ЦИРКУЛЯЦИЯ КРОВИ В НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЯХ ЧЕЛОВЕКА

В.И. Пеньковский, Н.К. Корсакова

Институт гидродинамики им. ак. Лаврентьева СО РАН 630090, Новосибирск, РФ

Аннотация. На основе предложенной ранее математической модели движения крови в тканях живых организмов рассматривается процесс замкнутой циркуляции крови в нижней конечности человека. Модель представляет собой уравнения фильтрации однородной жидкости в гетерогенной среде, состоящей из двух или более вложенных друг в друга континуумов. Взаимодействие между континуумами (распределительной сети артерий и коллекторской сети вен) происходит через разветвленную сеть капилляров. Величина перетекания крови из артериальной сети в венозную пропорциональна разности давления (напора) в сетях. Приводятся некоторые аналитические решения и результаты расчетов, выполненных методом конечных элементов.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Пусть $s(z)$ − площадь сечения мышечной массы ноги, ось z направлена от бедра к стопе. Тогда величины основных удельных потоков (артериальных, индекс a, и венозных, индекс v), а также величины перетоков будут пропорциональны площади сечения:
$q_a = s(z)v_a,\ q_v = s(z)v_v,\ q = s(z)\eta_1(h_a - h_v)$. Предположим ради простоты, что проводимости артериальных и венозных русел, а также их эластичности одинаковы [1,2]. После простых преобразований система уравнений, отражающих законы сохранения массы и законов движения Дарси, примет вид

$$\begin{cases} -\beta_1 \dfrac{\partial h_a}{\partial t} + \dfrac{1}{s(z)}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(s(z)\dfrac{\partial h_a}{\partial z}\right) = \eta_1(h_a - h_v); \\ -\beta_1 \dfrac{\partial h_v}{\partial t} + \dfrac{1}{s(z)}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(s(z)\dfrac{\partial h_v}{\partial z}\right) = -\eta_1(h_a - h_v) \end{cases} \qquad (1)$$

В этих уравнениях $h_{a,v} = p_{a,v} - \rho g z,\quad p_{a,v}$ — давления, η_1 — параметр капиллярного обмена, $\beta_1,\ t$ — коэффициент упругоемкости сосудов и время соответственно.

Для описания пульсового режима движения крови в артериальном и венозном руслах крови необходимо выполнение краевых условий на уровне бедра (при $z=0$) и условия непротекания на уровне стопы (при $z = z_p$):

$z=0:\ p_a = h_a = A\cos(\omega t) + B,\ p_v = h_v = p_o;\quad z = z_p: \partial h_a/\partial z = \partial h_v/\partial z = 0.$

Здесь $A = (p_s - p_d)/2,\ B = (p_s + p_d)/2$, полуразность и полусумма систолического и диастолического давлений, p_0 - давление в венах на уровне бедра, ω - частота сердечных сокращений.

Введением новых искомых функции $S^{\pm}(z,t) = h_a \pm h_v$, система (1) расщепляется на два уравнения

$$-\beta_1\frac{\partial S^-}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(s(z)\frac{\partial S^-}{\partial z}\right) - 2\eta_1 S^- = 0,\quad -\beta_1\frac{\partial S^+}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(s(z)\frac{\partial S^+}{\partial z}\right) = 0 \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$z=0: S^{\pm} = A^{\pm} = A\cos\omega t + B^{\pm};\quad z = z_p = l: \partial S^{\pm}/\partial z = 0\ \ (B^{\pm} = (p_s + p_d)/2 \pm p_0\ ). \qquad (3)$$

Рассмотрим частные случаи задачи (2)-(3), для которых можно выписать аналитические решения.

1.1. Случай постоянного сечения $s(z) = const$.

Периодическое решение второго уравнения системы представляет функция $S^+ = X_1^+(z)\cos\omega t - X_2^+(z)\sin\omega t + B + p_0$, где

$$X_1^+ = 2A\frac{ch(\gamma l)\cos(\gamma l)ch(\gamma(l-z))\cos(\gamma(l-z)) + sh(\gamma l)\sin(\gamma l)sh(\gamma(l-z))\sin(\gamma(l-z))}{ch(2\gamma l)+\cos(2\gamma l)};$$

$$X_2^+ = -2A\frac{sh(\gamma l)\sin(\gamma l)ch(\gamma(l-z))\cos(\gamma(l-z)) - ch(\gamma l)\cos(\gamma l)sh(\gamma(l-z))\sin(\gamma(l-z))}{ch(2\gamma l)+\cos(2\gamma l)}.$$

$$(\gamma = \sqrt{\omega\beta_1/2}).$$

Функцию S^- ищем в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых представляют собой частные решения первого уравнения системы (2) $S^- = S_1(z) + S_2(z,t)$ с краевыми условиями:

$$z = 0:\ S_1 = B^-;\ S_2 = A\cos\omega t;\ \ z = l:\ \partial/\partial z(S_{1,2}) = 0.$$

Легко проверить, что первое слагаемое представит формула $S_1 = B^-\dfrac{ch\sqrt{2\eta_1}(l-z)}{ch\sqrt{2\eta_1}l}$.

Второе слагаемое, решение задачи без начальных данных, представляем в виде $S_2 = e^{i\omega t}Z(z)$. Аналогично предыдущему получаем для искомой функции $Z(z)$ уравнение $\mathrm{d}^2Z/dz^2 - \gamma_-^2 Z = 0$, где $\gamma_-^2(\eta_1) = 2\eta_1 + i\omega\beta_1 = \sqrt{4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2}\exp(i2\theta)$, $\theta = \dfrac{1}{2}arctg\dfrac{\omega\beta_1}{2\eta_1}$; $\gamma_+ = \gamma_-(0)$. Удовлетворяя краевым условиям, найдем

$$Z(z) = A\frac{ch\gamma_-(l-z)}{ch\gamma_- l} = Z_1 + iZ_2,\ \ \gamma_- = (4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2)^{1/4}(\cos\theta + i\sin\theta) = \gamma_c + i\gamma_s$$

$$\gamma_c = \gamma\cos\theta,\ \gamma_s = \gamma\sin\theta,\ \gamma = (4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2)^{1/4}\ ;$$

$$Z_1 = 2A\frac{ch(\gamma_c l)\cos(\gamma_s l)ch(\gamma_c(l-z))\cos(\gamma_s(l-z)) + sh(\gamma_c l)\sin(\gamma_s l)sh(\gamma_c(l-z))\sin(\gamma_s(l-z))}{ch(2\gamma_c l)+\cos(2\gamma_s l)};$$

$$Z_2 = -2A\frac{sh(\gamma_c l)\sin(\gamma_s l)ch(\gamma_c(l-z))\cos(\gamma_s(l-z)) - ch(\gamma_c l)\cos(\gamma_s l)sh(\gamma_c(l-z))\sin(\gamma_s(l-z))}{ch(2\gamma_c l)+\cos(2\gamma_s l)}.$$

Отделяя действительную часть, получим $S_2 = Z_1\cos\omega t - Z_2\sin\omega t$.

Величины артериального и венозного давлений крови в соответствующих руслах восстанавливаются формулами $p_a = (S^+ + S^-)/2 + \rho gz,\ p_v = (S^+ - S^-)/2 + \rho gz.$ В отсутствие силы тяжести следует положить $g = 0$.

1.2. Сечение в виде кусочно-постоянной функции. Жесткий режим циркуляции крови. Пусть функция $s(z)$ задана в виде ступеньки $s_1 = 116$ см ^{2} при $z \in (0, z_1)$ и $s_2 = 44$ см^2, если $z \in (z_1, z_p)$, и имеет место жесткий режим циркуляции крови в руслах. В этом случае в уравнениях системы (2) следует положить $\beta_1 = 0$. Из второго уравнения системы и краевых условий (3) следует, что для всех z $S^+ = A\cos\omega t + B^+$.

Вводя обозначения $S^- = S_1^-$, $z \in (0, z_1)$ и $S^- = S_2^-$, $z \in (z_1, z_p)$ $z_p = 100$, выпишем общие решения первого уравнения системы (2)

$S_1^- = M_1 sh[az] + N_1 ch[az]$; $S_2^- = M_2 sh[az] + N_2 ch[az]$. ($a = \sqrt{2\eta_1}$). Входящие в эти формулы постоянные определяются из краевых условий

$z = 0: S_1^- = A\cos\omega t + B^-$; $z = z_1$: $S_1^- = S_2^-$, $\partial S_1^- / \partial z = \delta \partial S_2^- / \partial z$ ($\delta = 44/116 = \approx 0{,}38$) и имеют вид

$$N_1 = A\cos\omega t + B^-; \quad N_2 = \frac{2N_1}{sh[2az_1]\{-(1-\delta)th[az_p] + cth[az_1] - \delta th[az_1]\}};$$

$$M_2 = -N_2 th[az_p]; \qquad M_1 = M_2 + (N_2 - N_1)cth[az_1].$$

На рис. 1 представлены артериальное (верхняя кривая) и венозное (нижняя кривая) распределения давлений при следующих значениях параметров: η_1=0.0005, $p_0 = 50$, $p_d = 80$ $p_s = 120$ $z_1 = 35$ см, $\omega = 7.85$ 1/сек. Графики представлены на момент времени достижения максимума артериального давления на входе.

2. Численные расчеты. На рис. 2 показаны результаты численных расчетов, полученных с помощью метода конечных элементов, для приведенных выше параметров и при упругом режиме циркуляции с коэффициентом упругоемкости β_1=0.001. Распределение мышечной массы вдоль конечности было представлено в виде кусочно-линейной функции $s(z) = 154 - 2.17z$ при $z \in [0,35]$, $s(z) = 137.5 - 1.7z$ при $z \in [35,75]$ и $s(z) = 10$ при $z \in [75,100]$. График соответствует установившемуся режиму колебаний.

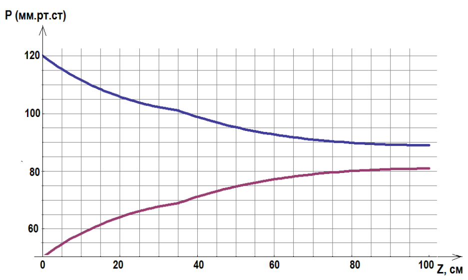

Рис. 1. Распределение давлений вдоль ноги.

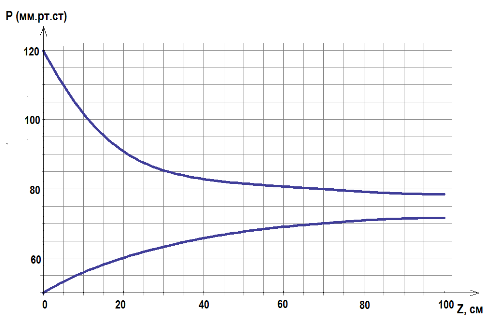

Рис. 2. Численные расчеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пеньковский В.И.**, **Корсакова Н.К**. Модели гидравлического разрыва пласта и циркуляции крови в мозге на основе механики и фильтрации в гетерогенных средах // Труды XIV Всероссийского семинара «Динамика многофазных сред». Новосибирск. 2-5 ноября 2015 г. С. 73-75.

2. **Korsakova N.,Pen'kovskij V.,Shilova A., Shevchenko V.** Model of blood circulation in the cerebral cortex on the theory of fluid flow in heterogeneous medium // Series on Biomechanics. 2016. Vol.30, No. 2. P. 24-31.