

**НЕЛИНЕЙНАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ДИНАМИКИ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ С ДВУМЯ ДАВЛЕНИЯМИ**

В.Е. Федоров

*Челябинский государственный университет
454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, Россия*

Система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2)}{\partial x} &= -m \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{m \rho_2 (u_1 - u_2)}{\tau}, \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x} &= (m-1) \frac{\partial Q}{\partial x} + (Q-P) \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{m \rho_2 (u_1 - u_2)}{\tau}, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + u_2 \frac{\partial m}{\partial x} &= -\frac{m(1-m)(P-Q)}{\tau_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

описывает в безразмерных переменных динамику двухфазной смеси (см., например, [1, 2]). Здесь $\rho_i, \rho_{ii}, u_i, P_i, m_i$ – средняя плотность, истинная плотность, скорость, давление и объемная концентрация i -го компонента смеси, $m_1 = m$, $m_2 = 1 - m$, $\rho_i = m_i \rho_{ii}$, $a_i, \rho_{ii,0}$ – скорость звука и истинная плотность материала i -го компонента, τ – время стоксовой релаксации скоростей, τ_2 – время релаксации давлений компонентов смеси, $a = a_2 / a_1$, $r = \rho_{22,0} / \rho_{11,0}$. Сопряжённая к системе уравнений (1) в смысле Н.Х. Ибрагимова [3] система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} -R_{1t} - R_{1x} u_1 + U_1 u_{1t} + U_1 u_1 u_{1x} - U_1 P_{\rho_1} m_x - U_{1x} P_{\rho_1} m + U_2 P_{\rho_1} m_x - \\ - U_{2x} Q_{\rho_1} (1-m) + \frac{1}{\tau_2} M (P_{\rho_1} - Q_{\rho_1}) m (1-m) &= 0, \\ -R_{2t} - R_{2x} u_2 + U_2 u_{2t} + U_2 u_2 u_{2x} + U_2 P_{\rho_2} m_x - U_1 P_{\rho_2} m_x - U_{1x} P_{\rho_2} m - \\ - U_{2x} Q_{\rho_2} (1-m) + \frac{1}{\tau} (U_1 - U_2) (u_1 - u_2) m + \frac{1}{\tau_2} M (P_{\rho_2} - Q_{\rho_2}) m (1-m) &= 0, \\ R_{1x} \rho_1 + U_1 \rho_{1t} + U_{1t} \rho_1 + U_1 \rho_{1x} u_1 + U_{1x} \rho_1 u_1 - \frac{1}{\tau} (U_1 - U_2) \rho_2 m &= 0, \\ R_{2x} \rho_2 + U_2 \rho_{2t} + U_{2t} \rho_2 + U_2 \rho_{2x} u_2 + U_{2x} \rho_2 u_2 + \frac{1}{\tau} (U_1 - U_2) \rho_2 m - M m_x &= 0, \\ U_1 P_{\rho_1} \rho_{1x} + U_1 P_{\rho_2} \rho_{2x} - U_{1x} P_m m + \frac{1}{\tau} (U_1 - U_2) \rho_2 (u_1 - u_2) - U_2 Q_{\rho_1} \rho_{1x} - U_2 Q_{\rho_2} \rho_{2x} - \\ - U_{2x} Q_m (1-m) - U_{2x} (P-Q) - U_2 (P_{\rho_1} \rho_{1x} + P_{\rho_2} \rho_{2x} - Q_{\rho_1} \rho_{1x} - Q_{\rho_2} \rho_{2x}) - M_t - \\ - M u_{2x} - M_x u_2 + \frac{1}{\tau_2} M (P-Q) (1-2m) - \frac{1}{\tau_2} M (P_m - Q_m) m (1-m) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где R_1, R_2, U_1, U_2, M – сопряжённые переменные. Найдём такие их значения, при которых равенства (2) выполняются при всех решениях $\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, m$ системы уравнений (1). При выполнении условий

$$P \neq Q, \quad P_{\rho_1} \neq Q_{\rho_1} \quad (3)$$

получим

$$R_1 = Au + B, \quad R_2 = Av + C, \quad U_1 = U_2 = A, \quad M = 0, \quad (4)$$

где A, B, C – произвольные константы. Отметим, что условия (3) выполняются, например, для используемых в [1, 2] функций давления

$$P_1 = \frac{\rho_1}{m} - 1, \quad P_2 = a^2 \left(\frac{\rho_2}{1-m} - r \right).$$

Таким образом, система уравнений (1) является нелинейно сопряжённой с постановкой (4) (см. [3]). Этот факт позволяет вычислить ряд законов сохранения этой системы, соответствующих найденным в работе [4, 5] её симметриям

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Законы сохранения в свою очередь будут использованы для поиска точных решений системы уравнений (1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жилин А.А., Федоров А.В.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // Прикл. механика и тех. физика. 1999. Т. 40, № 1. С. 57–63.
2. **Жилин А.А., Федоров А.В.** Отражение ударной волны от жесткой стенки в смеси жидкого металла и твердых частиц // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 97–107.
3. **Ibragimov N.H.** Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA. 2010–2011. Vol. 7–8. P. 1–99.
4. **Федоров В.Е., Филин Н.В.** Однородное решение системы уравнений динамики двухфазной смеси // Тр. XIV Всероссийского семинара «Динамика многофазных сред», приуроченного к 75-летию академика РАН В.М. Фомина. Новосибирск, 2 – 5 ноября 2015 г. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2015. С.269–271.
5. **Fedorov V.E., Filin N.V.** Invariant and partially invariant submodels of the equations system describing a dynamics of two gases mixture // Materials Science Forum. 2016. Vol. 845. P. 174–177.