Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН
Лаборатория вычислительных систем
630090, Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 13
т. +7 (383) 333-21-71

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

ХОРОШЕВСКИЙ ВИКТОР ГАВРИЛОВИЧ
член-корреспондент РАН доктор технических наук профессор
khor@isp.nsc.ru

ПАВСКИЙ ВАЛЕРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ
доктор технических наук профессор
pavvm@kemtipp.ru

ПАВСКИЙ КИРИЛЛ ВАЛЕРЬЕВИЧ
кандидат технических наук
pkv@isp.nsc.ru

Объект исследования и цель

Объектом исследования являются распределенные вычислительные системы (ВС).

Цель: Анализ функционирования распределенных вычислительных систем.

Разделы анализа функционирования ВС

- **Надежность ВС**

  Свойство системы сохранять заданный уровень производительности путем программной настройки ее структуры и программной организации функционального взаимодействия между ее ресурсами

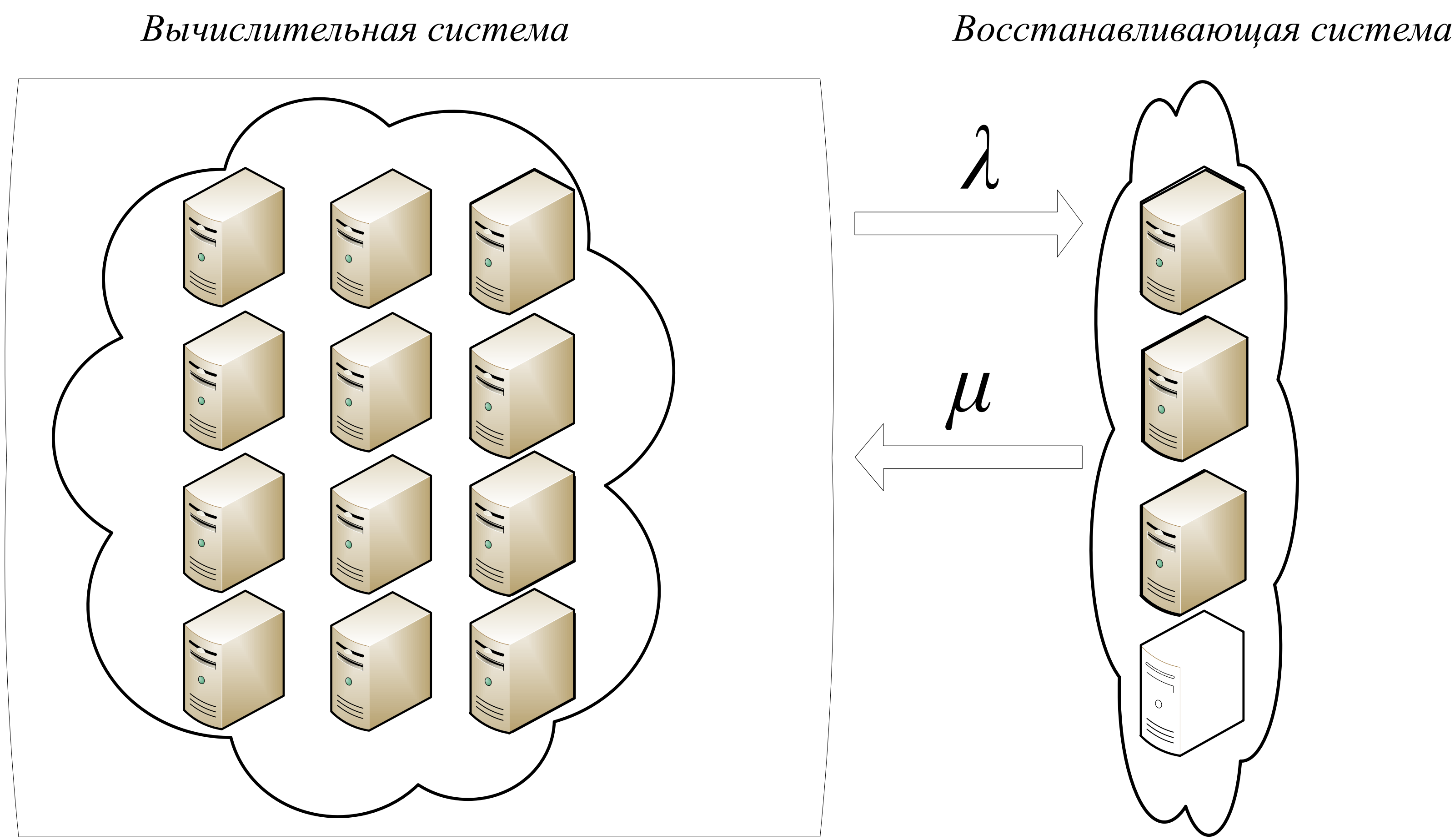
- **Живучесть ВС**

  Способность ВС (достигаемая программной организацией структуры и функционального взаимодействия между ее компонентами) в любой момент функционирования использовать суммарную производительность всех исправных ресурсов (в частности, ЭМ) для решения задач (для реализации параллельных программ сложных задач)

- **Осуществимость решения задач на ВС**

  Показатели характеризуют качество работы систем с учетом их надежности и параметров поступающих задач.

Модель функционирования распределенной ВС



Время отказа каждой работоспособной ЭМ является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}$.

Время восстановления каждой отказавшей ЭМ является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью $\boldsymbol{\mu}$, число восстанавливающих устройств в ВС равно $\boldsymbol{m}$..

Элементы теории живучести ВС

Функция потенциальной живучести

$$\mathcal{N}(j,t) = N(j,t)\,/\,N$$

N – число однородных ЭМ, составляющих ВС.

$N(j,t)$ – среднее число работоспособных машин в момент при условии, что система начала функционировать в состоянии $j \in E_0^N$.

Среднее число ЭМ в отказе

$M_i(t)$ - среднее число ЭМ вычислительной системы, находящихся в состоянии отказа в момент времени t, при условии, что в начальный момент времени $t = 0$, в ВС в состоянии отказа находилось $M_i(0) = i$ машин.

$D_i(t)$ - соответствующая $M_i(t)$ дисперсия.

Расчет показателей живучести распределенных ВС (континуальный подход)

Простейшая ситуация: *время переключения* $\to 0$

$$\lambda < \mu$$

$$\mathcal{N}(i,t+\Delta t) = \mathcal{N}(i,t) - \mathcal{N}(i,t)\lambda \cdot \Delta t + \mathcal{M}(i,t)\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}(i,t) = -\lambda\mathcal{N}(i,t) + \mu\mathcal{M}(i,t), \quad \mathcal{N}(i,0) = i$$

$$N - \mathcal{N}(i,t) \le m, \quad N\lambda \le m\mu$$

$$\mathcal{N}(i,t) = \frac{N\mu}{\lambda+\mu} + \frac{i\lambda - (N-i)\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad \mathcal{M}(i,t) = N - \mathcal{N}(i,t),$$

где $(N-m) \le i \le N$

Стационарный режим:

$$\mathcal{N} = \lim_{t\to\infty} \mathcal{N}(i,t) = N\mu(\lambda+\mu)^{-1}, \quad \Omega = \mathcal{N} \cdot \omega$$

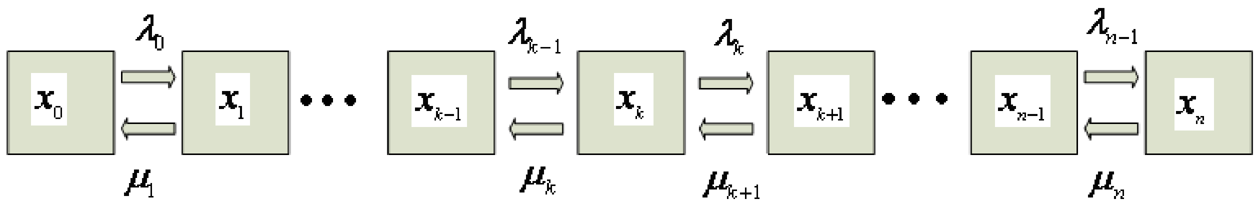
Модель функционирования ВС

Рассмотрим распределенную ВС, состоящую из N ЭМ.

Требуется найти $P_k(t)$, вероятность того, что в момент времени $t \in [0, \infty)$, в ВС, в состоянии отказа находится k ЭМ при условии, что в начальный момент $t = 0$ в системе в состоянии отказа находилось i ЭМ, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Модель функционирования ВС

В рамках процесса рождения и гибели:



Полагая $\lambda_k = (N-k)\lambda, \quad \mu_k = k \cdot \mu, \quad m = N, \quad N < \infty,$

имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} P_0(t) = -N \cdot \lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t), \\ \dfrac{d}{dt} P_k(t) = -((N-k) \cdot \lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k(t) + (N-k+1) \cdot \lambda \cdot P_{k-1}(t) + \\ + (k+1) \cdot \mu \cdot P_{k+1}(t), 1 \le k < N, \\ \dfrac{d}{dt} P_N(t) = -N \cdot \mu \cdot P_N(t) + \lambda \cdot P_{N-1}(t). \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями $P_i(0) = 1, \; P_k(0) = 0, \quad \forall k \ne i$

Решение системы дифференциальных уравнений

Для решения (1) введем производящую функцию:

$$F(z,t)=\sum_{k=0}^{N} z^k \cdot P_k(t) \qquad F(z,0)=z^i.$$

Дифференцируя (1) по переменной t и z, получим соответственно

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{N} z^k \cdot \frac{dP_k(t)}{dt}, \qquad \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\sum_{k=1}^{N} k \cdot z^{k-1} \cdot P_k(t)$$

Суммируя первое уравнение системы (2) со вторым, умноженным на z^k, $k=1,2,\dots,N-1$ и с последним, умноженным на z^N, получим

$$\sum_{k=0}^{N} z^k \cdot \frac{dP_k(t)}{dt}=\dots\dots=\lambda \cdot N \cdot (z-1)\cdot F(z,t)-(z-1)(\lambda z+\mu)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}$$

Решение системы дифференциальных уравнений

Таким образом, при сделанных предположениях, система уравнений (1), приводится к следующему уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = N\lambda(z-1)F(z,t) \qquad (2)$$

Для нахождения общего решение уравнения можно воспользоваться характеристиками $u(F,z,t)=c_1$, $v(F,z,t)=c_2$ и функцией $v=g(u)$.
Для характеристик имеем систему:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{(z-1)(\lambda z + \mu)} = \frac{dF}{N\cdot\lambda\cdot(z-1)\cdot F}$$

, где $F = F(z,t)$

В ходе вычислений применяется формула Лейбница

$$\frac{d^k}{dz^k}\left(A(z)\cdot B(z)\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot A^{(k-j)}(z)\cdot B^{(j)}(z)$$

Вероятности состояний ВС

После преобразований получаем

$$P_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j} \cdot \binom{N-i}{k-j} \cdot \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{j} \cdot \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{k-j} \times$$

$$\times \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{i-j} \cdot \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \right]^{N-k-i+j}$$

Расчет первого и второго момента

Обозначим через $M_i(t)$ – среднее число машин ВС, находящихся в момент времени t в состоянии отказа, при условии, что в момент времени t=0, в ВС в состоянии отказа находилось i машин. По определению, имеем

$$M_i(t) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot P_k(t), \quad M_i(0) = i,$$

Для дисперсии получаем

$$D_i(t) = \sum_{k=0}^{N} k^2 \cdot P_k(t) - \left(M_i(t)\right)^2, \quad D_i(0) = 0$$

Замечаем, что

$$M_i(t) = \frac{\partial}{\partial z} F(1,t) \qquad D_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(1,t) + \frac{\partial}{\partial z} F(1,t) - \left(\frac{\partial}{\partial z} F(1,t)\right)^2$$

Расчет первого и второго момента

После преобразований имеем

$$\begin{cases} M_i(t) = \dfrac{\lambda \cdot N}{\lambda + \mu} + \dfrac{i\mu - (N-i)\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ D_i(t) = \dfrac{N \cdot \lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2} + \dfrac{\lambda^2 (N-i) + \mu(i\mu - \lambda N)}{(\lambda + \mu)^2} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} - \dfrac{\lambda^2 (N-i) + i\mu^2}{(\lambda + \mu)^2} \cdot e^{-2(\lambda+\mu)t}. \end{cases} \quad (3)$$

Метод расчета моментов произвольного порядка

В рамках ТМО, рассматривается однородный Марковский процесс, описываемый системой дифференциальных уравнений, которая адаптируется под конкретную задачу. Использование производящей функции позволяет свести систему уравнений к одному линейному уравнению (в частных производных функции двух переменных $F(z,t)$.

Дифференцируя его по переменной z, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения

$\mu_1(t)$ - момента первого порядка (математического ожидания).

После k - кратного дифференцирования получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k, которая сводится к уравнению

$$\frac{d}{dt}\mu_k(t) + a \cdot \mu_k(t) = f(t, \mu_1(t), \ldots, \mu_{k-1}(t))$$

Начальные условия имеют вид $\mu_1(0) = m \quad \mu_i(0) = 0 \quad \forall i \neq m$

Метод расчета моментов произвольного порядка для модели функционирования ВС

Итак, имеем

$$\begin{cases} M_i(t) = \dfrac{\partial}{\partial z} F(1,t); \\ D_i(t) = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} F(1,t) - \left(M_i(t)\right)^2 + M_i(t). \end{cases} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = N\lambda(z-1)F(z,t) \qquad (2)$$

Дифференцируем его по z, после приведения подобных членов, получаем

$$\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial t \partial z} + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial z^2} + \left(-(N-2)\lambda z + (N-1)\lambda + \mu\right)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} =$$

$$= N\lambda F(z,t) \qquad (5)$$

Метод расчета моментов произвольного порядка для модели функционирования ВС

Полагая в (5) z=1, с учетом (4), имеем

$$\frac{d}{dt} M_i(t) + (\lambda + \mu) M_i(t) = N\lambda \qquad (6)$$

Дифференцируя уравнение в частных производных (5) по z, после приведения подобных членов получаем

$$\frac{\partial^3 F(z,t)}{\partial t \partial z^2} + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial^3 F(z,t)}{\partial z^3} + 2\left(2\lambda z - \lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 F(z,t)}{\partial z^2} - \qquad (7)$$

$$- 2(N-1)\lambda \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = 0$$

Полагаем в (7) z=1, тогда

$$\frac{\partial^3 F(1,t)}{\partial t \partial z^2} + 2\left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 F(1,t)}{\partial z^2} = 2(N-1)\lambda \frac{\partial F(1,t)}{\partial z}$$

Метод расчета моментов произвольного порядка

Подставляя вместо $\dfrac{\partial^2 F(1,t)}{\partial z^2}$ и $\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z}$ их выражения (5)

через $M_i(t)$ и $D_i(t)$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left(D_i(t)+M_i^{\,2}(t)-M_i(t)\right)+2(\lambda+\mu)\left(D_i(t)+M_i^{\,2}(t)-M_i(t)\right)=2(N-1)\lambda M_i(t)$$

Таким образом, учитывая (7), имеем систему уравнений

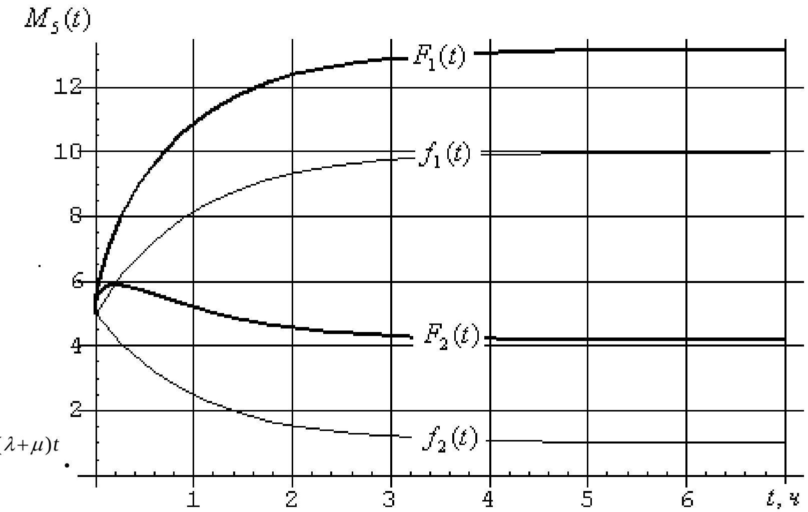
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}M_i(t)+(\lambda+\mu)M_i(t)=N\cdot\lambda, \\ \dfrac{d}{dt}Q_i(t)+2(\lambda+\mu)\cdot Q_i(t)=2\cdot(N-1)\cdot\lambda\cdot M_i(t), \end{cases} \qquad (8)$$

где $Q_i(t)=D_i(t)+M_i^{\,2}(t)-M_i(t)$

Расчет моментов первого и второго порядков

Случай 1. Восстанавливающая система имеет высокую производительность *(решение системы (8))*

$$\begin{cases} M_i(t) = \dfrac{\lambda \cdot N}{\lambda + \mu} + \dfrac{i\mu - (N-i)\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ D_i(t) = \dfrac{N \cdot \lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2} + \dfrac{\lambda^2 (N-i) + \mu(i\mu - \lambda N)}{(\lambda+\mu)^2} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} - \dfrac{\lambda^2 (N-i) + i\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} \cdot e^{-2(\lambda+\mu)t}. \end{cases}$$



$N = 10^3$, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч, $f_1(t) = M_5(t)$, $F_1(t) = M_5(t) + \sigma(t)$;

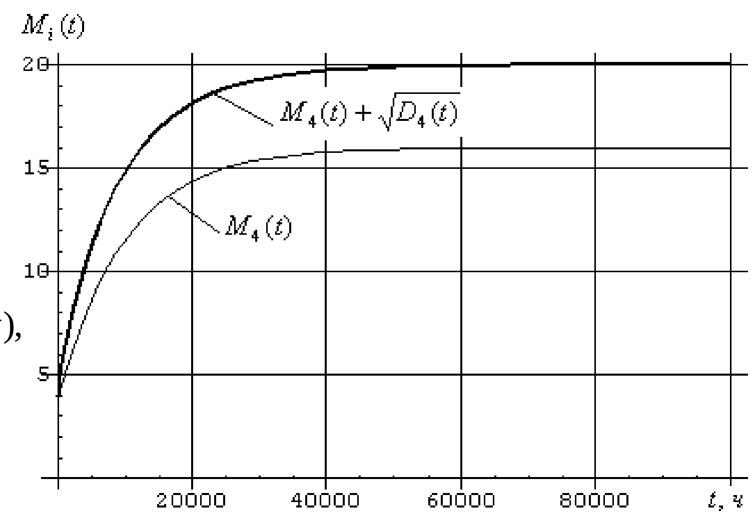
$N = 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $f_2(t) = M_5(t)$, $F_2(t) = M_5(t) + \sigma(t)$.

Случай 2. Восстанавливающая система имеет не высокую производительность

$$\forall \left(t \in [0, \infty)\right), \; M_i(t) \ge m, \; M_i(0) = i, \; D_i(0) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} M_i(t) + \lambda \cdot M_i(t) = N\lambda - m\mu, \\ \dfrac{d}{dt}\left(D_i(t) + M_i^{\,2}(t) - M_i(t)\right) + 2\lambda\left(D_i(t) + M_i^{\,2}(t) - M_i(t)\right) = 2(N\lambda - \mu m) M_i(t), \end{cases}$$

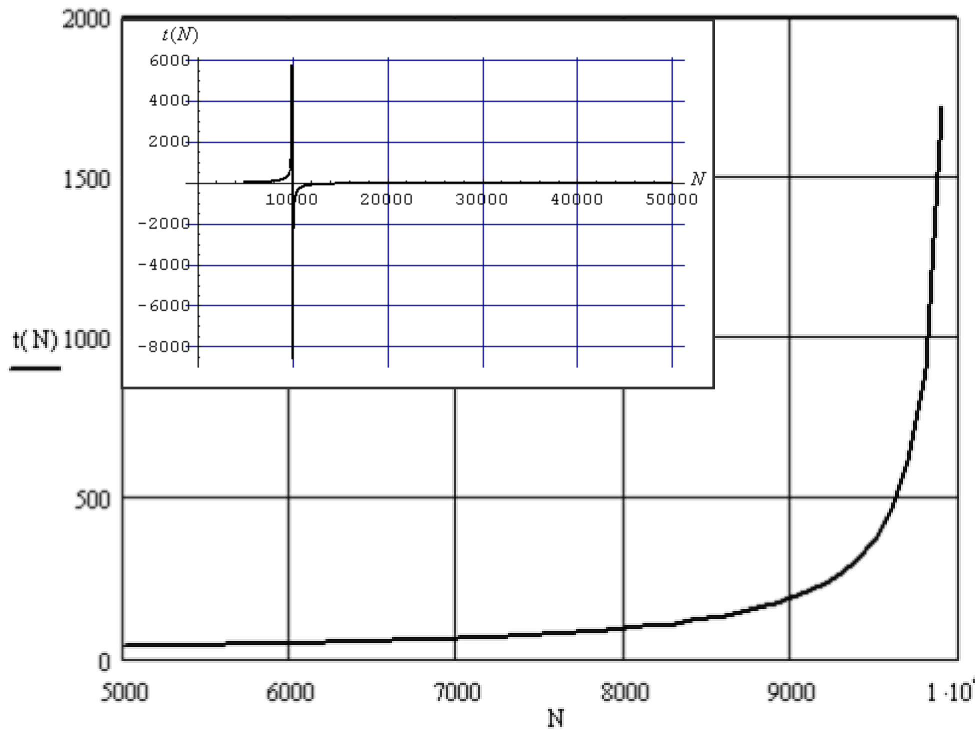
$$\begin{cases} M_i(t) = \dfrac{N\lambda - m\mu}{\lambda} + \left(i - \dfrac{N\lambda - m\mu}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda t}, \\ D_i(t) = \dfrac{N\lambda - m\mu}{\lambda} + \left(i - \dfrac{N\lambda - m\mu}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda t} - i \cdot e^{-2\lambda t}. \end{cases}$$



$N = 10^4 + 16$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ ч $\mu = 1$ 1/ ч

Оценка числа ЭМ в ВС

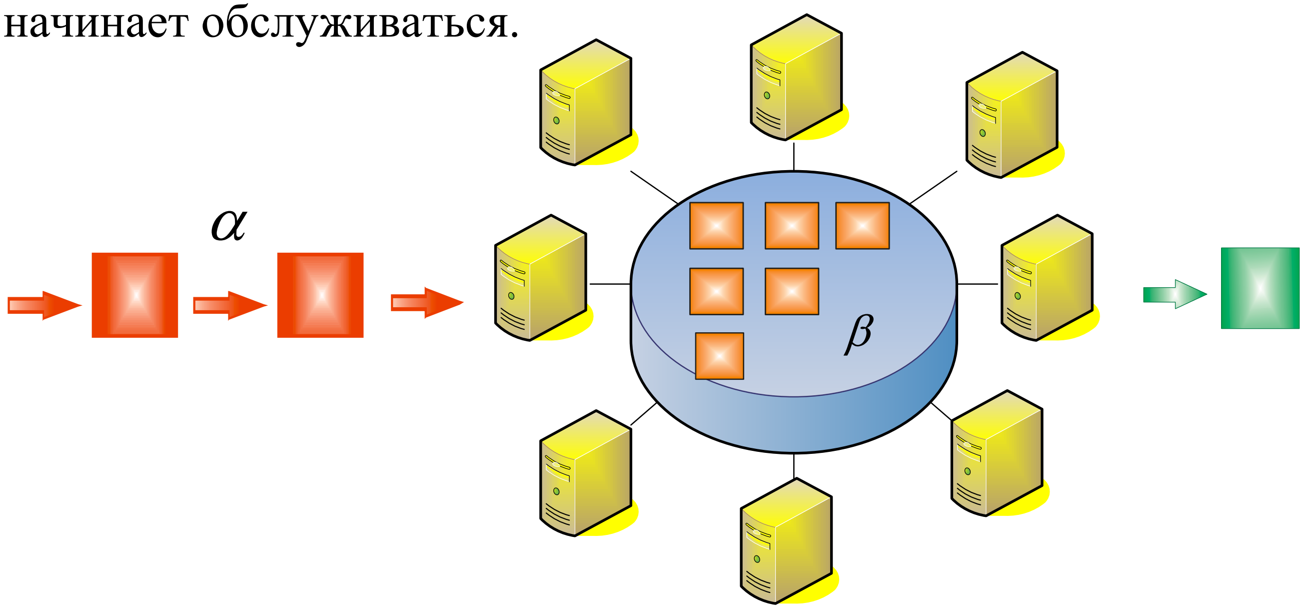
$N = 10^4$, причем, если $N = 2000$, то время выхода ВС на высокопроизводительный уровень $t(2000) \approx 22$ ч., $t(5000) \approx 39$ ч., $t(10000) \approx 2{,}99 \cdot 10^4$ ч.



Зависимость времени t перехода ВС от условий низкой производительности к высокой от числа N ЭМ системы

Обслуживание потока задач

- На большемасштабную ВС поступает поток простых задач интенсивностью α и интенсивностью β их решения. Считаем, что любая задача, поступившая в ВС, сразу начинает обслуживаться.



- Требуется вычислить математическое ожидание $A_i(t)$ - числа задач находящихся в системе, в момент времени t, и соответствующую дисперсию $D_i(t)$, $t \in [0,\infty)$ при начальных условиях:

$$A_i(0) = i\ ,\ D_i(0) \equiv 0\ ,\ i \in E^{\infty}\ .$$

Обслуживание потока задач

Система уравнений

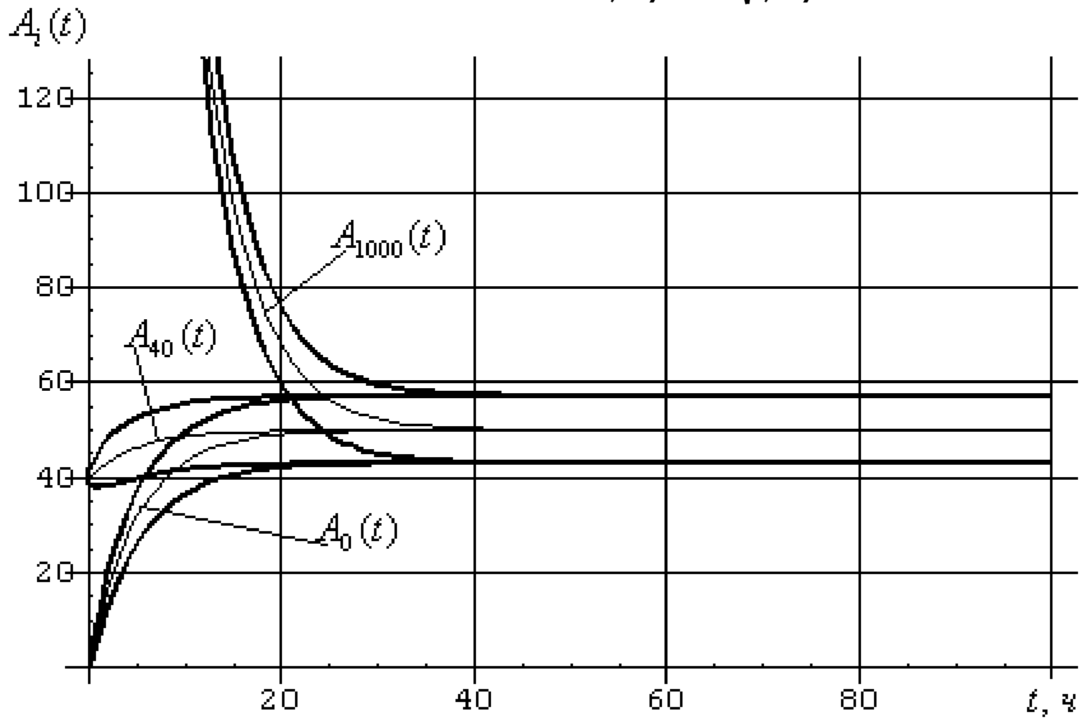
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} A_i(t) + \beta \cdot A_i(t) = \alpha, \\ \dfrac{d}{dt}\left(D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)\right) + 2\beta\left(D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)\right) = 2\alpha A_i(t) \end{cases} \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (3)

$$\begin{cases} A_i(t) = (\alpha / \beta)\left(1 - e^{-\beta t}\right) + i \cdot e^{-\beta t}, \\ D_i(t) = \left(1 - e^{-\beta t}\right)\left(\alpha / \beta + i \cdot e^{-\beta t}\right). \end{cases}$$

Обслуживание потока задач

Для стационарного режима $A \pm \sqrt{D_i} = {}^{\alpha}\!/\!_{\beta} \pm \sqrt{{}^{\alpha}\!/\!_{\beta}}$



- На рисунке , при $\alpha = 10$ 1/ч, $\beta = 0{,}1$ 1/ч и различных начальных условиях, стационарный режим функционирования ВС достигается практически, через 35 часов.
- Учет дисперсии существенен: $\max \sigma = 10$

Осуществимость решения задач

Рассмотрим решение набора *i* (>0) сложных задач на ВС. Сложная задача (представлена параллельной программой) решается на всем выделенном ресурсе.

Пусть выделенный ресурс составляет *n* ЭМ, тогда интенсивность решения задачи будем считать равной $n \cdot \beta$, где β - интенсивность решения задачи на одной ЭМ (оцениваются потенциальные возможности ВС).

Обозначим через $P_k(t)$ - вероятность того, что к моменту времени *t* в ВС находится *k* задач (включая обслуженную),

$$\begin{cases} P_k'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_k(t) + n \cdot \beta \cdot P_{k+1}(t), \; k \in E_1^{i-1}; \\ P_0'(t) = n \cdot \beta \cdot P_1(t); \qquad P_i'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_i(t), \end{cases}$$

с начальными условиями $P_i(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq i.$

Условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{i} P_k(t) = 1, \qquad t \in [0, \infty).$$

Осуществимость решения задач

Вводя производящую функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{n} z^k \cdot P_k(t),$$

получаем

$$z \cdot \frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = n \cdot \beta \cdot (1 - z) \cdot (F(z,t) - P_0(t)),$$

$$F(z,0) = z^i.$$

Осуществимость решения задач

Применяя преобразование Лапласа

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\cdot t} \cdot f(t)dt,$$

Получим

$$\tilde{F}(z,s) = \frac{z^{i+1} - n\cdot\beta\cdot(1-z)\cdot\tilde{P}_0(s)}{s\cdot z - n\cdot\beta\cdot(1-z)}.$$

Тогда

$$F(z,t) = 1 - \exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=1}^{i}(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}/(i-k)! + \exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k}\cdot(n\cdot\beta\cdot t)^k / k!$$

Осуществимость решения задач

$$\begin{cases} A_i(t) = \exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum\limits_{k=1}^{i} k\cdot\dfrac{(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}}{(i-k)!}, \\ D_i(t) = \exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum\limits_{k=1}^{i} k^2\cdot\dfrac{(n\cdot\beta\cdot t)^{i-k}}{(i-k)!} - (A_i(t))^2. \end{cases}$$

Если число i задач велико, то

$$\begin{cases} A_i(t) = i - n\cdot\beta\cdot t, \\ D_i(t) = n\cdot\beta\cdot t, \quad (t < i/n\cdot\beta), \end{cases}$$

Погрешность

$$\Delta_i(t) = \exp(-n\cdot\beta\cdot t)\cdot\sum_{k=i+1}^{\infty}(i-k)\cdot\frac{(n\cdot\beta\cdot t)^k}{k!}.$$

Осуществимость решения задач

Заметим, что

$$M\xi = i/(n \cdot \beta),$$

$$D\xi = i/(n \cdot \beta)^2$$

относятся к числовым характеристикам распределения Эрланга порядка *i*

Пример.

При выделенном ресурсе *n*=100 ЭМ время, необходимое для решения набора из 400 задач при $\beta = 0{,}1\,ч^{-1}$, составит $t_{cp} = 400/(100 \cdot 0{,}1) = 40$ ч. С учетом отклонения, $\sigma = \sqrt{4} = 2$ ч , для среднего времени решения набора задач имеем оценку: $\tilde{t}_{cp} = 40 \pm 2$ ч.

Заключение

Для анализа эффективности функционирования распределенных ВС:

•разработан метод расчета моментов произвольного порядка для систем дифференциальных уравнений рождения и гибели;

•разработаны модели расчета показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости параллельного решения задач;

• получены аналитические выражения как для вероятностей состояний системы, так и для математических ожиданий и дисперсий;

• получена оценка функции распределения времени выхода системы из состояния высокой производительности.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ