**Алгоритм построения дуги траектории динамической системы типа Маркова в распределенной компьютерной среде***

А.Н. Пчелинцев
Тамбовский государственный технический университет, кафедра распределенных вычислительных систем, к.ф.-м.н.
e-mail: pchela9091@rambler.ru

А.Ю. Поветьев
Аспирант
e-mail: pchela9091@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается алгоритм построения дуги траектории динамической системы типа Маркова в распределенной компьютерной среде. В работе указывается, при каком значении параметра системы ее рекуррентные траектории описываются движениями, отличными от почти периодических. Также приводится результат работы комплекса программ, реализующего описываемый алгоритм, для вычислительного кластера.

Рассмотрим движения динамической системы типа Маркова [1, с. 423], задаваемые уравнениями

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\Phi(\varphi, \vartheta)},$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu}{\Phi(\varphi, \vartheta)},$$

на торе

$$x_1 = (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi,$$
$$x_2 = (R + r\cos\vartheta)\sin\varphi,$$
$$x_3 = r\sin\vartheta,$$

где $r$, $R$ – задаются, причем $r \in (0, R)$, $\mu$ – иррациональное число, которое определим в последствии, $\Phi(\varphi, \vartheta)$ – $2\pi$-периодическая функция по каждому аргументу и разлагающаяся в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = a_{00} + \Psi(\varphi, \vartheta) = a_{00} + \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ |m|+|n|\neq 0}}^{+\infty} a_{mn} e^{im\varphi} e^{in\vartheta},$$

где $i$ – мнимая единица,

$$a_{mn} = \frac{1}{(|m|+1)^2(|n|+1)^2} \text{ при } |m|+|n| \neq 0,$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-07-00136).

$$\sum_{\substack{m,n=-\infty\\|m|+|n|\neq 0}}^{+\infty} a_{mn} < \sum_{\substack{m,n=-\infty\\m\neq 0,n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{m^2 n^2} + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{\pi^4}{9} + 2\frac{\pi^2}{3} < \left(\frac{\pi^2}{3}+1\right)^2 \equiv a_{00}.$$

Это представляется важным, поскольку даже в таких простейших случаях, как система типа Маркова, удается установить существование рекуррентных траекторий, описываемых движениями, отличных от почти периодических. Как показано в работе [2], это возможно, когда число $\mu$ представить бесконечной цепной дробью вида

$$\mu = \left[0; \frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \frac{1}{a_3}; \ldots\right],$$

причем *n*-ая походящая $p_n / q_n$ вычисляется как

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

$$p_0 = 0, \; p_{-1} = 1,$$

$$q_0 = 1, \; q_{-1} = 0, \; a_n = (q_{n-1} + 1)^3.$$

Рассчитывая число $\mu$ с точностью $10^{-8}$, получим приближенное значение

$$\mu \approx 0{,}12497857.$$

Чтобы построить движения указанного типа, применение известных численных схем весьма затруднительно (вследствие неустойчивости решений, невозможности отыскать производные высших порядков правой части системы для метода степенных рядов и др.). Суть же применяемого метода в том, что точки на дуге траектории в соответствующие им моменты времени вычисляются независимо друг от друга, что позволяет реализовать вычислительный процесс в распределенной компьютерной среде и свести к минимуму накопление по времени систематической ошибки. При этом для расчета каждой точки на траектории приходится решать нелинейное алгебраическое уравнение вида

$$\varphi = q(\varphi),$$

где

$$q(\varphi) = \frac{t_s - \int_0^{\varphi} \Psi(\tau, \mu\tau + \vartheta_0)\,d\tau}{a_{00}},$$

$$\Psi(\varphi, \vartheta) = 2\Bigg( \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m0}\cos(m\varphi) +$$

$$+ 2\sum_{m,n=1}^{+\infty} a_{mn}\cos(m\varphi)\cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{0n}\cos(n\vartheta) \Bigg),$$

$t_s$ – заданный момент времени, методом последовательных приближений. Заметим, что приближенное значение интеграла в функции $q(\varphi)$ при фиксированном значении $\varphi$ вследствие недостаточной гладкости подынтегральной функции вычисляется методом трапеций.

Алгоритм построения движений динамической системы типа Маркова в распределенной компьютерной среде следующий. Задается длина $T$ отрезка времени $[0,T]$, на котором будем строить дугу траектории системы типа Маркова, а также количество $L$ частей, на которое разобьем этот отрезок. Вычисляем шаг $\Delta t$ по времени как

$$\Delta t = \frac{T}{L}.$$


Рис. 1. Схема работы параллельных процессов в распределенной компьютерной среде.

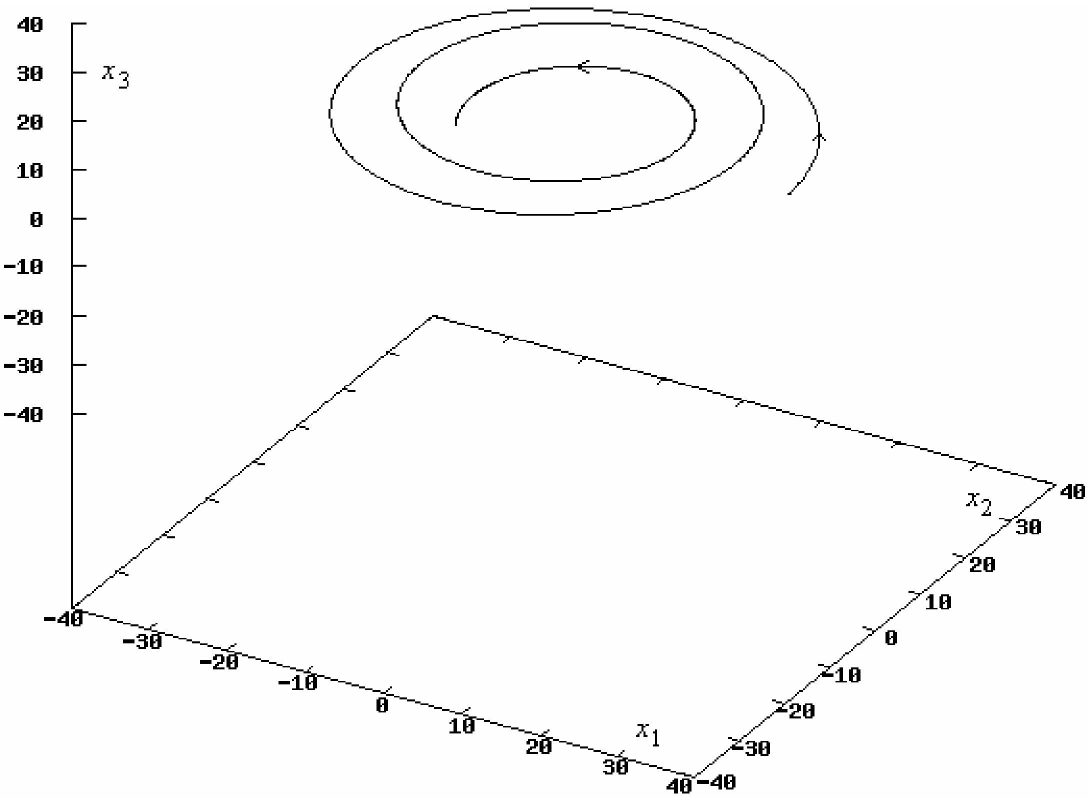


Рис. 2. Дуга траектории системы типа Маркова.

Момент времени $t_{s0} = 0$ соответствует начальной точке. В моменты $t_{sk} = k\Delta t$ ($k = \overline{1, L}$) будем вычислять соответствующие координаты $\varphi_k$ по описанной методике, причем $k$-ую координату будет рассчитывать $k$-ый процесс в распределенной компьютерной среде (рис. 1). Полученный набор точек $(\varphi_k, \vartheta_k)$ переводится в координаты $(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$, где

$$\vartheta_k = \vartheta_0 + \mu\varphi_k,$$

$\vartheta_0$ – задается.

Комплекс программ для вычислительного кластера Тамбовского государственного технического университета, реализующий описанный алгоритм с использованием высокоточной арифметики, можно загрузить по адресу:

http://cluster.tstu.ru/tiki-download_file.php?fileId=27

Одним из результатов его работы является дуга траектории, представленная на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 552 с.

[2]. Пчелинцев А.Н., Погонин В.А. О способе построения дуги траектории динамической системы типа Маркова в распределенной компьютерной среде // Системы управления и информационные технологии. Научно-технический журнал. Москва-Воронеж: Научная книга, 2009. №1.3(35). – С. 398-401.