Построение обобщенно периодических решений систем дифференциальных уравнений с использованием символьных вычислений в распределенной компьютерной среде

М.А. Кириченко
Тамбовский Государственный Технический Университет, кафедра РВС. аспирант
e-mail: kirimedia@gmail.com

Аннотация

Применение метода последовательных приближений с использованием символьных вычислений в распределенной компьютерной среде, позволяет эффективно отыскивать обобщенно периодические решения систем дифференциальных уравнений по сравнению с численными методами.

1. Введение. Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x^1, ..., x^n)$ – векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1, ..., f^n)$ - векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, ..., n$$

на прямом произведении $\mathbb{R} \times \Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, будем считать, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Введем определение обобщенно периодического решения. Пусть $\varphi(t)$ - некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Решение $\varphi(t)$ назовем обобщенно периодическим, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что для всех значений $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + N)| < \varepsilon.$$

Существование же обобщенно периодических решений в общем случае устанавливает следующая теорема. Пусть $\xi(t)$ - решение системы (1), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t. Тогда, какова бы ни была последовательность

$$N_1, N_2, ..., N_k, ..., \quad \lim_{k \to \infty} N_k = \infty,$$

натуральный чисел, найдется такая ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_l}, ..., \quad \lim_{l \to \infty} N_{k_l} = \infty,$$

и такое обобщенно периодическое решение $\varphi(t)$ системы (1), что

$$\lim_{l \to \infty} \xi(t + N_{x_l} - 1) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset [t_0, \infty)$ и

$$\lim_{l \to \infty} \varphi(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}) = \varphi(t)$$

равномерно на всех полуоси $[t_0, \infty)$.

2. Описание метода решения Пусть x_0 - некоторая точка множества Σ и $x_1(t)$ - решение системы (1) с начальными значениями $(0, x_0)$, определенное для всех значений $t \geq 0$ и содержащееся при этих значениях t в некотором компактном множестве $E \subset \Sigma$. Для всех значений $t \geq 0$ положим

$$x_N(t) = x_1(t + N - 1), \quad N = 1, 2, 3, ...$$

Построим последовательность приближений функций $x_N(t)$ к обобщенно периодическому решению системы (1). Так как $x_1(t)$ - решение системы, то

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t f(\tau, x_1(\tau))d\tau$$

$$x_2(t) = x_1(t+1) = x_1(1) + \int_0^t f(\tau, x_1(\tau + 1))d\tau$$

или

$$x_2(t) = x_1(0) + \int_0^1 f(\tau, x_1(\tau))d\tau + \int_0^t f(\tau, x_1(\tau + 1))d\tau$$

В общем случае

$$x_N(t) = x_{N-1}(0) + \int_0^1 f(\tau, x_{N-1}(\tau))d\tau + \int_0^t f(\tau, x_{N-1}(\tau + 1))d\tau$$

В автономно случае правая часть системы периодична с любым периодом. Возьмем период T. Тогда для автономной системы получим

$$x_N(t) = x_{N-1}(0) + \int_0^T f(\tau, x_{N-1}(\tau))d\tau + \int_0^t f(\tau, x_{N-1}(\tau + T))d\tau \tag{2}$$

Для определения начального приближения решения x_0 воспользуемся следующей формулой приближений

$$x_{0,i+1}(t) = x_{0,0} + \int_0^t f(x_{0,i}(\tau))d\tau,$$

где $x_{0,0}$ – некоторый полином заданный произвольно.

Для построения обобщенно периодического решения системы автономных дифференциальных уравнений разработана программа на C++. На входе программа получает исходную систему уравнений, начальное приближение к решению в символьном виде, значение точности вычислений и количество шагов приближения к решению. Программа строит символьное выражение для получения следующего шага приближения к обобщенно периодическому решению. Для этого используем пакет Maxima установленный в операционной системе Linux.

Приведем пример символьного выражения для нахождения первого шага обобщенно периодического решения системы уравнений Лоренца.

```
 1: T:0.01$
 2: f0(t,x0,x1,x2):=10*(x1-x0)$
 3: f1(t,x0,x1,x2):=28*x0-x1-x0*x2$
 4: f2(t,x0,x1,x2):=x0*x1-8/3*x2$
 5: s0_0(t):=1$
 6: s1_0(t):=1$
 7: s2_0(t):=1$
 8: s0_0(0)+integrate(f0(g,s0_0(g),s1_0(g),s2_0(g)),g,0,T)+
 9: integrate(f0(g,s0_0(g+T),s1_0(g+T),s2_0(g+T)),g,0,t);
10: s1_0(0)+integrate(f1(g,s0_0(g),s1_0(g),s2_0(g)),g,0,T)+
11: integrate(f1(g,s0_0(g+T),s1_0(g+T),s2_0(g+T)),g,0,t);
12: s2_0(0)+integrate(f2(g,s0_0(g),s1_0(g),s2_0(g)),g,0,T)+
13: integrate(f2(g,s0_0(g+T),s1_0(g+T),s2_0(g+T)),g,0,t);
```

где T – шаг приближения к решению. Строки 2-4 символьное представление системы Лоренца. Строки 5-7 символьное представление начального приближения к решению. Строки 8-10 символьная формула отыскания следующего шага приближения к решению. На выходе этого выражения мы получим следующее приближение к обобщенно периодическому решению системы уравнений. Для следующего шага подставим полученное приближение на место строк 5-7.

Исходя из формулы построения приближения к решению (2) заметим, что каждый шаг построения решения, зависит только от значения решения на предыдущем шаге. Это позволяет распараллелить вычисления по уравнениям системы. Также распараллеливание вычислений можно проводить по отдельным слагаемым приближения к решению при условии, что начальное приближение представляет из себя полином. Применение распределенных вычислений при отыскании обобщенно периодических решений систем дифференциальных уравнений методом последовательных приближения позволяет сильно уменьшить время отыскания решения и более эффективно решать подобные задачи.

3. Результаты вычислений Для иллюстрации результатов исследуем поведение решений системы Лоренца

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\
\frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz,
\end{aligned}
$$

где σ, r и b – некоторые положительные числа, параметры системы. Для исследования возьмем классические значения параметров системы: $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$, указанных в работе). Система Лоренца автономна и ограничена, следовательно удовлетворяет теореме существования обобщенно периодического решения.

В качестве начального приближения зададим произвольную точку $x = C_x, y = C_y, z = C_z$ Построив по формуле (2) обобщенно периодическое решение, найдем его значение при $t = 0$. Рассчитаем траекторию системы Лоренца из полученной точки и определим время возвращения в окрестность $\delta = 0.2$ начальной точки.

Для начальной точки $x_0(t) = 10, y_0(t) = 10, z_0(t) = 10$ получим

$$
\begin{gathered}
x_{1000}(0) = -15.720831 \\
y_{1000}(0) = -16.587193 \\
z_{1000}(0) = 36.091132
\end{gathered}
$$

Рассчитав траекторию системы Лоренца, получим точки возвращения в окрестность начальной точки

№ точки	Время	x	y	z
1	0	-15.720831	-16.587193	36.091132
2	17.334	-15.659134	-16.566101	35.954224
3	45.017	-15.652555	-16.566140	35.938103
4	67.104	-15.689783	-16.635305	35.964610
5	86.686	-15.812414	-16.750982	36.164029

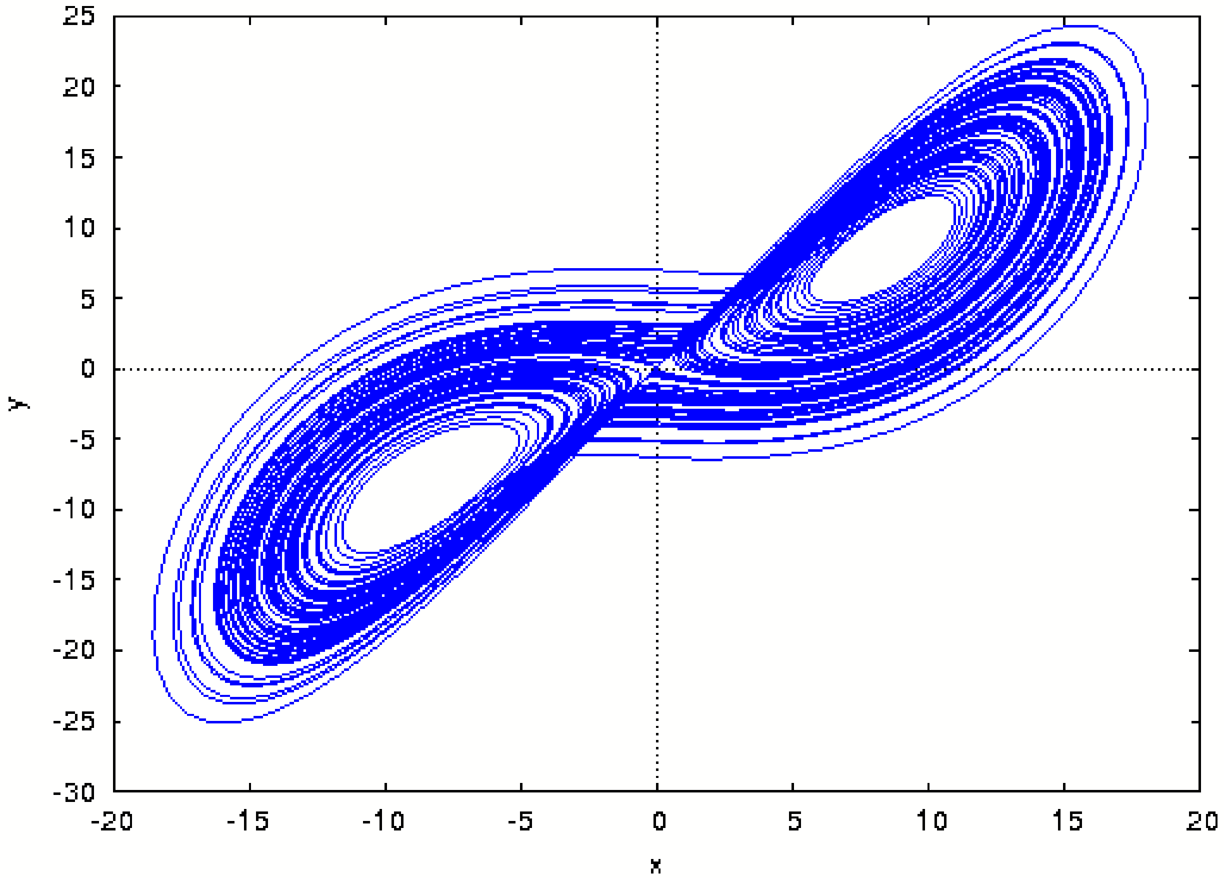

Рис. 1: Проекция на плоскость xOy дуги траектории, построенной на отрезке времени $[0, 90]$ для $x_0(t) = 10, y_0(t) = 10,$ $z_0(t) = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 331 с.

2. *Емельянов С.В., Афанасьев А.П.* Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях – М.: РОХОС, 2004. – 176 с.

3. http://maxima.sourceforge.net. Maxima, a Computer Algebra System.