A_c + A_r, b_c - b_r \leq b \leq b_c + b_r, \quad (11)$$

где $(A = (a_{ij}), A_c = (a_{ij}^c), A_r = (a_{ij}^r)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $(b = (b_i), b_c = (b_i^c), b_r = (b_i^r)) \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A_r, b_r \geq 0$, $m > n > 1$. Множество *слабых решений* системы (11) – векторов x , для которых существуют соответствующие матрица A и вектор b такие, что тройка (A, x, b) является решением системы (11) – будем обозначать символом \mathbf{X} . Как известно, поиск слабых решений системы (11) с интервальной матрицей коэффициентов или общего вида является *NP*-трудной задачей.

Пусть $\hat{x} = (\hat{x}_j) = A_c^+ b_c$ – нормальное псевдорешение системы $A_c x \cong b_c$, $\Delta b_c = b_c - A_c \hat{x}$ – её невязка с минимальной евклидовой нормой, A_c^+ – соответствующая псевдообратная матрица, и, с точностью до некоторой перестановки строк A_c и элементов b_c , выполняются условия

$$A_c = \begin{bmatrix} A_c^1 \\ A_c^2 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} b_c^1 \\ b_c^2 \end{bmatrix}, A_c^1 \hat{x} < b_c^1, -A_c^2 \hat{x} < -b_c^2.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{A}_c \triangleq \begin{bmatrix} A_c^1 \\ -A_c^2 \end{bmatrix}, \tilde{b}_c \triangleq \begin{bmatrix} b_c^1 \\ -b_c^2 \end{bmatrix}, S \triangleq \text{diag}(\text{sign}(\hat{x})),$$

$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \{x \mid (A_c - A_r S)x \leq b_c + b_r, (-A_c - A_r S)x \leq -b_c + b_r\}$, $\mathbf{1}$ – n -мерный вектор, состоящий из единиц, $\sigma_{\min}^{A_c}$ – минимальное сингулярное число матрицы A_c , $\sigma_{\max}^{A_r}$ – максимальное сингулярное число матрицы A_r , $\|\cdot\|$ обозначает евклидову векторную норму. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия $\text{rank} A_c = n$, $\sigma_{\min}^{A_c} > \sigma_{\max}^{A_r}$, $S \hat{x} > 0$,

$$\min_{j=1, \dots, n} |\hat{x}_j| > \frac{1}{\sigma_{\min}^{A_c} - \sigma_{\max}^{A_r}} \left(\sigma_{\max}^{A_r} \|\hat{x}\| + \frac{\|\Delta b_c\|}{\sigma_{\min}^{A_c}} + \|b_r\| \right), \text{ системы неравенств}$$

$$(\tilde{A}_c - A_r S)x \leq \tilde{b}_c + b_r, \quad (12)$$

$$(\tilde{A}_c + A_r S)x \leq \tilde{b}_c + b_r \quad (13)$$

совместны и существует скаляр $\delta > 0$ такой, что система $Sx \geq \mathbf{1}\delta$ является следствием как (12) так и (13). Тогда 1) Все 2^n систем линейных неравенств

$$(\tilde{A}_c - A_r \tilde{S})x \leq \tilde{b}_c + b_r, \quad (14)$$

где \tilde{S} – диагональная матрица порядка n с элементами ± 1 на диагонали, совместны. 2) Существует скаляр δ такой, что система линейных неравенств $Sx \geq \mathbf{1}\delta$, является следствием любой системы вида (14). 3) Множество \mathbf{X} совпадает с множеством $\tilde{\mathbf{X}}$ и, в случае непустоты, представляет собой выпуклый многогранник, целиком лежащий строго внутри ортанта, определяемого знаками диагональных элементов матрицы S , т.е., $\forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow Sx > 0$. 4) Слабое решение системы (11) может быть получено за полиномиальное время.

A COVID-19 AGENT-BASED MODEL

A.A. Bragin¹, V.V. Vlasov¹, A.M. Deryabin¹, O.V. Zatsepin¹, G.D. Kaminsky²,
E.V. Karamov^{2,3}, A.L. Karmanov¹, S.N. Lebedev¹, G.N. Rykovanov¹, S.I.
Samarin¹, A.V. Sokolov¹, N.A. Solomin¹, N.A. Teplykh¹, A.S. Turgiyev^{2,3}, M.S.
Uraikov¹, K.E. Khatuntsev¹

1. Federal State Unitary Enterprise “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics” (RFNC-VNIITF), Snezhinsk, Russia
2. Russian Federation Ministry of Health’s “National Phthisio-pulmonology and Infection Disease Research Center” (NPIDRC) State Budgetary Institution, Moscow, Russia
3. Russian Federation Ministry of Health’s “Gamaleya National Epidemiology and Microbiology Research Center” (Gamaleya NEMRC) State Budgetary Institution, Moscow, Russia

corresponding author o.v.zatsepin@vniitf.ru

In 2020, RFNC-VNIITF developed a stochastic agent-based model and a modification to the SEIRD differential model which are capable of reproducing viral infection transmission in a megalopolis [1]. Later, in cooperation with experts from Gamaleya NEMRC and NPIDRC, we have come to a model we are presenting in this paper.

Our agent-based megalopolis model includes population and urban environment generation algorithms, and algorithms which describe agent state dynamics and scenarios of agent visits to public accommodation facilities and infection in epidemiologically significant contacts. Population transfer to/from the near regions is taken into account. Agent state dynamics reflex how the disease runs and transmissibility changes, and how immunity acquired after the disease or vaccination forms and degrades. Our model allows for interventions aimed at reducing the negative consequences of the epidemic, and identifies the most significant infection transmission channels for these interventions.

We have simulated the course of COVID-19 in Moscow to predict its parameters. We determined its duration, the presence of a sequence of peaks in the disease rate, and the maximum load to public health service. Our model demonstrated quite good prognostic properties. Calculated results helped analyze different scenarios with respect to the effect of interventions. In particular, we estimated the rate of vaccination at which the epidemic can be inhibited or stopped.

The work was financially supported by Russian Ministry of Science and Education’s Grant No 075-11-2020-011 (13.1902.21.0040)

REFERENCES

1. V.A. Adarchenko, V.A. Baban, A.A. Bragin, K.F. Grebyonkin, O.V. Zatsepin, A.S. Kozlovskikh, V.V. Legonkov, E.N. Lipilina, I.A. Litvinenko, P.A. Loboda, A.A. Ovechkin, G.N. Rykovanov, S.I. Samarin, M.S. Uraikov, A.L. Falkov, and K.E. Khatuntsev, *COVID-19 epidemic simulation with differential and statistical models. Preprint 264, Snezhinsk, RFNC-VNIITF Publishing Office, 2020, 28 pages.*

**TENSOR TRAIN OPTIMIZATION FOR SOLVING THE DISCRETE
SOURCE PROBLEM FOR THE DIFFUSION-LOGISTIC MODEL**

Zvonareva T.A.^{1,*}, Krivorotko O.I.^{1,2}

¹ *Novosibirsk State University, Novosibirsk*

² *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Novosibirsk*

* *t.zvonareva@g.nsu.ru*

The source problem (1) for the diffusion-logistic model (DLM) based on a nonlinear partial differential equation that consists in identification of discrete source $q \in \mathbb{R}^6$ using additional measurements in fixed time points (2) is investigated.

$$\begin{cases} I_t = dI_{xx} + r(t)I(x, t)(1 - I(x, t)K^{-1}), & 1 \leq t \leq 24, \quad 1 \leq x \leq 6, \\ I(x, 1) = Q(x), & 1 \leq x \leq 6, \\ I_x(l, t) = I_x(L, t) = 0, & 1 \leq t \leq 24. \end{cases} \quad (15)$$

$$I(x_i, t_k) = f_{ik}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad k = 1, \dots, 22. \quad (16)$$

Here $I(x, t)$ is the density of influenced users at distance x and time t , where x is the minimum number of friendship hop. The source $Q(x_i) = q_i$, $i = 1, \dots, 6$, and on each segment $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 5$, the function Q is a third degree polynomial $Q_i(x)$, d is the popularity of information, K is the carrying capacity and function $r(t)$ is a growth rate of the number of influenced users placed at the same distance away from the source. DLM (1) describes the information dissemination in online social networks [1].

The source problem (1)-(2) is reduced to the problem of minimizing the squared misfit function $J(q)$ that is reduced to the tensor form as following. At the first step we apply the continuous monotonically decreasing function to $J(q)$. At the second step we split the interval for each parameter $q_i \in (a_i, b_i)$, $i = 1, \dots, 6$, into N segments and compute $J(q_i^j)$, $j = 1, \dots, N$. The associated to the function $J(q)$ tensor has N^6 components.

The minimization problem for $J(q)$ is formulate as a problem of searching the minimal element in considering tensor. The optimization problem is solved by a global method based on the expansion of the large dimension tensor in the tensor train format [2]. The numerical results are demonstrated and analysed.

This work is supported by the Council for Grants of the President of the Russian Federation (project MK-4994.2021.1.1) and Russian Science Foundation (project 18-71-10044).

REFERENCES

1. Wang F., Wang H., Xu K., Wu J., Xia J. Characterizing information diffusion in online social networks with linear diffusive model // 33rd International Conference on Distributed Computing Systems, 2013, Philadelphia, P. 307–316.
2. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33, N. 5. P. 2295-2317.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ГЕОРАДАРНЫХ ДАННЫХ

С.И. Кабанихин^{1,2,3}, К.Т. Исаков^{4,5}, Д.К.Токсеит^{4,6}, М.А. Шишленин^{1,2,3}
¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, г. Новосибирск, Россия ²Новосибирский государственный университет,
Новосибирск ³Математический центр в Академгородке, Новосибирск, Россия
⁴Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г.Нур-Султан,
Казахстан ⁵National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering
Physics Institute) ⁶Карагандинский индустриальный университет, Темуртау,
Казахстан

ksi52@mail.ru, kazizat@mail.ru, tokseit1990@gmail.com, mshishlenin@ngs.ru

В работе рассматривается математическая модель интерпретации радарограмм, полученных георадарами: «Зонд-12е», «Лоза-В». Для качественной интерпретации радарограмм необходимо сопоставлять расчетные данные математической модели с реальными данными, что позволит разработать методику интерпретации радарограмм. Для проведения численных расчетов необходимо иметь табличные значения источника, излучаемого георадаром, следовательно на первом шаге необходимо восстановить источник. В первой части настоящей статьи рассматривается задача восстановления источника $h(t)$ по реальным данным георадара. Для определения явного аналитического выражения импульсной характеристики среды $r(t)$ в однородной среде сводим задачу к системе линейных вольтеровских интегральных уравнений первого рода [1]. Используем уравнение для импульсной характеристики $r(t)$ в однородной среде $f(t) = \int_0^t r(t-\tau)h(\tau)d\tau$, в котором $f(t)$ - реальные данные, полученные в процессе измерения георадаром в точке наблюдения в однородной среде, $h(t)$ – функция источника. Проведены экспериментальные исследования с применением георадара Зонд-12е на лабораторном полигоне, искусственный локализованный объект в виде купола соли был помещен в идеальную слоистую среду – чистый сухой песок. Выбор такой среды позволил провести тестирование математической модели по определению источника по реальным данным георадара и глубины залегания локализованных объектов. Проведен цикл расчетов по проверке соответствия результатов математического моделирования реальным данным георадара. Для случая двумерного источника приведены ранее исследованные экспериментальные исследования с применением георадара Лоза-В на другом лабораторном полигоне. Для полигона выбран песчаный карьер, что соответствует модели среды: воздух; чистый сухой песок; мишени; и подстилающий слой (влажный песок). В качестве объектов выбраны железные листы прямоугольной формы, которые были помещены в песок на известную глубину. Приведен цикл расчетов по проверке соответствия результатов математического моделирования реальным данным георадара. Ключевые слова: обработка радарограммы, восстановление источника, математическое моделирование, результаты расчетов.

Работа К.Т. Исакова и Д.К.Токсеит поддержана грантом МОН РК по договору №132 от 12.03.18г. «Разработка алгоритмов и встроенного программного обеспечения по определению геоэлектрического разреза для геоинформационной технологии GPR» (ИРН AP05133922). Работа Кабанихина М.А.Шишленина

поддержана Математическим центром в Академгородке по соглашению №075-15-2019-167 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blagoveshchenskii AS, Kabanikhin SI.* An inverse problem in the theory of wave-propagation in a nonuniform semi-infinite waveguide. // *Differential equations.* 1983, Vol. 19, No. 4, pp. 439-443.
2. *S.I. Kabanikhin, K. T. Iskakov, B. B. Sholpanbaev, M. A. Shishlenin, D. K. Tokseit.* Development of a mathematical model for signal processing using laboratory data. // *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics.* (2018). Vol. 92, No. 4. Pp. 148–157.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ГРЯЗЕВОГО ВУЛКАНА
МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ПОЛОСЕ**

Казанцев И.Г., Брагинская Л.П., Караваев Д.А., Ковалевский В.В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск*

kg@ooi.sccc.ru, ludmila@opg.sccc.ru, @opg.sccc.ru, kovalevsky@sccc.ru

В работе представлены результаты применения томографических методов для реконструкции структуры грязевого вулкана Карabetова. Нами рассматривается линеаризованная прямая задача, с данными в виде интегралов по лучам, подобно постановкам классической рентгеновской томографии. Геометрия сбора геофизических данных вибропросвечивания вулкана позволяет моделировать прямую задачу восстановления скоростных профилей приповерхностных объемов в виде преобразования Радона в полосе, на одной стороне которой находятся источники, на другой - приемники. Приводится сравнение результатов применения аналитического обращения преобразования Радона, использующего метод конечных характеристических элементов, и итерационного метода Качмажа решения возникающих систем линейных алгебраических уравнений.

Работа проводилась в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2021-0003).

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ УГЛОВЫХ СТРУКТУР НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Казанцев И.Г., Мухаметжанова Б.О., Искаков К.Т.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Евразийский национальный университет им. Л.Н.

Гумилева

kig@ooi.ssc.ru, grek79@mail.ru, kazizat@mail.ru

В работе рассматриваются маски (образцы для сравнений, или эталоны), моделирующие угловые структуры для их обнаружения на трехмерных изображениях при использовании в традиционном методе скользящих окон. Этот метод основывается на согласованной фильтрации и многократных вычислениях свертки маски с текущей окрестностью отдельного элемента массива. Одним из актуальных приложений является проблема распознавания лиц, где метод имеет конкретное применение при поиске доминантных (опорных) точек. Ранее нами были сконструированы масштабируемые маски для выделения угловых конструкций на двумерных изображениях. В этой работе мы показываем обобщение угловых масок на трехмерный случай. Свойство масштабируемости, состоящее в иерархии подматриц, дающей возможность построения матриц большего размера простым повторением самоподобных элементов, удалось распространить на трехмерный случай. Это отличает новые маски от использовавшихся традиционных, для которых элементы маски зависят от размера матрицы. Излагается общий подход конструирования масок для различных телесных углов. Этот подход помогает разрабатывать иерархические вычисления трехмерных данных с целью ускорения. Приводится сравнительный анализ коэффициентов усиления шума традиционных угловых детекторов (Кирш, Робинсон) и новых масок.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2021-0003) и поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05133922).

РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕКСТУРЫ И ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕФЕКТОВ НА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ ТКАНЕЙ

Казанцев И.Г., Туребеков Р.Ж., Султанов М.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан

kig@ooi.sccc.ru, rauan.turebekov@ayu.edu.kz, murat.sultanov@ayu.edu.kz

Рассматривается задача исследования проекций в пространстве Радона в качестве признаков для описания регулярных текстур на цифровых изображениях тканей при их контроле системами технического зрения в текстильной промышленности. Замечено, что регулярные поверхностные текстуры таких материалов, как текстиль, плетения и других, могут быть представлены в виде композиции нескольких ридж функций. При фиксированном числе направлений композиция осуществляется с использованием оптимизационного подхода, в котором глобальным поиском максимума критерия информативности определяются направления и проекции, вносящие наибольший вклад в аппроксимацию текстуры. Дефекты текстур находятся в областях нарушения однородности, которые проявляются в пространстве Радона локально в виде скачков уровней яркости и других пространственных сингулярностей.

В работе обсуждаются принципы восстановления изображений на основе алгоритма оптимальной декомпозиции двумерных регулярных текстур в набор информативных компонент. Эти компоненты служат достаточным описанием текстуры, или признаками, необходимыми в последующей задаче распознавания. Основанием служат алгоритмы реконструкции, использующие метод SVD при обращении проекционных данных Радона. Результаты иллюстрируются.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2021-0003) и поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP 09258836).

**ORTHOGONAL POLYNOMIAL BASIS IN THE SPACE OF VECTOR
FUNCTIONS \mathbf{H}_0^1 AND STOKES SYSTEM IN A BALL**

Kazantsev S.G.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk**kazan@math.nsc.ru*

In the homogeneous Sobolev space of vector functions $\mathbf{H}_0^1(\mathbb{B}^3)$ orthogonal polynomial basis is constructed. Some of this vector functions, in particular, are vector potentials for solenoidal fields from the basis of the space $\mathbf{L}_2(\mathbb{B}^3)$, [1, 2] As the result, the Dirichlet boundary value problem for the stationary Stokes system in a ball is solved, [3]. The solution is presented as a series on the constructed polynomial basis vector functions.

The constructed polynomial vector functions also can be used when solving some problems of vector analysis related with operators ∇ , **div** and **rot**.

The work has been supported by the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (N 0314-2019-0011).

REFERENCES

1. *Derevtsov E. Yu., Kazantsev S.G., Schuster Th.* Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions// J. Inverse and Ill-Posed Probl., 2007, **15**:1, PP. 19–55.
2. *Kazantsev S.G., Kardakov V.B.* Poloidal-toroidal decomposition of solenoidal vector fields in the ball// Sib. Zh. Ind. Mat., **22**:3 (2019), PP. 74–95; J. Appl. Industr. Math., **13**:3 (2019), PP. 480–499.
3. *Temam R.* Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis, North Holland, Amsterdam, 1981.

**СВЁРТОЧНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ И ЗАДАЧИ
ОБНАРУЖЕНИЯ ПОЖАРОВ ПО ДАННЫМ
АЭРОФОТОСЪЕМКИ**

Калиев Д.И., Швец О.Я.

Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева, г.

Усть-Каменогорск

daniyar.kaliyev96@gmail.com, olga.shvets75@gmail.com

Обнаружение пожаров на изображениях с помощью методов цифровой обработки изображений и компьютерного зрения привлекло большое внимание исследователей в последние несколько лет. Однако традиционные алгоритмы используют, как правило, модели на основе динамических признаков определения - является ли кадр активным, или нет. Эти характеристики трудно формализуемы, и они зависят от типа наблюдаемого пожара, что приводит к низкому уровню обнаружения и высокому уровню ложных тревог. Одним из многообещающих методов, используемых в этой области, являются сверточные нейронные сети (СНС). В этой статье предлагается метод, основанный на СНС для мониторинга и обнаружения различных источников дыма и огня при лесных пожарах с помощью аэрофотосъемки. Был собран набор данных, состоящий из изображений, снятых беспилотным летательным аппаратом, содержащих или не содержащих области с огнем и дымом различных размеров, для обучения системы с применением свёрточных нейронных сетей. Показано, что предлагаемая свёрточная нейронная сеть хорошо адаптируется к задачам обнаружения пожара. Предложенный подход протестирован на реальных видеопоследовательностях, и обеспечивает высокие результаты, по сравнению с традиционными методами обнаружения, и показывает, что использование СНС для обнаружения пожаров является перспективным.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Калинин А.В., Тюхтина А.А.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Ниžний Новгород
avk@mm.unn.ru*

Значительное влияние на важнейшие экологические факторы оказывают физические процессы, происходящие в атмосфере Земли. Эти процессы тесно связаны с многочисленными электромагнитными явлениями, обусловленными источниками различной природы, что отражается в концепции глобальной электрической цепи в атмосфере Земли [1].

При моделировании глобальной электрической цепи и других электромагнитных явлений в атмосфере широко используются различные квазистационарные приближения для системы уравнений Максвелла, среди которых можно выделить нерелятивистское электрическое и нерелятивистское магнитное приближения. Их применимость определяется характерными временными и пространственными масштабами и характерными значениями физических величин. В случае неоднородных сред необходимым этапом моделирования является построение иерархии квазистационарных приближений [2]-[4]. В работе изучаются вопросы применимости для описания электромагнитных полей в атмосфере различных квазистационарных приближений в рамках обобщенной квазистационарной модели, предложенной в [2, 3].

Работа поддержана научно-образовательным математическим центром "Математика технологий будущего" (Соглашение № 075-02-2020-1483/1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // *Успехи физических наук.* 2010. Т. 180. № 5, с. 527–534.
2. *Калинин А.В., Тюхтина А.А., Лаврова С.Р.* Неклассические задачи в моделях глобальной электрической цепи // *Марчуковские научные чтения - 2019: Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики"* (Новосибирск, 1-5 июля 2019 г.). Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019, с. 203–209.
3. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // *ЖВМ и МФ.* 2020. Т. 60, № 8, с. 121–134.
4. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science, v.1413.* Springer, 2021, p. 77–92.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЙ: НОВАЯ КОРОНАВИРУСНАЯ ИНФЕКЦИЯ COVID-19

Каминский Г.Д.¹, Чернецова В.В.², Карамов Э.В.^{1,3}, Зацепин О.В.⁴,
Лебедев С.Н.⁴

¹ ФГБУ «Национальный медицинский исследовательский центр
фтизиопульмонологии и инфекционных заболеваний» Минздрава России, г.
Москва, Россия,

² ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», г.
Москва, Россия

³ ФГБУ «Национальный исследовательский центр эпидемиологии и
микробиологии имени Н.Ф. Гамалеи» Минздрава России

⁴ ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский
научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И.
Забабахина», г. Снежинск, Россия
*gregkaminski.gk@gmail.com, chernet@mail.ru, karamov2004@yandex.ru,
o.v.zatsepin@mail.ru, lsn1955@mail.ru*

Рассмотрим нелинейность эпидемического процесса:

$$A = R\alpha XY^p,$$

где A — доля новых случаев (заболеваемость), X — доля лиц, восприимчивых к инфекции; Y — доля инфицированных (пораженность); p — параметр нелинейности, α — интенсивность заражения, R — контактное число инфекции.

В работе использовали следующие параметры для COVID-19: $\alpha = \beta = 0.074$, $k = 0.0055$, $\mu = 0.000137$. Параметры системы определяли на основании сопоставления фактических данных с реальными методом универсального градиентного спуска [1]. Максимальные значения параметра нелинейности (1.09 – 1.18) установлены в городах численностью менее 100 тыс. человек. Контактное число R колебалось от 3.1 до 6.3. Нелинейность обусловлена усилением заразительности на пике эпидемии за счет эффекта кумуляции вирусных частиц в помещениях, а также эффекта рассеивания вирусных частиц и прерывания цепочек заражения на спаде эпидемии. Фактор нелинейности проявляется в более острых пиках при развитии подъемов заболеваемости. Отмечается схожесть с явлением неустойчивости кумуляции академика Е. И. Забабахина [2].

В нелинейной среде для сохранения максимума генофонда паразита в относительно небольших популяциях хозяина необходимы механизмы их персистенции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска: учебное пособие /А. В. Гасников. – М.: МФТИ, 2018. – 291 с. – Изд. 2-е, доп.
2. *Забабахин Е. И.* Явления неограниченной кумуляции / Е. И. Забабахин, И. Е. Забабахин. М.: Наука, 1988. 173 с.

**ON AMBIGUITY OF THE ILL-POSED PROBLEM OF
PRODUCTION WELL INFLOW PROFILING USING DISTRIBUTED
FLUIDS TEMPERATURE LOGGING**

Karakulev A. E.** , Kotlyar L. A.* , Sofronov I. L.*

**Technology Company Schlumberger, LLC*

***Moscow Institute of Physics and Technology*

karakulevs@gmail.com

Continuing the research [1, 2, 3], we modify the residual functional of the considered inverse problem in order to reduce the ambiguity of the solution and apply cluster analysis of the obtained solutions set to form several final interpretations. Using the gradient approach to find the functional's minima and subsequent Bayesian inference for clustering and uncertainty analysis results in a fast and reliable algorithm for predicting inflow zones in a wellbore based on distributed temperature logging data.

REFERENCES

1. *Karakulev A. E., Kotlyar L. A., Sofronov I. L.* On formulation of the problem of estimating reservoir parameters in the near-wellbore zone during production // Abstracts of the 62nd MIPT Scientific Conference, November 2019, Section of Petroleum Engineering. P. 190BТ“191.
2. *Karakulev A. E., Kotlyar L. A., Sofronov I. L.* Solution of the inverse problem of interpreting distributed temperature measurements of the wellbore fluid during production // Abstracts of the 63rd MIPT Scientific Conference, November 2020, Section of Computational Mathematics and Mathematical Modeling. P. 118BТ“120.
3. *Karakulev A. E., Kotlyar L. A., Sofronov I. L.* Interpretation of distributed fluid temperature logging in a producer with gradient optimization and uncertainty analysis // Conference Proceedings, Data Science in Oil and Gas 2021. August 2021. V. 2021, P. 1BТ“6.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ШУМОМ В ДАННЫХ

Карнаев В.М.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
karnaevvm@gmail.com

В рамках плоской теории упругости была рассмотрена задача идентификации формы упругого включения S с регулярной границей Σ в упругом теле D с липшицевой границей. Считается, что часть внешней границы Γ_D закреплена, а на другую часть Γ_N действуют внешние поверхностные силы $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Внутри тела присутствует включение с известным положением центра масс, но форма включения является неизвестной. Тензор напряжения определяется как $\sigma(u) = \mathbb{C}\varepsilon(u)$, где $u \in H^1(D)$ – поле перемещений, а $\varepsilon(u)$ – линейный тензор деформации. Гетерогенность тела проявляется в различных характеристиках материала в разных частях тела, то есть $\mathbb{C} = \mathbb{1}_{D \setminus S} \mathbb{C}_1 + \mathbb{1}_S \mathbb{C}_2$.

Для реконструкции формы дополнительно предполагается, что мы имеем данные g о перемещениях на границе Γ_N . Но эти данные содержат шум, то есть $g = g(x; \omega) \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N))$, где $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ определяет полное вероятностное пространство.

Для решения задачи был рассмотрен функционал Кона-Фогелиуса

$$J(S) = \int_D \sigma(v - w) : \varepsilon(v - w) dx = \int_{\Gamma_N} (f - \sigma(w)n) \cdot (v - g) ds,$$

где v и w являются решениями следующих задач

$$\begin{array}{lll} -\operatorname{div} \sigma(v) = 0 & -\operatorname{div} \sigma(w) = 0 & \text{in } D, \\ v = 0 & w = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(v)n = f & w_S = g & \text{on } \Gamma_N. \end{array}$$

Задача была сформулирована, как задача минимизации функционала, являющимся выпуклой комбинацией математического ожидания и дисперсии функционала J

$$F_{\alpha}(S) = (1 - \alpha)\mathbb{E}[J(S; \omega)] + \alpha\mathbb{V}[J(S; \omega)],$$

где $\alpha \in [0, 1]$ - постоянный параметр.

В ходе работы было доказано существование решения и вычислен градиент функционала F_{α} в рамках теории оптимизации формы, также были продемонстрированы преимущества выбора рассматриваемого целевого функционала. Для численного решения граница включения приближалась конечной суммой Фурье, таким образом искомыми являлись коэффициенты в этой сумме. Задача решалась при различных значениях α , с помощью алгоритма Нестерова с перезапуском, выбор которого был обоснован.

Работа проводилась при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 18-29-10007).

**NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE
ACOUSTIC EQUATION**

Kasenov S.E., Askerbekova J.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

syrym.kasenov@mail.ru

Statement of the continuation problem for the acoustics equation.

Consider the continuation problem in the domain $\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\rho_x}{\rho} u_x \quad (17)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad (18)$$

$$u(0, t) = f(t). \quad (19)$$

Direct and inverse problem

Consider the ill-posed problem (17) – (19) as the inverse to the next direct (well-posed) problem. In the domain $\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ need to define $u(x, t)$ for given $q(x)$ and $\phi(t)$ from relations:

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u \quad (x, t) \in \Delta(L_x) \quad (20)$$

$$u_x(0, t) = \phi(t), \quad t \in (0, 2L_x) \quad (21)$$

$$u(x, x) = q(x), \quad x \in (0, L_x), \quad (22)$$

In the direct problem (20) – (22), it is required to determine $u(x, t)$ for given $q(x)$ and $\phi(t)$. The inverse problem is to determine the function $q(x)$ from relation (20) – (22) using additional information about the solution of the direct problem (20) – (22)

$$u(0, t) = f(t). \quad (23)$$

For the numerical solution of the inverse problem, we use the method of inverse difference schemes. An algorithm for solving the direct problem in the difference equation is constructed. And also a numerical algorithm for the method of inversion of difference schemes. Computational experiments show this method is numerically stable for different noise levels.

REFERENCES

1. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. De Gruyter, Germany, (2012) ISBN 978-3-11-022400-9.
2. *S.E. Kasenov, A. Nurseitova, D.B. Nurseitov* A conditional stability estimate of continuation problem for the Helmholtz equation. AIP Conference Proceedings 1759, 020119 (2016).

**ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ ТИПА
ГАУССА–НЬЮТОНА В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ О
ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Кокурин М.М., Семёнова А.В.

Марийский государственный университет, Йошкар–Ола
kokurin@nextmail.ru

Изучается SEIR–подобная эпидемиологическая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}(t) = (1 - e(t) - i(t) - r_e(t) - r_i(t) - p(t))(a_e e(t) + a_i i(t)) - (\varkappa + \rho)e(t) \\ \dot{i}(t) = \varkappa e(t) - (\beta + \mu)i(t) \\ \dot{r}_e(t) = \rho e(t) \\ \dot{r}_i(t) = \beta i(t) \\ \dot{p}(t) = \mu i(t) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Здесь $e(t)$, $i(t)$, $r_e(t)$, $r_i(t)$, $p(t)$ — относительное количество (по отношению к общей численности популяции в том или ином ареале) соответственно бессимптомных заражённых, больных с симптомами, бессимптомно переболевших, выздоровевших и умерших от болезни в момент времени t . Значения функций $i(t)$, $r_i(t)$, $p(t)$ предполагаются известными в моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ из статистики заражений, выздоровлений и смертности. В то же время, значения функций $e(t)$ и $r_e(t)$ недоступны для непосредственного наблюдения. Чтобы модель (1) можно было использовать для прогнозирования распространения эпидемии при $t > t_N$, необходимо знать ещё значения коэффициентов a_e , a_i , \varkappa , ρ , β , μ и начальные значения ненаблюдаемых величин $e(t_0)$, $r_e(t_0)$. Задача о восстановлении этих неизвестных параметров по данным эпидемиологической статистики может быть представлена в виде операторного уравнения вида $F(x) = f$, где x — вектор, содержащий все неизвестные значения, а f — вектор, содержащий все известные статистические данные. Для решения данного уравнения применяются итеративно регуляризованные методы типа Гаусса–Ньютона [1]. Рассматриваются модификации модели (1), учитывающие непостоянство приобретённого после болезни иммунитета, а также возможную зависимость искомым коэффициентов от времени, обусловленную мутациями инфекционного агента или мерами по сдерживанию эпидемии. Предлагаемый подход к моделированию и прогнозированию распространения эпидемий иллюстрируется на примере эпидемии COVID–19 в различных ареалах.

Работа проводилась при финансовой поддержке РНФ (проект 20–11–20085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012. — 312 с.

**REGULARIZED APPROACH FOR CONSTRUCTING BRICK
STRUCTURE MOLECULAR FORCE FIELD MATRICES OF
SYSTEMS WITH NON-COVALENT INTERACTIONS**

Kuramshina G.M.

Department of Physical Chemistry, Faculty of Chemistry

Lomonosov Moscow State University, 119991, Russia

kuramshi@phys.chem.msu.ru

A force constant matrix F (consisted from second derivatives of the molecular potential with respect to nucleus coordinates in the equilibrium configuration) is one of the most important information about the intramolecular dynamics. This matrix defines infrared and Raman spectra, etc.). Molecular vibrations play an important role in energy transfer processes, chemical reactions, nonradiative transitions.

There are two main strategies for the molecular force field determination. The first way is solving the inverse (vibrational/generalized structural) problem using an experimental data on molecular spectra and electron diffraction which problems belong to the class of nonlinear ill-posed problems [1]. Other way is to carry out the quantum mechanical calculations and obtain the theoretical equilibrium configuration and force constants. Two approaches can be joined in the unique statement of inverse problem based on the joint treatment of experimental and quantum mechanical data for finding the regularized quantum mechanical force field (RQMFF).

We propose the next scheme for the calculations of vibrational spectra of the large size molecules such as polymers, nanostructures, biological systems, etc.:

- 1) preliminary quantum mechanical analysis of moderate size molecules chosen as key or model molecules which are the fragments of large molecular systems;
- 2) solving the inverse scaling problems by the fitting *ab initio* Hessians of separate blocks to experimental data (vibrational spectra) in Cartesian coordinates scaling model;
- 3) synthesis (construction) the Hessian of a large molecular system from separate regularized fragments, calculation of vibrational spectra and thermodynamical functions.

These routines are included in our software packages SPECTRUM [1] and CART [2].

REFERENCES

1. *Yagola A.G., Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Pentin Yu.A* (1999) Inverse problems of vibrational spectroscopy, VSP, The Netherlands, Zeist.
2. *Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Stepanova A.V.* (2009) New approach for the correction of *ab initio* molecular force fields in Cartesian coordinates. Int J Quant Chem 109:28-33.

**INVERSE PROBLEM FOR CRACKED INHOMOGENEOUS
KIRCHHOFF-LOVE PLATE WITH TWO HINGED RIGID
INCLUSIONS**

Lazarev N.P.

North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
nyurgun@ngs.ru

We consider a family of variational problems on the equilibrium of a composite Kirchhoff-Love plate containing two flat rectilinear rigid inclusions, which are connected in a hinged manner. It is assumed that the both inclusions are delaminated from an elastic matrix, thus forming an interfacial crack between the inclusions and the surrounding elastic media. Displacement boundary conditions of an inequality type are set on the crack faces that ensure a mutual nonpenetration of opposite crack faces. The problems of the family depend on a parameter specifying the coordinate of a connection point of the inclusions. For the considered family of problems, we formulate a new inverse problem of finding an unknown coordinates of a hinge joint point. The continuity of solutions of the problems on this parameter is proved. The solvability of this inverse problem has been established. Using a passage to the limit, a qualitative connection between the problems for plates with flat and bulk hinged inclusions is shown [1].

by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the base part of the state task FSRG-2020-0006.

REFERENCES

1. *Lazarev N.P.* Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff–Love plate with two hinged rigid inclusions // *Boundary Value Problems*, 2021, **2021**(1), art. no. 88.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В
ПОРОУПРУГОМ ЛЬДУ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И
ДВИЖЕНИЯ ЛЬДА.**

Токарева М.А., Вирц Р.А., Ларионова В.Н.

Алтайский государственный университет, Барнаул

tma25@mail.ru, virtsrudolf@gmail.com, lazylazo801@gmail.com

Фильтрация воды в пористом ледовом скелете описывается с помощью следующей системы уравнений [1, 2, 3]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\rho_i\vec{v}_i) = I_{wi}, \quad \frac{\partial\phi\rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi\rho_w\vec{v}_w) = I_{iw},$$

$$\phi(\vec{v}_w - \vec{v}_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu(\theta)}(\nabla p_w - \rho_w\vec{g}),$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_i = -\phi\left(\alpha p_e + \beta\frac{dp_e}{dt}\right),$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g} + \operatorname{div}\left[(1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right],$$

$$\left(\rho_w c_w \phi + \rho_i c_i (1-\phi)\right)\frac{\partial\theta}{\partial\vec{x}} + \left(\rho_w c_w \phi\vec{v}_w + \rho_i c_i (1-\phi)\vec{v}_i\right)\nabla\theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla\theta) + \nu\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t}.$$

Здесь плотности фаз постоянные ($\rho_i = \rho_w = \text{const}$), ϕ – пористость среды, ρ_i , ρ_w , \vec{v}_i , \vec{v}_w , p_i , p_w – плотности, скорости и давление льда и воды соответственно, θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, $k(\phi)$ – фазовая проницаемость, $\mu(\theta)$ – динамическая вязкость жидкости, $\eta(\theta)$ – вязкость льда, α , β , λ_1 , λ_2 – константы, характеризующие среду и интенсивность фазового перехода, \vec{g} – вектор ускорения свободного падения, $\rho_{tot} = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i$, $p_{tot} = \phi p_w + (1-\phi)p_i$, $p_e = (1-\phi)(p_i - p_w)$, $\lambda_c = a_c + b_c \rho_{tot}^2$ ($a_c, b_c = \text{const}$), $I_{wi} = -I_{iw}$. Предложен алгоритм численного решения автомодельной задачи.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sibin A. N., Papin A. A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62. – N 1, P. 96–104.
2. Tokareva M.A., Papin A.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow-ice Cover // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021, Vol.14. – N 1, P.47–56.
3. Токарева М.А., Папин А.А.. Краевые задачи для уравнений фильтрации в поропругих средах: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – 141 с.

**«БЫСТРОЕ» РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ЭЛАСТОГРАФИИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА**

Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.

НИЯУ «МИФИ», Москва

asleonov@mephi.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

nefedov@phys.msu.ru, scharov.aleksandr@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru

Эластография – это метод онкологической диагностики, основанный на различных упругих свойствах здоровой и опухолевой ткани. Измеряя смещения биологических тканей при их поверхностном сжатии и находя по смещениям распределение модулей упругости в исследуемой области, можно сделать вывод о наличии там опухолей. Такая диагностика в реальном времени требует разработки адекватной математической модели и «быстрого» метода решения обратной задачи: по смещениям найти модули упругости. В докладе рассматривается модель сечений изучаемой ткани в приближении плоского деформированного состояния линейно-упругого изотропного тела в области $\Omega = (-\infty, \infty) \times [0, h] \subset R_{xy}^2$. На границе $y = 0$ действует поверхностная сила с плотностью F_0 , направленная вертикально вверх, а граница $y = h$ жестко закреплена. Упругие свойства ткани характеризуются модулем Юнга $E(x, y)$ и постоянным коэффициентом Пуассона $\nu = 0.495$. Связь между горизонтальными и вертикальными смещениями ткани и ее модулями упругости определяется известной краевой задачей для системы уравнений в частных производных (см., например, [1]). Прямая задача квазистатической эластографии состоит в нахождении из краевой задачи смещений ткани по заданным модулям упругости. Обратная задача заключается в нахождении распределения модуля Юнга $E(x, y)$ по известным вертикальным смещениям ткани. Решение обратной задачи на персональном компьютере занимает в зависимости от используемых сеток от десятков минут до часов. В докладе предлагается методика, позволяющая решать подобную задачу за миллисекунды на тех же сетках. Методика основана на том, что в прямой краевой задаче имеется малый параметр $\varepsilon = 0.5 - \nu \approx 0.005$, так что ее можно решить аналитически в рамках теории регулярных возмущений. Тогда связь вертикальных смещений и распределения модуля Юнга имеет вид $w(x, y) = F_0(1 + 2\varepsilon)^{-1} \int_h^y E^{-1}(x, \eta) d\eta$. Эта формула использована для приближенного решения прямой и обратной задачи. Приводится сравнение решения прямой задачи с помощью классических методов и метода малого параметра, а также решение модельной обратной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leonov A.S, Sharov A.N, Yagola A.G. A posteriori error estimates for numerical solutions to inverse problems of elastography. // Inv. Probl. Sci. Eng. 2017, V.25, P.114-128.*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО
ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ
СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Логинов К.К., Перцев Н.В., Топчий В.А.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
kloginov85@mail.ru, pertsevnn@mail.ru, topchij@gmail.ru*

В работе рассмотрена стохастическая непрерывно-дискретная модель распространения эпидемии среди населения некоторого региона. В рамках модели население региона представлено в виде пяти когорт индивидуумов: S — восприимчивые к инфекции индивидуумы; U — первично-инфицированные (незаразные) индивидуумы, находящиеся в латентной стадии развития заболевания; I — больные индивидуумы, способные к заражению восприимчивых индивидуумов; V — изолированные больные индивидуумы, находящиеся на лечении; L — переболевшие индивидуумы, сформировавшие иммунитет к инфекции. В модели учитываются внешний приток восприимчивых индивидуумов S , естественная смертность индивидуумов всех когорт, заражение индивидуумов S в результате их контактов с больными индивидуумами I , развитие заболевания у больных индивидуумов I , в результате чего они помещаются на амбулаторное или стационарное лечение (становятся индивидуумами V), а также стадии развития заболевания у индивидуумов когорты U , лечения индивидуумов V и сохранения иммунитета у переболевших индивидуумов L . Продолжительности указанных стадий задаются некоторыми положительными константами, что приводит к необходимости учета предыстории развития когорт индивидуумов, и исключает применение марковских моделей. Непрерывно-дискретный случайный процесс, возникающий при разработке модели, содержит: а) целочисленные случайные переменные, задающие численности индивидуумов различных когорт, б) специальные множества — семейства уникальных типов индивидуумов когорт U , V , L , отражающих моменты поступления индивидуумов в эти когорты и продолжительности пребывания индивидуумов в этих когортах. Применение семейств уникальных типов позволяет описать закон изменения текущего состояния численностей когорт, опираясь на процессы, происходящие с индивидуумами не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени. Таким образом, в модели совмещаются популяционный и индивидуум-ориентированный подходы.

Приведены краткая вероятностная формализация модели и сведения об алгоритме прямого статистического моделирования на основе метода Монте-Карло. С использованием теории ветвящихся случайных процессов получено выражение для коэффициента распространения эпидемии R_0 . Проведены вычислительные эксперименты по изучению вероятности завершения эпидемического процесса в течении конечного промежутка времени для $R_0 \leq 1$ и $R_0 > 1$.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-04-60157.

**ON SOME FEATURES OF THE NUMERICAL SOLVING
OF INVERSE PROBLEMS FOR NONLINEAR EQUATIONS
OF THE REACTION-DIFFUSION-ADVECTION TYPE
WITH DATA ON THE POSITION OF A REACTION FRONT**

Lukyanenko D.V.

*Department of Mathematics, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
lukyanenko@physics.msu.ru*

Some methods for solving inverse problems for nonlinear equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front are considered. Solutions of equations of this type can contain narrow moving fronts that divide the space into two parts: the perturbed part, through which the front has already passed, and the unperturbed part. The front is a region in which the function describing some characteristic of the medium (temperature, density, etc.) change quite sharply from the values of the function describing one state of the medium (for example, perturbed) to the value of the function describing another state. In the case of a small singular parameter at the highest derivative, the width of such a front will be sufficiently small in relation to the dimensions of the entire region. As a consequence, the reaction front can be distinguished experimentally. It was demonstrated that the data on the position of a reaction front can be successfully used as input information when solving inverse problems of the class under consideration. Data of this type are the most natural additional information when solving real applied problems, in which it is possible to experimentally observe the position of the reaction front, the front of a shock wave or combustion, etc. Three main approaches to solving inverse problems of the class under consideration will be considered. The report will present the latest results on this topic.

REFERENCES

1. *Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, V. 99, P. 105824.
2. *Lukyanenko D., Yeleskina T., Prigorniy I., Isaev T., Borzunov A., Shishlenin M.* Inverse problem of recovering the initial condition for a nonlinear equation of the reaction-diffusion-advection type by data given on the position of a reaction front with a time delay // *Mathematics*, 2021, V.9, N. 4, P. 342.
3. *Zakharova S.A., Davydova M.A., Lukyanenko D.V.* Use of asymptotic analysis for solving the inverse problem of source parameters determination of nitrogen oxide emission in the atmosphere // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2020, V. 29, N. 3, P. 365–377.

**ANALYSIS, CONSTRUCTION AND JUSTIFICATION OF
ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF MULTI
PARAMETRIC OPTIMIZATION PROBLEMS BY MACHINE
LEARNING METHODS**

Liu S.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk
1130168245@qq.com*

This work is based on a machine learning approach to financial data, using a first-order algorithm to optimize predictive models for Back-Propagation Neural Networks (BPNN) [1]. Using Deep Belief Networks (DBN) can automatically learn valid information and solve the diagnosis of multiple hidden faults more effectively than Artificial Neural Networks (ANN) shallow learning models [2]. Based on the structural characteristics of the network, the network system is divided into two logical layers and Hierarchical Diagnosis Networks (HDN) are used to solve the problem of hierarchical identification of mechanical systems [3]. Machine learning has also been widely used to solve large-scale optimization problems in signal and image processing.

REFERENCES

1. *Haji S. H., Abdulazeez A. M.* COMPARISON OF OPTIMIZATION TECHNIQUES BASED ON GRADIENT DESCENT ALGORITHM: A REVIEW. 2021, 18(4), p. 2715-2743.
2. *Shao H., Jiang H., Wang F., et al.* Rolling bearing fault diagnosis using adaptive deep belief network with dual-tree complex wavelet packet. ISA transactions, 2017, 69, p. 187-201.
3. *Gan M., Wang C.* Construction of hierarchical diagnosis network based on deep learning and its application in the fault pattern recognition of rolling element bearings. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 72, p. 92-104.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ С УЧЕТОМ
ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ПО МЕТОДАМ ЭФФЕКТИВНЫХ
МОДУЛЕЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Наседкин А.В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
nasedkin@math.sfedu.ru*

В докладе представлен комплекс математических и компьютерных исследований пьезоэлектрических материалов и композитов на различных масштабных уровнях (макро-, микро- и нано-). Описаны модели микро- и наноразмерных материалов с интерфейсными эффектами и технологии решения задач гомогенизации пьезокомпозитов, основанные на методе эффективных модулей, моделировании представительных объемов и использовании метода конечных элементов. Приведены результаты компьютерного моделирования пьезоэлектрических композитов в конечно-элементных пакетах ANSYS и ACELAN-COMPOS и исследований использования пьезокомпозитов в различных пьезоэлектрических устройствах.

Для гомогенизации пьезокомпозитов использовался метод эффективных модулей и конечно-элементные технологии для решения статических задач сравнения в представительных объемах. Рассматривались различные типы пьезоэлектрических композитных материалов: 1) обычные пористые пьезокерамические материалы; 2) пористые пьезоматериалы с наноразмерными порами; 3) пористые пьезоматериалы с порами, покрытыми частицами различных веществ; 4) двухфазные и трехфазные пьезокомпозиты с пьезокерамической матрицей, упругими включениями и порами. Для всех типов пьезокомпозитов предложены математические подходы к определению эффективных свойств для материалов любого класса анизотропии, в том числе с учетом связанных и несвязанных электромеханических поверхностных эффектов.

Были развиты подходы к исследованию композитов, у которых материальные свойства некоторых фаз имеют очень малые или очень большие значения. Задачи гомогенизации для подобных композитов рассматривались как предельные случаи стандартных задач гомогенизации с условиями полного контакта материалов различных фаз на интерфейсных границах.

Для решения задач гомогенизации для всех описанных выше композитов было разработано специализированное программное обеспечение, базирующее на конечно-элементном решении краевых задач в представительных объемах, учитывающих основные особенности внутренней структуры композитов.

Приведены примеры вычисления эффективных модулей для различных типов пьезокомпозитов и дан их анализ в зависимости от выбора моделей, размеров пор или включений и других факторов.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

3D BIOMECHANICAL MODEL REPRODUCES REALISTIC SWIMMING OF FROG TADPOLE

Palyanov A.Yu.

*A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk
palyanov@iis.nsk.su*

Virtual Tadpole (VT) model is an advanced version of the simulation software system, named "Sibernet-VT" (<https://github.com/a-palyanov/sibernet-vt>). The original software "Sibernet" was developed [1] and successfully used for behavioral studying of the *C. elegans* swimming in liquid and crawling over a gel surface [2]. The liquid is simulated using prediction-correction incompressible smoothed particle hydrodynamics (PCISPH) algorithm [3] which was implemented in "Sibernet" using C++ and OpenCL for high-performance parallel GPU computations.

Our new VT model [4] reconstructs detailed physical and anatomical measurements of the young *Xenopus* tadpole. VT body accurately mimics the shapes, sizes and mass distribution of organs like the notochord, muscles and belly of real tadpoles. The VT body is composed of particles interconnected with springs of different rigidities (depending on the type of tissue they represent). Simulated liquid's density and viscosity correspond to water.

We use biologically realistic modelling of tadpole neuronal circuits to generate spiking activities in response to sensory signals [4, 5]. Output of the neuronal model is represented by spikes of motoneurons distributed along the node. These spikes are fed to 3D flexible VT body to innervate muscles and produce body bending. We find that VT model placed into a "water" tank shows realistic swimming with shape and speed of movements similar to swimming of a real tadpole.

REFERENCES

1. Palyanov A., Khayrulin S., Larson S.D. Application of smoothed particle hydrodynamics to modeling mechanisms of biological tissue // *Advances in Engineering Software*. 2016; 98:1-11. doi:10.1016/j.advengsoft.2016.03.002
2. Palyanov A., Khayrulin S., Larson S.D. Three-dimensional simulation of the *C. elegans* body and muscle cells in liquid and gel environments for behavioural analysis // *Phil. Trans. R. Soc. B*. 2018; 373(1758). doi:10.1098/rstb.2017.0376.
3. Solenthaler B. Predictive-corrective incompressible SPH. // *ACM Trans. Graph.*, 2009, 28. doi: 10.1145/1576246.1531346.
4. Ferrario A., Palyanov A., Koutsikou S., Li W., Soffe S., Roberts A., Borisyuk R. From decision to action: Detailed modelling of frog tadpoles reveals neuronal mechanisms of decision-making and reproduces unpredictable swimming movements in response to sensory signals // *PLOS Computational Biology* (accepted for publication 17.11.2021).
5. Roberts A., Borisyuk R., Buhl E., Ferrario A., Koutsikou S., et al. The decision to move: response times, neuronal circuits and sensory memory in a simple vertebrate. // *Proc. Biol. Sci.* 2019; 286(1899):20190297. doi:10.1098/rspb.2019.0297

ADJOINT-ENSEMBLE-BASED ANALYSIS OF THE COEFFICIENT IDENTIFICATION PROBLEMS FOR PRODUCTION-LOSS MODELSPenenko A.V.^{1,2}, Konopleva V.S.^{1,2}, Bobrovskikh A.V.³ and Zubairova U.S.³¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk*² *Novosibirsk State University, Novosibirsk*³ *Institute of Cytology and Genetics SB RAS, Novosibirsk
a.penenko@yandex.ru*

Due to the diversity of the inverse problem statements arising in the course of sophisticated natural systems modeling, it is essential to obtain a tool that allows both solving and estimating the inverse problem solution result before its actual solution. In the work, we consider the problem of finding the kinetic parameters of the chemical reaction system based on the concentration dynamics measurements for the selected set of species. We use an approach, which consists of reducing the inverse problem to a quasi-linear matrix equation with sensitivity operators constructed from an ensemble of independent solutions of adjoint problems [1]. We analyze numerically the efficiency of prediction of the inverse problem solution results based on the sensitivity operator properties, namely on the singular spectrum decrease rate and projector to the orthogonal complement of the sensitivity operator matrix kernel [2]. Parameter identification problems for production-loss models are often solved by various meta-heuristic and gradient-based algorithms. In work, we compare the sensitivity operator-based algorithm results to those obtained by standard implementations of the parameter identification algorithms.

The work has been supported by RFBR 19-07-01135 (inverse coefficient problem with point-wise data), RFBR 20-01-00560 (continuation problem study) and RFBR 19-44-543021 (biological model).

REFERENCES

1. *Penenko A. V., Mukatova Z. S. and Salimova A. B.* Numerical study of the coefficient identification algorithm based on ensembles of adjoint problem solutions for a production-destruction model *International // Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Walter de Gruyter GmbH, 2020, 22, 581-592 doi: 10.1515/ijnsns-2019-0088
2. *A. Penenko, Z. Mukatova, A. Bobrovskikh, U. Zubairova and A. Doroshkov* Sensitivity operator-based analysis of the coefficient identification problem for the basic model of the antioxidant system of a plant cell // submitted, preprint at Research Gate
3. *Penenko, A.; Konopleva, V. and Bobrovskikh, A.* Numerical Comparison of the Adjoint Problem-based and Derivative-free Algorithms on the Coefficient Identification Problem for a Production-Loss Model // 2021, IEEE, 2021 doi: 10.1109/opcs53376.2021.9588680

MEASUREMENT DATA FUSION WITH SENSITIVITY OPERATORS

Penenko A.V.^{1,2}, Penenko V.V.^{1,2}, Tsvetova E.A.¹, Gochakov A.V.^{1,3}, Pyanova E.A.¹ and Konopleva V.S.^{1,2}

¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk*

² *Novosibirsk State University, Novosibirsk*

³ *Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute, Novosibirsk
a.penenko@yandex.ru*

The use of heterogeneous monitoring data makes it possible to improve the accuracy of air quality analysis and forecasting systems. One of the main uncertainties in air quality studies is information about sources of chemical substances (and sinks). Therefore, as the main task of inverse modeling, we consider the source identification problem. An approach with sensitivity operators is applied to identify sources [1]. The ensemble construction of the sensitivity operator provides a natural way to fuse different types of measurement data in a single operator equation [2]. The structure of the equation allows one to analyze the information content of the measurement data [3]. The combined use of image-type, integral-type, contact-type, and time-series-type measurement data is considered. The approach is illustrated in the inverse modeling scenario for the Baikal region.

The work has been supported by the grant №075-15-2020-787 in the form of a subsidy for a Major scientific project from Ministry of Science and Higher Education of Russia (project "Fundamentals, methods and technologies for digital monitoring and forecasting of the environmental situation on the Baikal natural territory").

REFERENCES

1. *Penenko A.* Convergence analysis of the adjoint ensemble method in inverse source problems for advection-diffusion-reaction models with image-type measurements // *Inverse Problems & Imaging*, Vol. 14, 2020. pp. 757–782
2. *Penenko A., Penenko V., Tsvetova E., Gochakov A., Pyanova E., Konopleva V.* Sensitivity Operator-Based Approach to the Interpretation of Heterogeneous Air Quality Monitoring Data // accepted to LNCS.
3. *Penenko A., Penenko V., Tsvetova E., Gochakov A., Pyanova E., Konopleva V.* Sensitivity Operator Framework for Analyzing Heterogeneous Air Quality Monitoring Systems // submitted, preprint: https://www.researchgate.net/publication/356190639_Sensitivity_Operator_Framework_for_Analyzing_Heterogeneous_Air_Quality_Monitoring_Systems

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА
ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Перцев Н.В.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
pertsevnn@mail.ru*

Рассматривается математическая модель распространения эпидемии в некотором регионе. Модель построена на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием, дополненных интегральными уравнениями и начальными данными. Интегральные уравнения учитывают распределения длительностей пребывания индивидуумов в когортах, отражающих различные стадии заболевания. Длительность пребывания индивидуумов в когортах задаются константами или величинами, распределенными на конечных промежутках времени, а также величинами с экспоненциальными распределениями.

Переменные модели: $S(t)$, $U(t)$, $I(t)$, $V(t)$, $L(t)$ — численность восприимчивых к инфекции индивидуумов, первично-инфицированных (не заразных) индивидуумов, находящихся в латентной стадии развития заболевания; больных (не изолированных) индивидуумов, способных к заражению восприимчивых индивидуумов, изолированных больных индивидуумов, находящихся на лечении, и переболевших индивидуумов, сформировавших иммунитет к инфекции.

Один из вариантов модели:

$$\frac{dS(t)}{dt} = r_S - \mu_S S(t) - \beta_{S,I} S(t) I(t) + q_L e^{-(\mu_U \omega_U + \mu_L \omega_L)} \beta_{S,I} S(t - \omega_U - \omega_L) I(t - \omega_U - \omega_L) + e^{-(\mu_V \omega_V + \mu_L \omega_L)} \gamma_I I(t - \omega_V - \omega_L),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = q_I e^{-\mu_U \omega_U} \beta_{S,I} S(t - \omega_U) I(t - \omega_U) - (\mu_I + \gamma_I) I(t), \quad t \geq 0,$$

$$U(t) = \int_{t-\omega_U}^t e^{-\mu_U(t-a)} \beta_{S,I} S(a) I(a) da, \quad V(t) = \int_{t-\omega_V}^t e^{-\mu_V(t-a)} \gamma_I I(a) da,$$

$$L(t) = \int_{t-\omega_L}^t e^{-\mu_L(t-a)} \left(q_L e^{-\mu_U \omega_U} \beta_{S,I} S(a - \omega_U) I(a - \omega_U) + e^{-\mu_V \omega_V} \gamma_I I(a - \omega_V) \right) da,$$

$$S(t) = S_0(t), \quad I(t) = I_0(t), \quad t \in [-\max\{\omega_U + \omega_L, \omega_V + \omega_L\}; 0].$$

Система уравнений модели имеет тривиальное решение, интерпретируемое как отсутствие эпидемии в регионе. Получено выражение для коэффициента распространения эпидемии R_0 . Установлено, что при $R_0 < 1$ тривиальное решение асимптотически (локально) устойчиво по Ляпунову, при $R_0 > 1$ — не устойчиво. Проведена серия вычислительных экспериментов с моделью для случая $R_0 > 1$ и двух вариантов распределения длительности сохранения иммунитета у переболевших индивидуумов. Показано существенное различие и сходство в поведении решений модели за счет вариации параметров указанных распределений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 20-04-60157 и 18-29-10086.

**ЛАЗЕРНАЯ КОНВЕРСИЯ ЭТАН-МЕТАНОВЫХ СМЕСЕЙ В
РЕАКТОРАХ С ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ**

Пескова Е.Е., Снытников В.Н.

*Институт катализа СО РАН, Новосибирск**e.e.peskova@mail.ru*

В задачах экологии и охраны окружающей среды важная роль отведена снижению выбросов углеводородов при их добыче и переработке путем совершенствования технологий. В настоящей работе проведено исследование лазерной конверсии этан-метановых смесей при умеренных температурах среды. Исследуемые течения характеризуются резкими изменениями газодинамических характеристик и концентраций компонент смеси. Их динамика и взаимные превращения описываются жесткой системой из уравнений Навье-Стокса и химической кинетики. Вычислительные эксперименты проводились с использованием разработанного 2D кода для моделирования дозвуковых осесимметричных течений многокомпонентной среды [1]. Для решения уравнений химической кинетики к коду подключен пакет RADAU5 [2], который показал хорошую сходимость в расчетах радикальных цепных реакций пиролиза этана.

Проведены расчеты конверсии этан-метановых смесей в цилиндрической трубе под воздействием внешнего обогрева стенок и смешения потоков углеводородов. Получены картины распределения газодинамических параметров и концентраций продуктов при различных температурах стенок. Проведены вычислительные эксперименты по воздействию лазерного излучения на течение химически активной поглощающей среды. Показано, что за счет поглощения этиленом лазерного излучения происходит значительное повышение температуры среды в центральной области реактора. Повышение температуры способствует увеличению выхода целевых продуктов (этилена и водорода) на меньшей длине реактора, в то время как в отсутствие излучения максимальные концентрации продуктов появляются на значительно больших длинах трубы пиролиза. Полученные результаты указывают на возможность дальнейшего совершенствования процесса лазерного пиролиза углеводородов на малотоннажных установках в целях утилизации парниковых газов в местах их добычи.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (грант № 21-19-00429).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peskova E.E.* Numerical modeling of subsonic axisymmetric reacting gas flows // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 2057, 012071
2. *Hairer and Wanner* Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. 2nd edition. Springer Series in Comput. Math., 1996, vol. 14.

**УЧЕТ МАССОВОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ
МОДЕЛИРОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19**

Петракова В.С., Криворотко О.И.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск
vika-svetlakova@yandex.ru
krivorotko.olya@mail.ru*

Работа посвящена переносу известных экономических моделей «среднего поля» [1] на прогнозирование распространения эпидемий, в частности Covid-19. Идея использования подхода «Игры среднего поля» для моделирования распространения вирусов обусловлена тем, что традиционные эпидемиологические модели, такие как модели SIR-типа [2], не учитывают неоднородность населения, и поэтому не могут использоваться для долгосрочных прогнозов. Другой известный подход к решению такой задачи, так называемые агентные модели [3], позволяют учитывать неэпидемиологические факторы, но приводят к вычислительно сложным системам. В свою очередь, структурная простота моделей «среднего поля» и возможность учета усредненного массового поведения агентов делают такие модели привлекательными для использования их в области эпидемиологии.

В работе представлен численный подход к решению такой задачи, который обеспечивает сохранение общей массы населения на всем временном промежутке. Проведен вычислительный эксперимент по моделированию динамики распространения Covid-19 в г. Новосибирске.

Работа проводилась при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 18-71-10044)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lasry J.-M., Lions P.-L.* Mean field games // Japanese Journal Of Mathematics. V. 2, Issues 1. P. 229–260, 2007.
2. *Brauer F.* Mathematical epidemiology: Past, present, and future // Infectious Disease Modelling. V. 2, Issue 2. P. 113-127, 2017.
3. *Krivorotko O., Sosnovskaia M., Vashchenko I., Kerr C., Lesnic D.* Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: parameter identification algorithm // Infectious Disease Modelling. - 2021 (in print).

APPROXIMATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Piskarev S.I.

Lomonosov Moscow State University, Moscow
piskarev@gmail.com

We have a deal with the well-posedness and approximation of nonhomogeneous fractional differential equations in a Banach space E :

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T]; \quad u(0) = x,$$

where \mathbf{D}_t^α is the Caputo-Dzhrbashyan derivative $0 < \alpha < 1$, the operator A generates analytic C_0 -semigroup, the function $f(\cdot) : [0, T] \rightarrow E$ is smooth enough.

The same way as in [1] – [2] we get the necessary and sufficient condition for the coercive well-posedness of nonhomogeneous fractional Cauchy problems in the spaces $C_0^\beta([0, T]; E)$ with the norm

$$\|u(\cdot)\|_{C_0^\beta([0, T]; E)} = \|u(\cdot)\|_{C([0, T]; E)} + \sup_{0 \leq t < t + \tau \leq T} \frac{t^\beta \|u(t + \tau) - u(t)\|_E}{\tau^\beta}.$$

Then we consider semidiscrete approximation in Banach spaces E_n , which approximate Banach space E . In these spaces E_n we consider the problems

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0, T]; \quad u_n(0) = x_n,$$

and establish Trotter-Kato's theorem. Finally, using implicit difference and explicit difference schemes, we deal with the full discretization of the solutions of nonhomogeneous and semilinear fractional differential equations in time variables and we get the stability of the schemes and the order of convergence.

Also we discuss the full discretization of autonomous semilinear fractional problem

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad t \in [0, T]; \quad u(0) = x.$$

The work has been partially supported by the grant from Russian Science Foundation (RSF) N20-11-20085.

REFERENCES

1. *Liu R., Li Miao, Piskarev S.* The Order of Convergence of Difference Schemes for Fractional Equations// Numerical Functional Analysis and Optimization. 2017. Vol. 38, No. 6, pp. 754–769.
2. *Li Liu, Zhenbin Fan, Gang Li, and Piskarev S.* Maximal Regularity for Fractional Cauchy Equation in Holder Space and its Approximation// Comput. Methods Appl. Math. 2019. Vol. 19, No. 2, pp. 160–178.

IDENTIFICATION OF PARAMETERS AND FORECASTING OF COVID-19 EPIDEMIC IN BULGARIA USING A TIME-DEPENDENT SEIR-BASED MODEL WITH VACCINATION

Popivanov N.P.^{1,2}, Margenov S.D.¹, Ugrinova I.³, Harizanov S.N.¹, Hristov Ts.D.²

¹*Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria*

²*Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kliment Ohridski", Sofia, Bulgaria*

³*Institute of Molecular Biology, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria*
nedyu@parallel.bas.bg, margenov@parallel.bas.bg, ugriviva@gmail.com,
sharizanov@parallel.bas.bg, tsvetan@fmi.uni-sofia.bg

SEIR-based models are the most adopted deterministic models to characterize the COVID-19 dynamics and to predict possible contagion scenarios. In this talk we explore a time-dependent generalized SEIR model with vaccination [1], in which the dynamics of the infection in six groups from a selected population is modeled by a system of nonlinear ordinary differential equations. Besides the classical SEIR model coefficients (infection, incubation and recovery rates) [2], the new model involves COVID-19 mortality rate and some additional vaccination parameters. If the behavior of the coefficients over the time is known it would be possible to assess the effectiveness of various restriction measures or to make some hypotheses for the development of the epidemic.

In [2] we developed a method for parameter identification in the time-dependent SEIR model and suggest strategy for mid-time-term forecasting before the beginning of vaccination campaign in Bulgaria. In [1] we developed a method for identifying the parameters in the modified model with vaccination by solving the so-called "inverse problem" with available COVID-19 data. Then based on these result we find the unknown parameters as a function of time in the Bulgarian case and make computer simulation of the COVID-19 transmission dynamics. The proposed model with vaccination and method for parameters identification can be applied to COVID-19 data in every single country of the world.

The work has been partially supported by Bulgarian NSF under Gran KP-06-H52/4-2021.

REFERENCES

1. Margenov S. D., Popivanov N. I., Ugrinova I., Harizanov S., Hristov Ts. D. Parameters identification and forecasting of COVID-19 transmission dynamics in Bulgaria with mass vaccination strategy // AIP Conference Proceedings, 2021, Melville, NY, USA, P. 16 (in print).
2. Margenov S. D., Popivanov N. I., Ugrinova I., Harizanov S., Hristov Ts. D. Mathematical and computer modeling of COVID-19 transmission dynamics in Bulgaria by time-depended inverse SEIR model // AIP Conference Proceedings, 2021, Melville, NY, USA, Vol. 2333, Art. Number 090024, P. 15, <https://doi.org/10.1063/5.0041868>, <https://arxiv.org/abs/2008.10360>.

ЦИФРОВОЙ ДВОЙНИК ОБЬ-ИРТЫШСКОГО БАССЕЙНА – КОНЦЕПЦИЯ И ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА

Потапов В.П.^{1,*}, Бычков И.В.^{2,**}

¹ *Федеральный исследовательский центр информационных и
вычислительных технологий, Новосибирск*

** vadiptpv@gmail.com*

² *Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*

*** bychkov@icc.ru*

При создании цифровых двойников, наиболее популярной является классификация, включающая три их типа : цифровые двойники-прототипы (Digital Twin Prototype, DTP), цифровые двойники-экземпляры (Digital Twin Instance, DTI) и агрегированные двойники (Digital Twin Aggregate, DTA). В настоящей работе, нами рассматривается технология разработки агрегированного цифрового двойника DTA типа, применительно к созданию комплексной цифровой системы управления одним из самых больших речных бассейнов страны и мира -Обь-Иртышскому бассейну. Нами разработана общая концепция создания фабрики данных, как базового элемента системы сбора, хранения и обработки информации на основе технологии ETL (extract, transform, load – извлечение, преобразование, загрузка моделей), являющейся фактически цифровой тенью исследуемого объекта. Сформулированы общие принципы формирования мультимодальных цифровых потоков для фабрики, которые включают в себя следующие источники информации:

- Мультиспектральные снимки среднего и высокого разрешения, радарные снимки среднего разрешения, данные аэрофотосъемки, (получаемые дронами);
- Цифровые потоки данных, получаемые от станций с интеллектуальными датчиками, характеризующими состояние водной среды по 4-5 параметрам в режиме реального времени;
- Данные получаемые из других источников (экспедиции, журналы наблюдений), ретроспективные данные аэрокосмического зондирования дистанционного зондирования.

Все потоки данных, в зависимости от их природы, за счет оркестрации, поступают на конвейеры, соответствующего типа, где контейнеризуются в целях последующей обработки (фильтрация, нормализация, восстановление пропущенных значений). После этого , конвейеры передают стандартизованную информацию для соответствующих баз, интегрируемых в хранилище данных для их дальнейшего использования расчетными моделями и динамической визуализации интегральных показателей с помощью витрин данных. Эти данные затем, могут быть использованы как шаблон проектирования, в контейнерах, соответствующей базы, и создания прогнозной модели на основе нейронной сети глубокого обучения, для которой создан программный комплекс, который впоследствии будет использоваться при реализации проекта.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГЛУБИННОГО ОБУЧЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Приходько А.Ю. Шишленин М.А. Новиков Н.С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск*

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
a.prikhodko@q.nsu.ru*

Цель работы: разработка методов и алгоритмов раннего выявления различных опухолевых тканей человека с помощью нейронных сетей. Акустическая томография абсолютно безвредна для человеческого организма, что позволяет проводить ее регулярно.

Для решения задачи акустической томографии, а именно, для определения акустических параметров среды по измерениям датчиков хорошо разработан аппарат решения обратных задач. Но этот подход требует огромного количества ресурсов для многократного решения прямых задач акустики. Не всегда есть возможность в каждую клинику поставить суперкомпьютер, или мощную вычислительную машину.

В работе исследован альтернативный подход к решению задачи восстановления акустических параметров среды с помощью нейросетевых методов.

Особенность задачи состоит в необходимости по нескольким одномерным измерениям датчиков вычислить двумерную функцию (плотность среды, скорость звука в среде).

За основу нейросетевой модели выбрана архитектура автоэнкодера. Где с помощью энкодера измерения датчиков переводятся в латентное пространство. Затем с помощью сверточного декодера вычисляются искомые параметры среды. Рассмотрены полносвязный, 1D сверточный и рекуррентные энкодеры. Проведено сравнение различных архитектур для решения восстановления параметров среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klyuchinskiy D., Novikov N., Shishlenin M. (2021) Recovering Density and Speed of Sound Coefficients in the 2D Hyperbolic System of Acoustic Equations of the First Order by a Finite Number of Observations. *Mathematics*. 9, 199.
2. Ng A. et al. Sparse autoencoder // CS294A Lecture notes. – 2011. – Т. 72. – №. 2011. – С. 1-19.

**РАСЧЕТ ДИНАМИКИ СРЕД ГАЗ-МОНОДИСПЕРСНАЯ ПЫЛЬ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ
ЧАСТИЦ**

Савватеева Т.А.^{1,2}, Демидова Т.В.³, Аношин С.А.¹, Стояновская О.П.^{1,2}

¹*Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

²*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, Новосибирск*

³*Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный*

ta-savvateeva@ya.ru

Смеси из газа и твердых частиц, в которых газ является несущей фазой, а частицы - дисперсной, могут моделироваться как взаимопроникающие сплошные среды. Характеристическим параметром таких задач является время релаксации скоростей газа и частиц. В ряде задач это время оказывается меньше времени протекания основных физических процессов, в результате чего задача становится жесткой. Это означает, что по сравнению с расчётом динамики газа, для которой временной шаг определяется условием Куранта, расчёт газопылевой среды явными методами потребует шага по времени меньшего, чем время релаксации скоростей. Более эффективными для таких задач являются неявные методы, однако при их использовании необходимо дополнительно следить за сохранением асимптотики решения.

В работе предлагается полунявный метод расчета динамики монодисперсных газопылевых сред, основанный на гидродинамике сглаженных частиц [1]. Асимптотические свойства и экономичность разработанного метода достигаются за счет введения эйлеровой сетки и неявного расчета межфазного взаимодействия с ее помощью. Общее давление среды аппроксимируется явно без использования сетки. Работоспособность предложенного метода продемонстрирована на ряде задач для газопылевой среды с аналитическим решением - одномерной задаче о распространении акустических колебаний, одномерной задаче о распаде произвольного разрыва, а также на трехмерной задаче о разлете шара из газа и пыли в вакуум.

Работа проведена за счет средств гранта РФФИ №19-71-10026.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoyanovskaya O.P., Glushko T.A., Snytnikov N.V., Snytnikov V.N. Two-Fluid Dusty Gas in Smoothed Particle Hydrodynamics: Fast and Implicit Algorithm for Stiff Linear Drag. // Astronomy and Computing, 25:25-37 (2018)*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Савченко Н.А. Шишленин М.А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО
РАН, Новосибирск
n.savchenko@g.nsu.ru*

Медицинская ультразвуковая томография - это область, предполагающая развитие методов томографирования и их приложение к медицинской диагностике, привлекает все больше внимания. Стоит проблема выявления патологически измененного участка органа человека на самой ранней стадии развития болезни, когда лечение является еще сравнительно легким и эффективным. Диагностика с помощью ультразвука, согласно современным стандартам, безвредна, а акустические медицинские приборы намного дешевле ЯМР-томографов.

Математическая модель моделирования акустических волн (прямая задача) описывается системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Формулировка обратной задачи как задачи управления, позволяет подобрать правую часть получения необходимой диаграммы направленности. В работе предложены два метода выбора правой части на основе решения обратной задачи с дополнительным измерением давления. Для решения обратной задачи применяется градиентный метод, а для решения сопряженной и прямой задачи применяется численный метод Годунова.

Данные модели и методы позволяют описывать процессы, близкие к ситуации на практике, что позволяет оптимально моделировать диаграмму направленности. И в результате получать давление близкое к интересующему. Что приведет к более точным исследованиям, с помощью акустической томографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klyuchinskiy D., Novikov N., Shishlenin M. (2021) Recovering Density and Speed of Sound Coefficients in the 2D Hyperbolic System of Acoustic Equations of the First Order by a Finite Number of Observations. *Mathematics*. 9, 199.
2. Kabanikhin, S.I.; Klyuchinskiy, D.V.; Novikov, N.S.; Shishlenin, M.A. On the problem of modeling the acoustic radiation pattern of source for the 2D first-order system of hyperbolic equations. In *Journal of Physics: Conference Series*; IOP Publishing: Bristol, UK, 2021; Volume 1715, p. 012038.
3. van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*

ПАРАДОКСАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ СРЕДЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Сенницкий В. Л.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
sennitskii@yandex.ru*

На протяжении ряда лет успешно ведутся исследования динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях (см. [1–5] и представленную там литературу). В настоящей работе поставлена и решена новая задача о течении в поле силы тяжести вязкой жидкости, подвергающейся периодическим по времени воздействиям, характеризующимся отсутствием выделенного направления в пространстве. Имеются вертикальные твердые стенки Ξ_A , Ξ_S . Граница стенки Ξ_S проницаема для жидкости. Стенка Ξ_A совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль горизонтальной оси X и вертикальной оси Y , стенка Ξ_S – вдоль вертикальной оси Y инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z . Стенка Ξ_A ограничена плоскостью $X = A$, стенка Ξ_S – плоскостью $X = S$ ($S > A$ – постоянная). Промежуток между стенками – область Ω : $A < X < S$, $-\infty < Y < \infty$, $-\infty < Z < \infty$ – заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Требуется определить периодическое по времени движение жидкости. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердых границах жидкости.

Выявлены новые гидромеханические эффекты многообразно проявляющегося парадоксального поведения жидкости. Установлено, в частности, что жидкость (на фоне колебаний) может совершать стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения (то есть «снизу вверх»). Обнаружен эффект «левитации» жидкости, состоящий в том, что находящаяся в поле силы тяжести жидкость (без какой-либо опоры, на фоне колебаний) пребывает в состоянии покоя.

Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [3]). Необходимо отметить, что принцип среднего движения может быть обобщен следующим образом. основополагающей причиной среднего по времени движения свободных частей гидромеханической системы (частей системы, движение которых не задано) при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях на систему, не имеющих выделенного направления в пространстве, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях.

Результаты исследований в представленном направлении могут использоваться при проведении математического моделирования нетривиальной динамики гидромеханических систем, в поиске новых перспективных подходов к решению проблемы очистки жидких сред от включений, применяться при разработке методов управления системами, содержащими жидкие среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сенницкий В.Л.* О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1985. № 5. С. 19–23.
2. *Сенницкий В.Л.* Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
3. *Сенницкий В.Л.* Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8, ч. 1. С. 28–33; DOI: 10.17513/mjrfi.11753.
4. *Sennitskii V.L.* On the flow of a viscous liquid in a gravity field // Thermophysics and Aeromechanics, 2021, Vol. 28, No. 3. P. 347–351. DOI 10.1134/S0869864321030057
5. *Сенницкий В.Л.* Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 2. С. 126–133. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.201.

**RECONSTRUCTION FROM PHASELESS FOURIER TRANSFORM
WITH BACKGROUND INFORMATION**

Sivkin V.N.

*Moscow State University, Moscow**Ecole Polytechnique, Paris**sivkin96@yandex.ru*

We consider the problem of reconstruction of a function v from phaseless Fourier transform using background information. In particular, in dimension $d \geq 1$, we show that the phaseless Fourier transform $|\mathcal{F}(v+w)|^2$ and background function w uniquely determine unknown function v , under the condition that $\text{supp } v$ and $\text{supp } w$ are sufficiently disjoint. If this condition is relaxed, then we give similar formulas for finding v from $|\mathcal{F}v|^2$, $|\mathcal{F}(v+w)|^2$. We also illustrate these results by numerical examples in the framework of phaseless inverse scattering in the Born approximation. This talk is based, in particular, on the works [1], [2].

REFERENCES

1. *Novikov R.G., Sivkin V.N.*, Phaseless inverse scattering with background information // Inverse Problems, 2021.
2. *Hohage T., Novikov R.G., Sivkin V.N.*, in preparation.

**ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ ГАЗОПЫЛЕВОГО ШАРА В ВАКУУМ КАК
ТЕСТ ДЛЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ
ДВУХФАЗНЫХ СРЕД**

Стояновская О.П.^{1,2}, Сусленкова А.Н.¹, Григорьев В.В.^{2,3}

¹*Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

²*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

³*Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный
a.suslenkova@g.nsu.ru*

В вычислительной механике многофазных дисперсных сред существует проблема расчета межфазного взаимодействия. Ее суть состоит в том, что моделирование динамики смеси несущего газа и дисперсных частиц с интенсивным межфазным взаимодействием требует существенно больших вычислительных затрат, чем моделирование динамики чистого газа или смеси с умеренным межфазным взаимодействием. Для решения этой проблемы ведется поиск численных методов, которые обеспечат приемлемые вычислительные затраты, точность и устойчивость решений при расчете межфазного обмена любой интенсивности. Для исследования точности, дисперсионных и диссипативных свойств численных методов необходимы эталонные решения тестовых задач динамики смеси с произвольной интенсивностью межфазного взаимодействия. Такие решения известны для плоских или одномерных задач с линейными волнами. В работе впервые представлено аналитическое решение нелинейной задачи о сферически-симметричном разлете газопылевого шара в вакуум. В этой задаче динамика несущей и дисперсной фазы моделируется уравнениями невязкого сжимаемого газа. Твердые частицы не имеют собственного давления и являются монодисперсными. Несущая и дисперсная фазы обмениваются импульсами. В построенном решении скорость газа и пылевого облака линейно зависит от радиуса, а плотности газа и пылевого облака являются однородными.

При сделанных предположениях рассматриваемая система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к нелинейной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая не имеет аналитического представления решения в общем случае. Для нахождения численного решения система второго порядка преобразуется к эквивалентной системе четырех обыкновенных уравнений первого порядка, которая решается явным методом Эйлера. Для простоты использования опубликован генератор эталонного решения, реализованный в среде Scilab.

Показана воспроизводимость этого решения в численных расчетах методом SPH-IDIC, реализованного с использованием библиотеки OPENFPM. Продемонстрирована возможность использования решения как эталона при верификации CFD-моделей и исследовании свойств численных методов.

Работа проведена за счет средств гранта РФФИ 19-71-10026.

О ВЯЗКИХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Терсенов А.С.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
aterseno@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрена первая краевая задача для уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = g(t, x, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega_T, \quad (24)$$

где Ω – ограниченная область. Интерес к исследованию этих уравнений обусловлен большим количеством приложений в различных областях механики. Они возникают при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных, так и псевдопластичных, в моделях нелинейной упругости, в обработке сигналов и изображений, при описании течений жидкости в пористых средах.

Для решений уравнения (24) вопрос о C^1 -регулярности по пространственным переменным на сегодняшний день является открытым. В работе V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini (2013) для уравнения (24), в случае $g \equiv 0$ и постоянных показателей анизотропности, была доказана липшицевость по пространственным переменным соболевских решений при условии $2 \leq \min_i p_i \leq \max_i p_i < \min_i p_i + \frac{4}{n+2}$. Это максимальная регулярность решений (24), известная на сегодняшний день. Нашей целью было найти условия, гарантирующие существование и единственность решений указанной гладкости для (24) в случае, когда показатели анизотропности зависят от времени, а g нелинейна по градиенту.

Для получения решения высокой гладкости мы использовали аппроксимацию решения уравнения (24) последовательностью классических решений регуляризованных уравнений. Задача предельного перехода в классе соболевских решений осложнялась наличием нелинейного градиентного члена. Эта проблема была решена с помощью теории вязких по Лионсу решений.

В выпуклых областях были доказаны существование и единственность непрерывных по Липшицу по пространственным переменным вязких решений первой краевой задачи для (24) без ограничения бернштейновского типа на нелинейность градиенту. В невыпуклых областях, удовлетворяющих условию внешней сферы, были получены аналогичные результаты в случае, когда g по градиенту удовлетворяет условию Бернштейна, а показатели анизотропности связаны соотношением $\max_i p_i(t) \leq 2 \min_i p_i(t)$, для каждого фиксированного $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // *J. Math. Anal. Appl.* (2019), V. 480 (1), Art. 123386., pp. 18.
2. *Терсенов Ар. С.* Разрешимость задачи Дирихле для анизотропных параболических уравнений в невыпуклых областях // *Сиб. журнал инд. матем.*, (2022), Т. 25 (1), с. 1–13

**АНАЛИТИКО–ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД РАСЧЕТА ДЛИННЫХ
ВОЛН В ОКЕАНЕ, ОСНОВАННЫЙ НА ВАРИАЦИОННОМ
ПРИНЦИПЕ.**

С.А. Бейзель¹, С.Ю. Доброхотов², В.Е. Назайкинский²,
И.А. Носиков³, А.А.Толченников²

¹ *Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва*

³ *Калининградский филиал института земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, г. Калининград
tolchennikovaa@gmail.com*

На примере японского цунами 2011 года, используя простой источник и модель мелкой воды, проведено моделирование мареограммы дальней станции DART при помощи асимптотических формул [1], основанных на применении канонического оператора Маслова (обобщающего лучевой метод). При этом на начальном этапе производится сглаживание батиметрии [2] для того, чтобы исключить влияние мелкомасштабных колебаний на асимптотическое решение. Расчет лучей с заданными граничными условиями, пришедших в станцию DART производится двумя способами: традиционным методом пристрелки (решая систему Гамильтона) и новым вариационным методом [3]. Полученные асимптотические мареограммы сравниваются с результатами численных расчетов.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФ 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dobrokhotov S. Yu., Tirozzi B., Tolchennikov A. A., Asymptotics of Shallow Water Equations on the Sphere // Russian Journal of Mathematical Physics, 21, No. 4, 430–449 (2014).*
2. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B., On a homogenization method for differential operators with oscillating coefficients // Doklady Mathematics, 91, No. 2, 227–231 (2015).*
3. *Dobrokhotov S. Yu., Klimenko M. V., Nosikov I. A., Tolchennikov A. A., Variational Method for Computing Ray Trajectories and Fronts of Tsunami Waves Generated by a Localized Source // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 60, No. 8, 1392–1401 (2020).*

ЗАДАЧА ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННАЯ С ВЫБОРОМ НАЧАЛЬНОГО СОСТАВА РЕАГИРУЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

Хамисов О.В., Шаманский В.А., Козлова М.А.

Институт систем энергетики им.Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
khamisov@isem.irk.ru

Прямая задача определения равновесного состояния реагирующих веществ в газовой среде при постоянной температуре и постоянном давлении имеет следующий вид [1]

$$f(x) \rightarrow \min, Ax = b, \quad (25)$$

где f — некоторая термодинамическая функция, минимум которой характеризует искомое равновесное состояние (например, функция Гиббса), $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор количеств молей реагирующих веществ, A — $m \times n$ — матрица содержания элементов в веществах, b — вектор количеств молей элементов.

Известно [1], что задача (25) есть задача выпуклого программирования, имеющая при заданных параметрах A и b единственное решение x^{eq} . Вектор b определяется начальным составом x^0 , $b = Ax^0$.

Заданы индексные множества $J_N \subset \{1, 2, \dots, n\}$ — номера вредных веществ и $J_P \subset \{1, 2, \dots, n\}$ — номера полезных веществ. Суммарный вред определяется величиной $\sum_{j \in J_N} \alpha_j x_j^{eq}$, суммарная польза — величиной $\sum_{j \in J_P} \beta_j x_j^{eq}$.

Начальный состав можно выбирать из некоторого множества X^0 , заданы максимально возможный суммарный показатель выхода вредных веществ ν и минимально возможный показатель выхода полезных веществ η . Решаемая обратная задача состоит в следующем. Требуется найти такой начальный состав $\hat{x}^0 \in X^0$, что соответствующее решение \hat{x}^{eq} задачи (25) при $b = A\hat{x}^0$ удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{j \in J_N} \alpha_j \hat{x}_j^{eq} \leq \nu, \quad \sum_{j \in J_P} \beta_j \hat{x}_j^{eq} \geq \eta. \quad (26)$$

Для решения поставленной задачи используется методология нелинейных опорных функций, предложенная в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каганович Б.М., Кейко А.В., Шаманский В.А., Ширкалин И.А., Зароднюк М.С. Технология термодинамического моделирования. Редукция моделей движения к моделям покоя. — Новосибирск: Наука, 2010. — 236 с.
2. Khamisov O.V. Approximation of parametrically given polyhedral sets // CEUR Workshop Proceedings, 2020, 2642

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД (СДС)

Худак Ю.И., Парфенов Д.В.

МИРЭА Российский технологический университет, Москва

hudak@mirea.ru, parfenov@mirea.ru

Проблема синтеза слоистых оптических фильтров [1] мало разработана и значительная часть её "нужд" может быть "разрешена" углубленным исследованием прямой задачи о строении всех плоских электромагнитных полей в СДС [2].

В докладе введены электродинамические параметры СДС $\vec{\theta} \stackrel{def}{=} (\theta_1, \dots, \theta_{N+1})$, где θ_j отношение адмитансов $p_j \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}}$ материалов справа и слева от плоскости раздела сред, а $\vec{\nu} \stackrel{def}{=} (\nu_1, \dots, \nu_N)$, где ν_j электрическая толщина j -го слоя: $\nu_j \stackrel{def}{=} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} h_j$, исходя из доказанной ранее теоремы единственности определения именно этих параметров по амплитудному коэффициенту отражения от СДС.

Получены более совершенные, чем в [2] формулы, показывающие, что все спектральные характеристики СДС - почти-периодические функции частоты. Энергетический коэффициент отражения $\mathbf{R}(\omega; \vec{\theta}, \vec{\nu})$ в экспоненциальном представлении является отношением квадратов модулей двух тригонометрических полиномов "степеней" 2^N , показатели Фурье которых зависят от $\vec{\nu}$, а коэффициенты - от $\vec{\theta}$. В тригонометрическом представлении $\mathbf{R}(\omega; \vec{\theta}, \vec{\nu})$ - та же специфика. Впервые получены формулы, выражающие коэффициенты $\vec{\alpha}$ t -представления через $\vec{\theta}$. Они в сочетании с возможностью вырождения N -слойной СДС в СДС с меньшим числом слоев, вскрыли структуру пространства \mathfrak{P} всех адмитансов $\{\vec{p}\}$ N -слойных СДС (N -СДС): всевозможные упорядочения квадратов коэффициентов $\vec{\alpha}$ разбивают \mathfrak{P} на непересекающиеся классы параметров СДС. Выяснен смысл двух "метрических" функций от α_I^2 - их среднее значение, норма полинома числителя (знаменателя) в среднем квадратичном, а $\max \alpha_I^2$ - квазичebyшевская норма, точная оценка максимума квадрата модуля по частоте.

Задача синтеза оптимального фильтра состоит в нахождении \vec{p}^* , $\vec{\nu}^*$, дающих минимум максимума отклонения $\mathbf{R}(\omega; \vec{\theta}, \vec{\nu})$ от заданного идеала $\bar{\mathbf{R}}(\omega)$ на интервале частот $[\Omega_1, \Omega_2]$: $\max_{[\Omega_1, \Omega_2]} |\mathbf{R}(\omega; \vec{\theta}, \vec{\nu}) - \bar{\mathbf{R}}(\omega)| \xrightarrow{\vec{p}, \vec{\nu}} \min$, при ограничениях: $\vec{p} \in \mathcal{K}$, где \mathcal{K} - куб допустимых адмитансов. Показано, что задача минимизации дроби эквивалентна такой же задаче для числителя (знаменателя), а в \mathcal{K} есть точка \vec{p}_* , при значениях параметров которой N -СДС полностью вырождена и через \vec{p}_* проходит большое количество "границ" классов N -СДС, что может служить причиной неустойчивости при численном счете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Худак Ю.И., Парфенов Д.В.* Обоснование использования профилирующих функций для эффективной постановки задач синтеза слоистых диэлектрических фильтров. // Радиотехника и электроника, 2021, т.66, № 9, с.845-852.
2. *Кард П.Г.* Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. // Издательство Валгус, 1971, Таллин.

**ОТЫСКАНИЕ УПРУГОГО
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
УЧАСТКА ГРАНИЦЫ ВЫРАБОТКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ
В ПЕРВОНАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ ПОРОД ПО
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ**

Чанышев А.И.^{1,2}, Абдулин И.М.¹, Белоусова О.Е.¹

¹ *Институт горного дела СО РАН, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Новосибирск*

a.i.chanyshhev@gmail.com

Рассматриваются выработки произвольной формы, включая цилиндрические поверхности, в массиве горных пород с неизвестной структурой и переопределенными данными на участке границы. Требуется найти напряженно-деформированное состояние этого участка границы и структуру массива пород вблизи участка по данным измерений смещений и вектора напряжений Коши на нем. Приводится явное аналитическое решение этой задачи с выражением всех компонент тензора деформации, напряжения и вектора поворота через дифференциальные свойства границы и заданные значения указанных величин. Вариант цилиндрической поверхности исследуется без применения условий плоской деформации. При этом решается система, составленная из уравнений равновесия, условий совместности деформации на границе, соотношений закона Гука. Обсуждаются вопросы о продолжении полученного решения внутрь массива пород с целью отыскания его состояния и дефектности. Решается также вопрос об определении упругопластического состояния границы выработки (при его наличии).

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ И СТРУКТУРЫ ПЕРВОНАЧАЛЬНО
АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПО
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ НА ПОВЕРХНОСТИ**

Чанышев А.И.^{1,2}, Ефименко Л.Л.², Фролова И.В.²

¹ *Институт горного дела СО РАН, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Новосибирск*

a.i.chanyshev@gmail.com

Рассматривается плоское деформированное состояние первоначально анизотропных сред с 6-ю произвольными в упругости модулями податливости. Рассматривается массив пород в виде полуплоскости с заданными на границе напряжениями $\sigma_y = \sigma_y(x)$ и $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x)$. Кроме того предполагаются заданными смещения $u_y = u_y(x)$, $u_x = u_x(x)$ как функции границы. При этих данных с применением потенциалов С.Г. Лехницкого строится точное решение задачи теории упругости об определении напряженно-деформированного состояния и компонент вектора поворота как на границе полуплоскости, так и внутри. Приводится также конечно-разностное решение этой задачи.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7).

**MATHEMATICAL MODELING OF THE STATE OF CONSUMER
LOANS IN RUSSIA**

Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V.

*Lomonosov Moscow State University, Moscow; Federal Research Center "Computer Science and Control Russian Academy of Sciences, Moscow; Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow**alexshan@yandex.ru, tarasenko.m12@gmail.com, trunick.10.96@gmail.com*

The analysis of a representative household models of the Ramsey type is based on the study of the optimal control problem and the construction of a control synthesis [1]. The problem of the optimal control has been investigated, which simulates the economic behavior of a representative household. A theorem on the existence of a solution has been proved, necessary optimality conditions have been obtained in the form of the Pontryagin-Clarke maximum principle, and an optimal control synthesis has been constructed.

In condition when the major economic changes in the behavior of a representative household are taking place, it is necessary to study the households in this group in detail. The models describing the evolution of the distribution of households by income and financial positions are relevant for the analysis of strategies for managing the arrears in consumer loans. In the work [2] based on the concept of mean field games, a model has been constructed and formalized in the form of a system of Hamilton-Jacobi-Bellman and Kolmogorov-Fokker-Planck equations. The model was identified according to Russian statistics. With its help, the problems of the unsecured consumer loan market in Russia were analyzed, the impact on the economic situation of households of the COVID-19 pandemic, which exacerbated the problem of sustainability of the consumer loan market, and measures affecting the economic situation of low-income households.

The work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-07-00285.

REFERENCES

1. *Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V.* Mathematical Modeling of household economy in Russia. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, Vol. 61, No. 6, pp. 1030-1051.
2. *Shananin A.A., Trusov N.V.* The household behavior modeling based on mean field games approach // Lobachevskii journal of mathematics, 2021, v. 42, No. 7, p. 1738-1752.

АГЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЗОННОЙ ОРВИ С УЧЕТОМ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Шельгина Е.С.^{1,*}, Криворотько О.И.^{1,2}

¹ Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск

² Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики
СО РАН, Новосибирск

* *e.shelygina@g.nsu.ru*

Имитационные модели распространения ОРВИ играют важную роль в обеспечении готовности к пандемиям и эпидемиям и улучшении эпидемического контроля. Использование агентно-ориентированного подхода к моделированию распространения инфекционных заболеваний позволяет воспроизводить реальное поведение людей в повседневной жизни в городских условиях.

Каждый агент представляет отдельного человека и обладает рядом свойств и характеристик: прогрессирование болезни для агента задается в терминах SEIR-моделей (S - восприимчивые, E - инфицированные без симптомов, I - инфицированные с симптомами, R - переболевшие, имеющие иммунитет), популяция может быть гетерогенна по возрасту, полу, социальному статусу, в модели может учитываться процент вакцинированного населения [4], агент может иметь географическую привязку к домохозяйству, месту работы, школе или университету, хранить в памяти планы на день [2] и т.д.

Общее поведение системы является результатом взаимодействий среди агентов. Они наделены подвижностью через транспортные сети. [3] Описание пространственного процесса позволяет сконструировать сеть человеческих контактов а также оценить их продолжительность и интенсивность, тем самым обеспечив возможность для детального определения функции инфицирования - функции переноса вирусов от инфекционного агента к восприимчивому. [1]

Работа выполнена при поддержке гранта по итогам конкурса мэрии города Новосибирска на предоставление грантов в форме субсидий в сфере научной и инновационной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Влад А. И., Санникова Т.Е., Романюха А.А. Моделирование распространения респираторных вирусных инфекций в городе: мультиагентный подход // *Мат. биология и биоинф.*, 2020, Т.15. №2. С. 338-356. doi: 10.17537/2020.15.338.
2. Hackl J., Dubernet T. Epidemic Spreading in Urban Areas Using Agent-Based Transportation Models // *Future Internet*. 2019. V. 11. № 4. P. 92. doi: 10.3390/fi11040092.
3. Perez L., Dragicevic S. An agent-based approach for modeling dynamics of contagious disease spread // *Int. J. Health Geogr.* 2009, 8, 1–17.
4. Smieszek T., Balmer M., Hattendorf J., Axhausen K.W., Zinsstag J., Scholz R.W. Reconstructing the 2003/2004 H3N2 influenza epidemic in Switzerland with a spatially explicit, individual-based model // *BMC Infect. Dis.* 2011, 11, 115.

**ГЕОМЕТРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ,
ИНДУЦИРОВАННОЙ ФЕМТОСЕКУНДНЫМ ЛАЗЕРОМ В
МЕТАЛЛЕ**

Шепелев В.В.

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
vadim.aries@gmail.com*

Иногамов Н.А.

*Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка
nailinogamov@gmail.com*

Фортова С.В.

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
sfortova@mail.ru*

Индукцированные лазером ударные волны в последние десятилетия имеют широкое применение. Будучи драйвером таких важных областей лазерных технологий, как лазерная абляция в жидкость (Liquid Laser Ablation, LAL) и лазерное ударное упрочнение (Laser Shock Peening, LSP), ударно-волновые процессы представляют большой интерес для исследований и моделирования.

Действие единичного фемтосекундного лазерного импульса на толстую алюминиевую мишень приводит к образованию сильных ударных волн. Ударная волна, возникающая вследствие лазерного нагрева, распространяется сначала в квазиплоском режиме с постепенным распадом изначально плоского фронта. В течение нескольких десятков пикосекунд ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$) происходит переход к полусферическому режиму распространения волны. Представлена гидродинамическая модель, описывающая сопутствующие двумерные ударно-волновые эффекты в мишени, и содержащая полуэмпирическое уравнение состояния металла в форме Ми-Грюнайзена. Параметры уравнения состояния подобраны в соответствии с холодной кривой металла. Проведено гидродинамическое моделирование распространения и затухания индуцированной лазером ударной волны в алюминиевой мишени. Показаны эффекты сферизации ударной волны, ее распространение и затухание вблизи поверхности облучаемого металла.

**NUMERICAL RECONSTRUCTION OF HIGH-CONTRAST
INHOMOGENEITIS USING FUNCTIONAL ALGORITHM**

Shurup A.S.

*Moscow State University, Faculty of Physics, Acoustics Department, Moscow
shurup@physics.msu.ru*

In practice of acoustic tomography (in medical applications, ocean tomography) the deviation of the sound speed c from its background value c_0 does not exceed $|c - c_0|/c_0 = \Delta c/c_0 \leq 0.1 \div 0.3$. Such cases were considered in many works devoted to modeling problems of acoustic tomography, for example, in [1-4].

At the same time, in electromagnetic applications [5], the equivalent contrasts can be noticeably higher. In [5] the inverse electromagnetic problem is reduced under some approximations to Helmholtz equation. This allows a formal comparison of the "acoustic" contrast $\Delta c/c_0$ and the corresponding "dielectric" contrast $\epsilon = c_0^2/c^2$ [5]. It is of certain interest to study the possibility of reconstructing "high" contrasts (significantly exceeding the values of $\Delta c/c_0 \simeq 0.3$) by using algorithms, which have already been proven for solving acoustic inverse problems.

In this report some examples of such reconstructions are presented, which were obtained by using the functional-analytical algorithm proposed by R.G. Novikov [6]. The numerical implementation of this algorithm was described in [4]. In the present talk the results of acceptable reconstruction are shown both for the case $c \gg c_0$ (for example, $\epsilon = 1/1600$), and for the case $c \ll c_0$ (for example, $\epsilon = 9$). It is interesting, that reconstruction results in the case $c < c_0$ are more sensitive to the value of the sound speed contrast, in comparison with the case $c > c_0$. One of the physical reasons for this is the appearance of field focusing in the scattering region if $c < c_0$. The similar features in the reconstruction of scatterers with hard and soft boundaries were previously considered in [7].

The results obtained in the present report show that using the considered functional-analytical algorithm it is possible to reconstruct the contrasts $\epsilon \gg 1$. This, in some sense, demonstrates the advantages of this approach in comparison with the conventional least squares methods. Moreover, the functional algorithm also perfectly reconstruct contrasts $\epsilon \ll 1$, reconstruction of which can be difficult for other approaches due to the lack of strong backscattering from such weak "dielectric" contrasts.

The reported study was funded by RFBR and CNRS, project number 20-51-15004.

REFERENCES

1. *Kabanikhin S.I. et al.* // J. Inv. and Ill-posed Probl., 2020, 28(2), P. 287.
2. *Filatova V. et al.* // Commun. Comput. Inf. Sci., 2019, P. 297.
3. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* // Inverse Problems, 2013, 29(7), 075004.
4. *Burov V.A. et al.* // Acoust. Phys., 2013, 59(3). P. 345.
5. *Khoa V.A. et al.* // Inverse Problems, 2020, 36(8), 085007.
6. *Novikov R.G.* // Physics Letters A, 1998, 238(2-3), P. 73.
7. *Badalyan N.P. et al.* // Acoust. Phys., 2008, 54(6), P. 862.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ
КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРОГО
НАХОДИТСЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Андреянова О.А.***, Щеглов А.Ю.*

*Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай

**МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва), Россия

*shcheg@cs.msu.ru ; **oksashka@gmail.com

Для смешанной краевой задачи с неоднородным волновым уравнением и краевыми условиями второго и третьего рода рассматривается обратная задача определения двух коэффициентов, входящих в уравнение и в краевое условие. Сама краевая задача может рассматриваться как модель малых поперечных колебаний стержня, один конец которого помещён в упругую среду [1]. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассматривается ещё одно краевое условие. Формулируются и доказываются теоремы единственности и существования решения обратной задачи определения искомым коэффициентов. При этом предварительно устанавливаются свойства решения прямой задачи и условия её разрешимости. Получаемые при анализе задач интегральные формулы позволяют получить оценки устойчивости решения обратной задачи и организовать для численных решений прямой и обратной задач итерационные алгоритмы различного вида для получения приближённых решений. Использование такого итерационного численного решения обратной задачи должно быть увязано с некорректным характером обратной постановки.

Рассматриваемая прямая задача с функцией $u(x, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x)g(t), \quad (x, t) \in \Delta_{l,T}, \\ u(0, t) - \beta u_x(0, t) &= \mu(t), \quad t \in [0, \hat{T}], \quad \hat{T} = T - (l/a), \\ u_x(l, t) &= 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned}$$

где $\Delta_{l,T} = \{(x, t) : t \in [0, T - (l - x)/a], x \in [0, l]\}$. Дополнительное условие, используемое при постановке обратной задачи, имеет вид

$$u(l, t) = h(t), \quad t \in [0, T].$$

Обратная задача состоит в восстановлении функций $f(x)$ и $\mu(t)$ при $x \in [0, l]$ и $t \in [0, \hat{T}]$, и затем в нахождении решения $u(x, t)$ прямой задачи при $(x, t) \in \Delta_{l,T}$ по заданным положительным постоянным l, T, a, β , таким, что $l < aT$, и по заданным функциям $\varphi(x), \psi(x), x \in [0, l], g(t), h(t), t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977, 799 с.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ВОЗРАСТНЫМ
СТРУКТУРИРОВАНИЕМ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Артёмкин К.Р.** , Щеглов А.Ю.*

*Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай

**МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва), Россия

*shcheg@cs.msu.ru ; **kirillartemkin97@gmail.com

Исследуется решение прямой задачи, моделирующей динамику популяции с возрастной структурой и интегральными нелинейностями, а также обратной задачи восстановления коэффициента уравнения модели. Полученные при исследовании задач интегральные зависимости используются как основа для построения приближённого решения обратной задачи.

Прямая задача для функции $u(x, t)$, моделирующая динамику популяции, имеет вид, предложенный в [1], [2]:

$$u_x + u_t + \mu_0(x)u + \mu_1(x)\Psi(S(t))u = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, a], \quad t \in [0, T],$$

$$u(0, t) = \Phi(S(t)) \int_0^a \beta(s)u(s, t)ds, \quad S(t) = \int_0^a \gamma(s)u(s, t)ds, \quad t \in [0, T],$$

где функция $u(x, t)$ определяет число особей возраста x (или их плотность) в популяции в момент времени t ; функции $\mu_0(x)$ и $\mu_1(x)$ характеризуют интенсивность смертности особей возраста x в популяции, соответственно, естественной и проявляющейся в силу перенаселения популяции; функции $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - плотности репродуктивности и жизнедеятельности особей возраста x ; функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ характеризуют интегральную зависимость рождаемости и смертности в популяции от общего объёма $S(t)$ жизнедеятельности популяции. Дополнительное условие, используемое при постановке обратной задачи, имеет вид

$$u(a, t) = g(t), \quad t \in [0, T].$$

Обратная задача состоит в восстановлении функции $\mu_0(x)$ при $x \in [0, a]$, и затем решения $u(x, t)$ прямой задачи при $x \in [0, a]$, $t \in [0, T]$, по заданным положительным постоянным a, T , таким, что $a \leq T$, и по заданным функциям $\varphi(x)$, $\mu_1(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$, $x \in [0, a]$, $g(t)$, $t \in [0, T]$, $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$, $s \in R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Iannelli, F. Milner*. The basic approach to age-structured population dynamics. - Dordrecht: Springer, 2017, 350 p.
2. *Zijian Liu, Chunfang Guo, Jin Yang, Hong Li*. Steady states analysis of a non linear age-structured tumor cell population model with quiescence and bidirectional transition // Acta Appl Math, 2020, 20 p.
<https://doi.org/10.1007/s10440-019-00306-9>

**ON EXISTENCE OF A CYCLE IN ONE
CIRCADIAN OSCILLATOR MODEL**

Golubyatnikov V.P., Yunosheva E.V.

Novosibirsk State University, Novosibirsk

vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org e.yunosheva@g.nsu.ru

Following scheme of positive and negative feedbacks in two loops of the model of circadian oscillator proposed in [1], we construct 7D nonlinear dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1(\Gamma_1(x_2)\gamma_1(x_3) - x_1); & \dot{x}_m &= k_m(\Gamma_m(x_6)L_m(x_1) - x_m); \\ \dot{x}_6 &= k_6(\Gamma_6(x_7) - x_6); & \dot{x}_7 &= k_7(\Gamma_7(x_5)L_7(x_4) - x_7). \end{aligned} \quad (1)$$

All x_j , are non-negative, they denote concentrations of components of gene network which regulates functioning of the circadian oscillator. Here and below $j = 1, \dots, 7$, $m = 2, \dots, 5$. Non-negative smooth functions Γ_j , γ_1 , increase monotonically, they describe positive feedbacks in this gene network, and positive smooth functions L_m , L_7 are monotonically decreasing, they correspond to its negative feedbacks.

Following approach described in [2], we construct an invariant domain Q^7 in the positive octant of the space \mathbb{R}^7 , and find sufficient conditions of uniqueness of an equilibrium point of the system (1) in Q^7 .

Sufficient conditions of existence of a cycle of the system (1) in Q^7 are obtained as well.

REFERENCES

1. Podkolodnaya O. A., Tverdokhlebov N. N., Podkolodnyy N. L. Computational modeling of the cell autonomous mammalian circadian oscillator // *BMC Systems Biology*. 2017. V. 11. P. 27–42.
2. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P., Kazantsev M.V. On the existence of a cycle in an asymmetric model of a molecular repressilator // *Numerical Analysis and Applications*. 2017. V. 10, N 2, P. 101–107.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПЛАНЕТ ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ

И.И. Колотов, Д.В. Лукьяненко, И.Э. Степанова, Я. Ван, А.Г. Ягола
Московский государственный университет имени Ломоносова, Москва
yagola@physics.msu.ru, kolotovigor@list.ru, lukyanenko@physics.msu.ru, tet@ifz.ru,
yfwang@mail.iggcas.ac.cn

Изучение магнитных полей планет - один из способов получить информацию о внутреннем устройстве планеты и ее эволюции. Доступ к информации о магнитных полях планет стал возможен благодаря появлению и развитию межпланетных миссий. Полученные благодаря этим миссиям данные позволяют решать обратные задачи по восстановлению карты распределения параметров намагниченности. В статье [1] нами была рассмотрена задача восстановления намагниченности в коре Марса по спутниковым данным миссии MAVEN (NASA's Mars MAVEN orbiter). В этой же статье обсуждаются возможные способы увеличения точности восстановления параметров намагниченности Марса. Также проведены работы по восстановлению параметров намагниченности Меркурия по данным миссии MESSENGER.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I.I. Kolotov, D.V. Lukyanenko, I.E. Stepanova, Y. Wang, A.G. Yagola, *Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations*, Journal of Imaging, Vol. 7, no. 11 (2021).