

ДВУХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В КАПИЛЛЯРАХ

А.Е. Медведев

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН
630090, Новосибирск, Россия*

Аннотация. Течение крови в мелких сосудах не описывается решением Пуазейля, так как обладает рядом особенностей (эффектов): зависимостью показателя гематокрита от диаметра сосуда; существованием безэритроцитного слоя плазмы вблизи стенки сосуда; тупым (по сравнению с профилем течения Пуазейля) профилем скорости крови; зависимостью вязкости крови от диаметра сосуда. Предложена эмпирическая двухфазная модель течения крови в мелких сосудах, которая описывает указанные эффекты. Получены аналитические зависимости для скорости, вязкости и распределения эритроцитов по сечению сосуда в зависимости от диаметра кровеносного сосуда. Сравнение с экспериментальными данными показало, что модель хорошо описывает течение крови в сосудах диаметром меньше 1000 микрон.

Двухфазная модель течения крови. Рассмотрим кровь как суспензию, состоящую из вязкой несжимаемой жидкости (плазма крови – индекс “1”) и деформируемых несжимаемых частиц (эритроцитов – индекс “2”) диаметром ≤ 10 микрон. Истинная плотность эритроцитов $\rho_1^0 = 1100$ кг/м³ (плотность вещества эритроцитов) больше истинной плотности плазмы крови $\rho_1^0 = 1030$ кг/м³. Плотность крови ρ складывается из плотности плазмы и плотности эритроцитов $\rho = m_1\rho_1^0 + m_2\rho_2^0$, где m_1 – объемная доля плазмы, $m_2 \equiv H$ – объемная доля эритроцитов (показатель гематокрита). Объемные доли связаны соотношением $m_1 + m_2 = 1$. При движении в капиллярах кровь ведет себя как неньютоновская вязкая жидкость с переменной плотностью $\rho(r)$ и вязкостью $\mu(r)$, которые зависят от радиуса r .

Для продольной скорости крови в капилляре получено решение

$$w(\zeta) = w_{\max} [M_1 - M(\zeta)], \quad (1)$$

где $\zeta = (r/r_0)^2$, r_0 – радиус сосуда, $w_{\max} = \frac{r_0^2}{4\mu_1} \left| \frac{dp}{dz} \right|$ – скорость течения в центре сосуда,

μ_1 – вязкость плазмы крови, $\frac{dp}{dz} = \text{const} < 0$ – градиент давления в капилляре.

Функция вязкости $M(\zeta)$ и объемной доли эритроцитов $m_2(\zeta)$ определяются формулами

$$M(\zeta) = M_1 \begin{cases} \zeta_h (\xi/\zeta_h)^m, & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_h, \\ \zeta, & \text{при } \zeta_h < \zeta \leq 1, \end{cases} \quad m_2(\zeta) = m_{20} \begin{cases} 1 - (\xi/\zeta_h)^n, & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_h, \\ 0, & \text{при } \zeta_h < \zeta \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где показатели степеней $m = \Phi(d_0, \bar{H}_D)^{-2} > 1$ и $n = \Phi(d_0, \bar{H}_D)^{1/4} / [1 - \Phi(d_0, \bar{H}_D)] > 0$, d_0 – диаметр сосуда, \bar{H}_D – фиксированное значение показателя гематокрита H_D в выпускном резервуаре для экспериментов *in vitro* или показатель гематокрита в крупных арте-

риях для экспериментов *in vivo*, Φ – функция, аппроксимирующая экспериментальные зависимости [1] динамического показателя гематокрита, $\zeta_h = 1 - h^2$, h – относительная толщина пристеночного безэритроцитного слоя плазмы.

Параметры в уравнениях (1) и (2) найдены аналитически в виде

$$m_{20}(d_0, \bar{H}_D) = \bar{H}_D \frac{n+1}{n} \frac{\Phi}{\zeta_h}, \quad M_1(d_0, \bar{H}_D) = \frac{1}{F} \frac{1}{1 + \frac{m-1}{m+1} \zeta_h^2},$$

$$\zeta_h(d_0, \bar{H}_D) = \frac{-\frac{n+1}{m+n+1} \Phi + \sqrt{\Delta}}{m-1}, \quad \Delta = \left(\frac{n+1}{m+n+1} \Phi \right)^2 + (m^2 - 1)(2\Phi - 1),$$
(3)

где $F = F(d_0, \bar{H}_D)$ – функция, аппроксимирующая экспериментальные зависимости [1] относительной вязкости крови. В уравнениях (2) и (3) модели используются эмпирические данные (функции Φ и F) [1], аппроксимирующие экспериментальные результаты по расходу крови (относительной вязкости крови) и изменению динамического показателя гематокрита в зависимости от радиуса сосуда.

Сравнение с экспериментами. Полученная модель дает простое аналитическое решение (1)-(3), которое было проверено на экспериментальных данных.

На рис. 1 приведено сравнение результатов расчета по модели с экспериментальными данными по профилю показателя гематокрита (объемной доли эритроцитов). Из рис. 1 видно, что расчетные и экспериментальные данные (профиль объемной доли и граница безэритроцитной зоны) достаточно хорошо согласуются друг с другом.

На рис. 2 приведены расчеты (кривые) ширины безэритроцитной зоны в зависимости от диаметра сосуда и показателя выпускного гематокрита. Экспериментальные данные показаны значками. Видно, что расчетные данные хорошо укладываются в границы погрешностей экспериментальных данных.

На рис. 3 показано сравнение экспериментальных и расчетных данных профиля скорости крови в крысиной брыжейки. Из рис. 3 видно, что модель достаточно хорошо описывает значение скорости крови, особенно максимальную скорость в центре сосуда. Решение Пуазейля дает завышенное ~20% значение максимальной скорости крови.

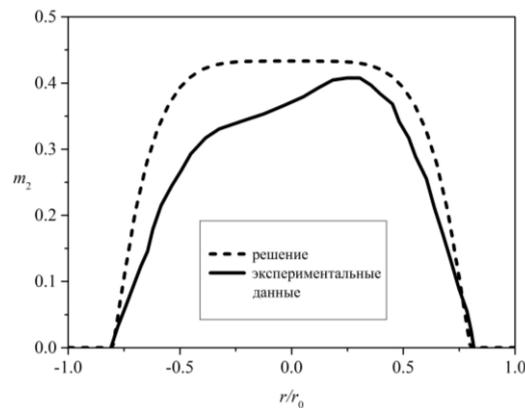


Рис. 1. Объемная доля эритроцитов m_2 в кровеносном сосуде (артериоле) брыжейки крысы диаметром 10.5 микрон. Сплошная кривая – приведенный в [1] экспериментальный профиль показателя гематокрита. Пунктирная кривая – расчетный профиль показателя гематокрита, выпускного показателя гематокрита $\bar{H}_D = 0.3$.

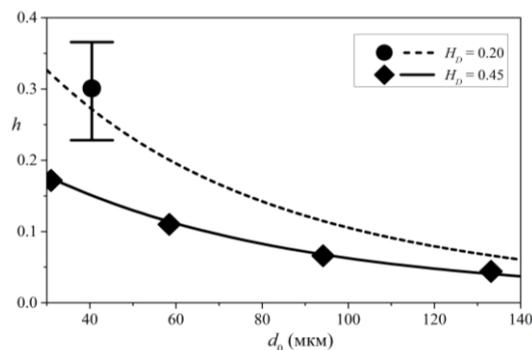


Рис. 2. Зависимость относительной толщины пристеночного безэритроцитного слоя h от диаметра сосуда d_0 для двух значений показателя гематокрита. Значки – экспериментальные данные [3] с погрешностью измерений. Линии – толщина безэритроцитного слоя, рассчитанная по решению (1)-(3).

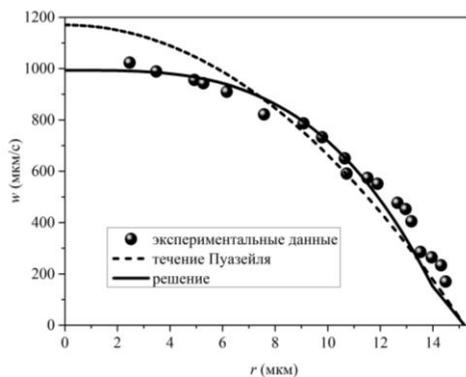


Рис. 3. Профиль скорости крови в сосуде брыжейки мыши. Значки – эксперименты [2]. Сплошная кривая – расчет по модели. Пунктирная кривая – течение Пуазейля.

Заключение. Получено аналитическое решение для описания течения крови в капиллярах диаметром меньше 1000 микрон, описывающие особенности (эффекты) течения крови. Для построения эмпирической двухфазной модели используются аппроксимации экспериментальных данных по расходу крови (относительной вязкости крови) и изменению динамического показателя гематокрита в зависимости от радиуса сосуда. Модель описывает кровь как неньютоновскую жидкость с переменной плотностью и дает простые аналитические зависимости: для профиля скорости в сосуде (отличного от профиля Пуазейля); для распределения объемной доли эритроцитов по сечению сосуда; для толщины безэритроцитного слоя около стенки сосуда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pries A.R., Secomb T.W.** Blood flow in microvascular networks // In: Handbook of Physiology: Microcirculation. N.Y.: Academ Press, 2008. P. 3–36.
2. **Long D.S., Smith M.L., Pries A.R. et al.** Microviscometry reveals reduced blood viscosity and altered shear rate and shear stress profiles in microvessels after hemodilution // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2004. Vol. 101. P. 10060–10065.
3. **Bugliarello G., Sevilla J.** Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes // Biorheology. 1970. Vol. 7. P. 85-107.