ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.В. Панов

Челябинский государственный университет
454001, Челябинск, Россия

Рассматривается система уравнений, описывающая динамику двухфазной среды в изотермическом приближении [1,2]:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_1 u_1^2+m_1 p\right)}{\partial x}=p\frac{\partial m_1}{\partial x}-\frac{\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}\,,$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_2 u_2^2+m_2 p\right)}{\partial x}=p\frac{\partial m_2}{\partial x}+\frac{\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}\,.$$

Уравнение состояния смеси имеет вид $p=\dfrac{a^2\rho_1}{1-\rho_2\rho_{22}^{-1}}$, где ρ_{22} - истинная плотность второй фазы.

Система допускает трехмерную группу Ли преобразований и имеет различные инвариантные решения [3]. Рассмотрим частное решение, инвариантное относительно галилеевых сдвигов:

$$\rho_1=c_1/t\,,$$

$$\rho_2=c_2/t\,,$$

$$u_1=\frac{x}{t}+\frac{c_2c_3}{c_2+c_1}\frac{1}{t}-\frac{c_2c_4}{c_1}\frac{1}{t}e^{-\frac{c_2+c_1}{c_1}\frac{t}{\tau}}\,,$$

$$u_2=\frac{x}{t}+\frac{c_2c_3}{c_2+c_1}\frac{1}{t}-c_4\frac{1}{t}e^{-\frac{c_2+c_1}{c_1}\frac{t}{\tau}}\,.$$

Данная система является системой составного типа [2, 4]. При исследовании корректности задачи Коши оказывается существенным знание размеров области гиперболичности, т.к. при переходе из области гиперболичности в область составного типа необходимо ставить новую начально-краевую задачу [4]. Условие гиперболичности системы имеет вид [2]

$$F_H=\left(1+\left(\frac{m_2\rho_{11}}{m_1\rho_{22}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(\frac{u_1-u_2}{a}\right)^2<0. \qquad (1)$$

Здесь $m_1,m_2,\rho_{11},\rho_{22}$ - объемные концентрации и истинные плотности первой и второй фазы, a - изотермическая скорость звука в первой фазе. После подстановки в условие (1) решения, получим выражение

$$H(t)=a^2\left((\rho_{22}t-c_2)^{2/3}+(c_2c_1)^{1/3}\right)^3-\frac{(\rho_{22}t-c_2)^2}{t^2}e^{-\frac{c_2+c_1}{c_1}\frac{2t}{\tau}}\left(c_4\frac{c_1+c_2}{c_1}\right)^2.$$

Условие гиперболичности перепишется в виде $H(t)<0.$ Видно, что при любом выборе констант, участвующих в $H(t)$, функция $H(t)$ будет принимать отрицательные значения при достаточно малых временах. Таким образом, при фиксированных значениях констант область гиперболичности будет полосой $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<t<t_h\}$. Здесь t_h - время, до которого система имеет гиперболический тип: $H(t_h)=0$. Константа c_3 в решении не существенна, т.к. слагаемое с данной константой можно убрать сдвигом по координате x. Кроме того, в условие гиперболичности (1) c_3 также не входит. Константа c_4 существенна, она определяется начальной разностью скоростей и начальным моментом времени: $c_4=(u_2(t_0)-u_1(t_0))t_0A(t_0)$, и может быть интерпретирована как величина перемещения частиц вещества по газу к начальному моменту времени t_0. Безразмерную величину $A(t_0)$, зависящую от t_0 экспоненциально: $A(t_0)=\frac{c_1}{c_1+c_2}e^{\frac{c_2+c_1}{c_1}\frac{t_0}{\tau}}$, можно считать равной единице, заменив соответствующим образом константу c_4.

Решение, указанное выше, имеет особенность в нулевой момент времени. Для постановки задачи Коши в момент времени $t=0$ нужно осуществить сдвиг времени на константу $b\in\mathbb{R}$. Область гиперболичности полученного решения также сдвинется влево ($b>0$), или вправо ($b<0$). В первом случае это может привести к сдвигу всей области гиперболичности в область отрицательных значений времени.

Рассмотрим движение частиц песка в воздухе. Для этого зададим в момент времени $t=t_0$ начальные данные $\rho_{11}=1$ кг/м^3 (воздух), $\rho_{22}=2400$ кг/м^3 (частицы песка SiO_2), $m_2=10^{-3}$, $m_1=1-m_2$. Время релаксации примем равным $\tau=10^{-4}$ с, а $t_0=\tau/10=10^{-5}$ с. Отсюда найдем $c_1=\rho_1t_0=m_1\rho_{11}t_0$, $c_2=\rho_2t_0=m_2\rho_{22}t_0$. Скорость звука примем постоянной и равной $a=340$ м/с.

Графики скоростей при различных значениях c_4 будут меняться, однако, общий вид будет неизменен. На рисунке 1 приведены характерные распределения скоростей первой и второй фазы. Зеленая плоскость соответствует значению времени t_h и отделяет область гиперболичности от области составного типа.

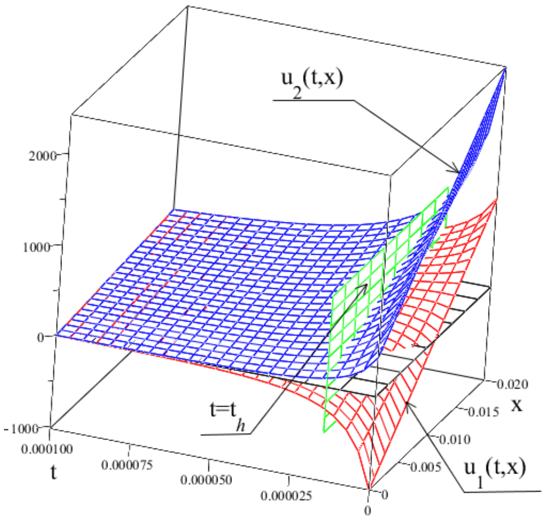

Рисунок 1.

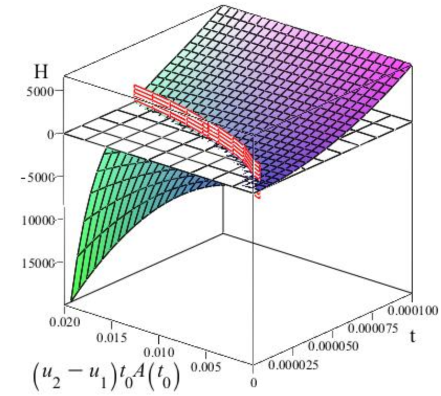

Рисунок 2.

Общий вид функции $H(t, c_4)$ представлен на рисунке 2. Область гиперболичности при разных начальных разностях скоростей отделена красной полосой от области составного типа. Красная полоса соответствует корням уравнения $H(t, c_4) = 0$.

На рисунке 3 приведены срезы графика функции $H(t, c_4)$ для значений разности скоростей равных 484 м/с, 1210 м/с, 1936 м/с.

Как видно, с уменьшением начальной разности скоростей область гиперболичности системы на данном решении уменьшается. При начальной разности скоростей меньшей скорости звука область гиперболичности будет целиком находиться в отрицательной по времени полуплоскости. Это также обусловлено тем, что скорости рассматриваемого решения и их разность стремятся к нулю при росте времени.

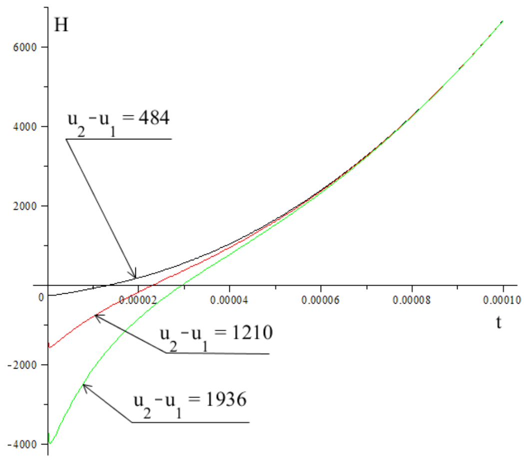

Рисунок 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рахматулин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, No. 2. С. 184–195.
2. **Фёдоров А.В., Фомин П.А., Фомин В.М., Тропин Д.А., Чен Дж.-Р.** Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц, Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011.
3. **Фёдоров В.Е., Панов А.В.** Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. университета. Физика. 2011. Вып. 11. С. 65–69.
4. **Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н.** Газовая динамика. Избранное. Т. 2, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.