

ОБ ОДНОМ КОЛЛАПСЕ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

А.В. Панов

*Челябинский государственный университет
454001, Челябинск, Россия*

Система уравнений двухфазной газовой динамики, предложенная Рахматулиным [1,2], в случае трех пространственных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt_1} + \rho_1 \operatorname{div} U_1 = 0, \quad \frac{d\rho_2}{dt_2} + \rho_2 \operatorname{div} U_2 = 0, \\ \rho_1 \frac{dU_1}{dt_1} + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau} (U_1 - U_2), \quad \rho_2 \frac{dU_2}{dt_2} + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau} (U_1 - U_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_1, ρ_2 - парциальные плотности, U_1, U_2 - векторы скоростей фаз, $m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{22}}$,

$m_1 = 1 - m_2$ - объемная концентрация второй и первой фазы, ρ_{22} - абсолютная плотность второй фазы (константа), $P(\rho_1, \rho_2)$ - давление смеси. Операторы $\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \cdot \nabla$,

$$\frac{d}{dt_2} = \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \cdot \nabla.$$

Алгебра симметрий системы (1) является алгеброй группы Галилея и состоит из сдвигов по времени и пространству, галилеевых сдвигов и поворотов [2]. В работе [3] найдены частично инвариантные решения системы (1). Рассмотрим одно из найденных решений

$$\begin{aligned} \rho_1 = \frac{k}{\mu t}, \quad \rho_2 = \frac{k}{t}, \\ u_1 = \frac{x-y}{t} - \mu \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}, \quad v_1 = -\mu e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}, \quad w_1 = -\mu e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}, \\ u_2 = \frac{x-y}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}, \quad v_2 = e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}, \quad w_2 = e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}. \end{aligned}$$

Здесь k и μ - константы интегрирования. При стремлении времени к нулю плотности фаз бесконечно растут, то есть данное решение описывает в нулевой момент времени коллапс двух фаз. Решая задачу Коши, получим траектории движения фаз

$$x_1(t) = (x_{10} - y_{10} + \mu\alpha) \frac{t}{t_0} + y_{10} - \frac{\mu\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} - (1+\mu-\tau) \frac{\mu}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}} - \frac{(1+\mu)\mu}{\tau} t \operatorname{Li} \left(e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$y_1(t) = y_{10} - \frac{\mu\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} + \frac{\mu\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}},$$

$$z_1(t) = z_{10} - \frac{\mu\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} + \frac{\mu\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}},$$

$$x_2(t) = (x_{20} - y_{20} - \alpha) \frac{t}{t_0} + y_{20} + \frac{\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} + \frac{(1+\mu-\tau)}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}} + \frac{(1+\mu)}{\tau} t \operatorname{Li}\left(e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$y_2(t) = y_{20} + \frac{\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} - \frac{\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}},$$

$$z_2(t) = z_{20} + \frac{\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} - \frac{\tau}{1+\mu} e^{-(1+\mu)\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\alpha = e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}} + \frac{(1+\mu)}{\tau} t_0 \operatorname{Li}\left(e^{-(1+\mu)\frac{t_0}{\tau}}\right), x_{10} = x_1(t_0), y_{10} = y_1(t_0), z_{10} = z_1(t_0),$$

$$x_{20} = x_2(t_0), y_{20} = y_2(t_0), z_{20} = z_2(t_0).$$

Устремив время t к нулю в найденных функциях, получим многообразие мгновенного источника первой фазы гиперплоскость $x = y - \mu$, а второй $x = 1 + y$. Сравнивая вид функций, задающих изменение координат y и z первой и второй фазы, можно записать, что $z = y + z_0 - y_0$. Значит, проекции траекторий фаз на плоскость переменных (y, z) будут давать прямые, точнее говоря, это будут куски прямых, т.к. при $t \in (0, +\infty)$ координата y будет принимать значения из интервала конечной длины. Проекция на плоскость (y, z) траекторий первой и второй фазы представлены на рисунках 1 и 2. Стрелкой указано предельное значение при $t \rightarrow +\infty$ координат (y, z) , координаты источника выкальваются.

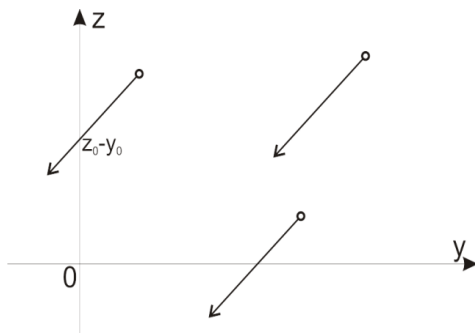


Рис. 1. Проекция траекторий первой фазы на плоскость (y, z) .

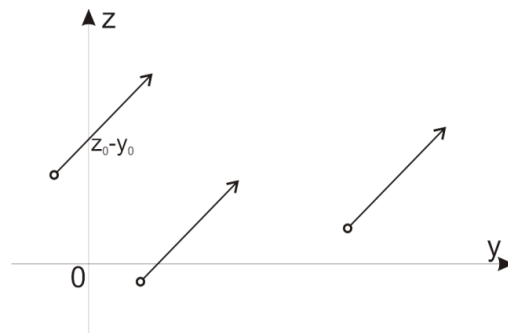


Рис. 2. Проекция траекторий второй фазы на плоскость (y, z) .

Проекции траекторий фаз на плоскость (x, y) определяются графиками функции $x(y) = cy + \ln(y)(A_1 + \mu Li(y))$ при $c < 0, y \in (0, 1)$ для первой фазы и $x(y) = cy + \ln(y)(A_2 - Li(y))$ при $c > 0, y \in (0, 1)$ для второй фазы. Существенными параметрами являются числа $A_1 = (x_{10} - y_{10} + \mu\alpha) \frac{(-\tau)}{t_0(1 + \mu)}$

$A_2 = (x_{20} - y_{20} - \alpha) \frac{(-\tau)}{t_0(1 + \mu)}$, которые определяются начальными значениями координат.

В зависимости от знака этих параметров будут получаться различные траектории. На рисунке 3 представлены существенно различные виды проекций траекторий первой (сплошная линия) и второй (пунктир) фазы.

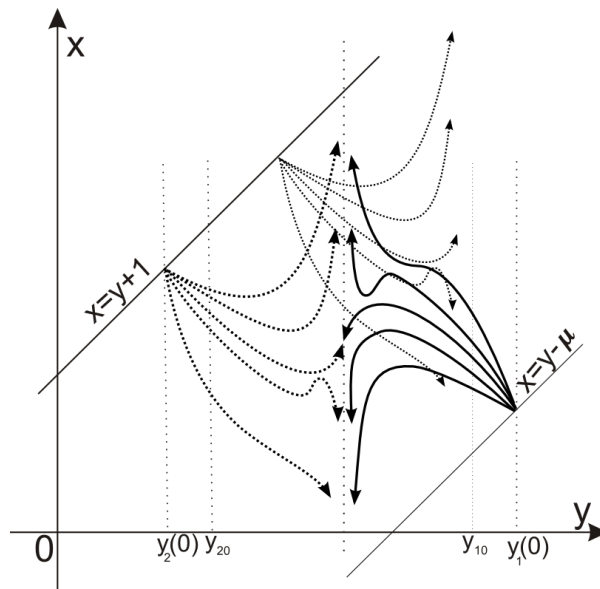


Рис. 3. Проекция на плоскость (x, y) траекторий движения фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рахматуллин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т.20, № 2. С. 184-195.
2. **Федоров А.В., Фомин П.А., Фомин В.М., Тропин Д.А., Чен Дж.-Р.** Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц. Новосибирск: НГАСУ, 2011.
3. **Панов А.В.** Инвариантные подмодели системы уравнений динамики газозвеси в случае трех пространственных переменных// Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2014. № 12(183), вып. 35. С. 188-199.
4. **Панов А.В.** Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве// Сиб. журн. индустр. матем. 2017. Т. 20, № 2. С. 71-82.