

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

ISSN 1560-7534
ISSN 1563-0285

СОВМЕСТНЫЙ ВЫПУСК

по материалам международной научной конференции
"Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании"
(СITech-2015)
(24-27 сентября 2015 года)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Том 20

ВЕСТНИК КАЗНУ им. АЛЬ-ФАРАБИ

Серия математика, механика и информатика № 3 (86)

ЧАСТЬ III

АЛМАТЫ – НОВОСИБИРСК, 2015

Вычислительные Технологии

2015

Том 20

Редакционная коллегия

Главный редактор

д.ф.-м.н., академик Ю.И. Шокин

Ответственный секретарь

к.ф.-м.н. А.В. Юрченко

Члены редколлегии:

Абдибеков У.С.	д.ф.-м.н., чл.-к. НИИ РК	Казахстан
Баутин С.П.	д.ф.-м.н., профессор	Россия
Бонту П.	профессор	Франция
Бычков И.В.	д.т.н., академик	Россия
Вонг Р.-Х.	профессор	Китай
Голушко С.К.	д.ф.-м.н.	Россия
Данаев Н.Т.	д.ф.-м.н., профессор, академик НИИ РК	Казахстан
Жайнаков А.	д.ф.-м.н., профессор, академик НИИ РК	Киргизия
Жумагулов Б.Т.	д.ф.-м.н., профессор, академик НИИ РК	Казахстан
Ковеня В.М.	д.ф.-м.н., профессор	Россия
Краузе Е.	профессор	Германия
Крейнович В.	профессор	США
Милошевич Х.	профессор	Сербия
Москвичев В.В.	д.т.н., профессор	Россия
Панченко В.Я.	д.ф.-м.н., академик	Россия
Потатуркин О.И.	д.т.н., профессор	Россия
Рознер К.	профессор	Германия
Рябко Б.Я.	д.т.н., профессор	Россия
Рэш М.	профессор	Германия
Смагин С.И.	чл.-к. РАН	Россия
Сойфер В.А.	чл.-к. РАН	Россия
Стемповский А.Л.	д.т.н., академик	Россия
Тайманов И.А.	д.ф.-м.н., академик	Россия
Темирбеков Н.М.	д.ф.-м.н., профессор, академик НИИ РК	Казахстан
Турицын С.К.	д.ф.-м.н., профессор	Великобритания
Федорук М.П.	д.ф.-м.н., профессор	Россия
Федотов А.М.	д.ф.-м.н., чл.-к. РАН	Россия
Хабаша В.Ж.	профессор	Канада
Четверушкин Б.Н.	д.ф.-м.н., академик	Россия
Чубаров Л.Б.	д.ф.-м.н., профессор	Россия
Шайдуров В.В.	д.ф.-м.н., чл.-к. РАН	Россия
Шокина Н.Ю.	к.ф.-м.н.	Германия
Шрёдер В.	профессор	Германия
Юлдашев З.Х.	д.ф.-м.н., профессор	Узбекистан

Computational Technologies

2015
Vol 20

Editorial Board

Academician Yuri I. Shokin – Editor-in-Chief
Institute of Computational Technologies SB RAS
Academician Lavrentiev Ave. 6, Novosibirsk, 630090, Russia
shokin@ict.nsc.ru
Phone: +7(383)330-61-50, Fax: +7(383)330-63-42

Dr. Andrey V. Yurchenko – Managing Editor
Institute of Computational Technologies SB RAS
Academician Lavrentiev Ave. 6, Novosibirsk, 630090, Russia
yurchenko@ict.sbras.ru
Phone: +7(383)334-91-16, Fax: +7(383)330-63-42

Prof. U.S. Abdibekov, Kazakhstan
Prof. Sergey P. Bautin, Russia
Prof. Patrick Bontoux, France
Prof. Igor V. Bychkov, Russia
Prof. Boris N. Chetverushkin, Russia
Prof. Leonid B. Chubarov, Russia
Prof. Nargozy T. Danaev, Kazakhstan
Prof. Michael P. Fedoruk, Russia
Prof. Anatolii M. Fedotov, Russia
Prof. Sergey K. Golushko, Russia
Prof. W. G. Habashi, Canada
Prof. V.M. Kovenya, Russia
Prof. Egon Krause, Germany
Prof. V.Kreinovich, USA
Prof. Hranislav Miloshevic, Serbia
Prof. Vladimir V. Moskvichev, Russia
Prof. V.Ya. Panchenko, Russia
Prof. Oleg I. Potaturkin, Russia

Prof. Michael M. Resch, Germany
Prof. Karl G. Roesner, Germany
Prof. Boris Ya. Ryabko, Russia
Prof. Vladimir V. Shaidurov,
Dr. Nina Yu. Shokina, Germany
Prof. S.I. Smagin, Russia
Prof. V.A. Soifer, Russia
Prof. Wolfgang Shroeder, Germany
Prof. A.L. Stempkovskii, Russia
Prof. Iskander A. Taimanov, Russia
Prof. Nurlan M. Temirbekov, Kazakhstan
Prof. Sergey K. Turitsyn, UK
Prof. Ren-Hong Wang, China
Associate Professor Ziyavidin Kh. Yuldashev,
Uzbekistan
Prof. Amanbek Zhainakov, Kirgisia
Prof. Bakytzshan T. Zhumagulov, Kazakhstan

Редакционная коллегия

Главный редактор

д.т.н., профессор, академик НАН РК Г.М. Мутанов

Научный редактор: М.А. Бектемесов – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби

Заместитель научного редактора: А.Б. Кыдырбекулы – д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби

Ответственный секретарь: Г.М. Далрбаева – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

Члены редколлегии:

Айсагалмиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинського государственного университета, Азербайджан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Кангуужин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия

Мухамбетжанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Отелбаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

Панфилов М. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия

Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 3(86) 2015

ИБ № 8516

Подписано 14.04.2015 г. Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 30,5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ № 2619.

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома «Қазақ университеті».

Издательский дом «Қазақ университеті»

©КазНУ им. аль-Фараби, 2015

Editorial Board

Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academician **Galymkair M. Mutanov** – Editor-in-Chief

Scientific Editor: *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.* **Maktagali A. Bektemesov**, *al-Farabi KazNU*

Deputy Scientific Editor: *Dr. Sci. (Tech.), Prof.* **Almatbek B. Kydyrbekuly**, *al-Farabi KazNU*

Managing Editor: *Cand.Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.* **Gullazata Dairbayeva**, *al-Farabi KazNU*

Serikbai A. Aisagaliev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Fikret A. Aliev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academician of ANAS, Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Azerbaijan*

Serikzhan Badaev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Darkhan Zh. Akhmed-Zaki – *Dr. Sci. (Tech.), al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Amanbek J. Jaynakov – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academician of NAS KR, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan*

Sergey I. Kabanikhin – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor.-Member of RAS, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Russia*

Aidarkhan Kaltayev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Baltabek E. Kanguzhin – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Victor E. Malyshkin – *Dr. Sci. (Tech.), Prof., Novosibirsk State University, Russia*

Matthias Meinke – *Prof., CFD-Department of the Institute of Aerodynamics, Germany*

Anvarbek M. Meirmanov – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Belgorod National Research University, Russia*

Saltanbek T. Muhambetjanov – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Mukhtarbay Otelbaev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academician of NAS RK, Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan*

Michael Panfilov – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., National Polytechnic Institute of Lorraine, France*

Michael Ruzhansky – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Imperial College London, United Kingdom*

Yurii I. Shokin – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academician of RAS, Institute of Computational Technologies SB RAS, Russia*

Iskander A. Taimanov – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academician of RAS, Sobolev Institute of Mathematics of SB, Russia*

Ualsher A. Tukeyev – *Dr. Sci. (Tech.), Prof., al-Farabi KazNU, Kazakhstan*

Ziyaviddin Kh. Yuldashev – *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., National University of Uzbekistan named by after Mirza Ulugbek, Uzbekistan*

Table of Contents

Session III. Mathematical modeling of technological processes

Numerical Simulation of Turbulent Pollution Transport in Thermally Stratified Atmosphere	10
<i>U. Abdibekov, K. Karzhaubayev</i>	
Modeling of the Ions Streams by the Method of Particles	14
<i>A.Sh. Lyubanova, K.V. Mitin</i>	
Controllability Criterion of Nonlinear Dynamical Systems	19
<i>T.Zh. Mazakov, Sh.A. Jomartova, A.T. Zhakypov, A.T. Tursynbay</i>	
The Expected Inaccuracy in Measuring the Temperature Profiles in Solid Propellant by Thermocouple Elements	24
<i>H. Milosevic, A.D. Rychkov, N. Kontrec, O. Taseiko</i>	
Non-uniform ENO Scheme for Simulation of Supersonic Flows	33
<i>Ye. Moissejeva, A. Naimanova, A. Beketaeva</i>	
The Simulation Modeling Technology of Warehouse Logistics Processes in Distributed Computing Environment	42
<i>I.V. Bychkov, G.A. Oparin, A.G. Feoktistov, V.G. Bogdanova, A.A. Pashinin</i>	
Reduction in the Research of Large-Scale Dynamics with Allowance of the Effects of Magnetic Field Diffusion	51
<i>S. Peregudin, S. Kholodova</i>	
Numerical Investigation one System Reaction-Diffusion with Double Nonlinearity	58
<i>Sh. A. Sadullaeva, G. Pardaeva</i>	
Multidimensional Analogues of Gelfand–Levitan, Marchenko and Krein Equations. Theory, Numerics and Applications	63
<i>S. Kabanikhin, M. Shishlenin</i>	
Mathematical Modelling of Radiating Processes in the Solids Irradiated by Heavy Ions	70
<i>Sh.E. Jeleunova, T.A. Shmygaleva, A.I. Kupchishin, E.V. Shmygalev, A.A. Kupchishin, L.Sh. Cherikbayeva, I.D. Masyrova, B.B. Alirakymov</i>	
Complex Software for Numerical Simulation of Convective Flow of Viscous Incompressible Fluid in a Curvilinear Coordinate System	83
<i>N.M. Temirbekov, Y.A. Malgazhadov, S.O. Tokanova</i>	
The Existence of a Generalized Solution Model of Inhomogeneous Fluid in a Magnetic Field	92
<i>L. Tukenova, A. Skakova</i>	
Analytical Solution of the Problem About Bending of Annular Plates Subject to the Action of the Lateral Load	106
<i>A.N. Tyurekhojayev, G.K. Kalzhanova, A.G. Ibrayev</i>	

Algorithms of Determination by the Trajectory of Robots in the Conditions of Interval Uncertainty of the Data	114
<i>Z. Yuldashev, A. Ibragimov, Sh. Shominasov</i>	
Численное моделирование процесса очистки промышленных стоков в отработанных горных выработках	121
<i>Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров</i>	
Применение компьютерной алгебры в решении Ньютоновой проблемы многих тел . . .	132
<i>Д.М. Диарова, Н.И. Земцова</i>	
Математическое Моделирование переноса нефтяной пленки на поверхности моря	141
<i>А.Ж. Жайнаков, А.К. Хикметов, К.К Каржаубаев</i>	
Задачи уравнения переноса и ядерно-геофизические технологии	151
<i>А.И. Хисамутдинов</i>	
Численный анализ гидродинамических процессов сварочной ванны при электродуговой сварке	162
<i>А. Жайнаков, Р. Султангазиева, Б. Медралиева</i>	
Модель гидравлического разрыва пласта на основе механики и фильтрации в гетерогенной среде	171
<i>В.И. Пеньковский, Н.К. Корсакова, Д.Ж. Ахмед-Заки</i>	
Моделирование нестационарных контактных задач динамики упругих сред	181
<i>Б.Т. Сарсенов</i>	
Математическое моделирование ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения с пограничными слоями нижней и верхней стенки	194
<i>А.О. Бекетаева, Н.Ш. Шахан</i>	
Моделирование электромагнитного поля для различных типов возбуждающих сигналов	204
<i>М.И. Эпов, Э.П. Шурина, Е.П. Штабель, Н.В. Штабель</i>	
Применение неконформных конечноэлементных методов для моделирования процессов с фазовыми переходами	214
<i>Ю.И. Шожин, Э.П. Шурина, Н.Б. Иткина</i>	
Модификации многомасштабного метода конечных элементов для решения задач электромагнетизма на постоянном и переменном токе	219
<i>М.И. Эпов, Э.П. Шурина, Е.И. Михайлова, А.Ю. Кутищева</i>	
Построение операторов индикатора разрывов тензорных полей малого ранга по их известным лучевым преобразованиям	231
<i>Е.Ю. Деревцов, С.В. Мальцева, И.Е. Светов</i>	
О применимости корреляционного анализа для случайных сигналов с нелинейной регрессией	244
<i>В.В. Губарев, Р.В. Терехов и С.А. Пушкарева</i>	

Математическая модель двумерного осесимметричного движения газожидкостной смеси в газлифтной скважине	250
<i>Н.М. Темирбеков, А.К. Тураров</i>	
Численное моделирование размыва грунта у основания платформ гравитационного типа	258
<i>Ю.Н. Захаров, Н.А. Гейдаров, К.С. Иванов</i>	
Процесс затвердевания шликера оксида бериллия с учетом фазового перехода	268
<i>У.К. Жапбасбаев, Г.И. Рамазанова, Э.К. Саттинова, С.А. Шахов</i>	
Задача фильтрации жидкости к разноориентированной горизонтальной скважине в деформируемой трансверсально-изотропной среде	279
<i>Н.Т. Ажисханов, Н.М. Жунисов</i>	

Session III. Mathematical modeling of technological processes

Numerical Simulation of Turbulent Pollution Transport in Thermally Stratified Atmosphere

Ualikhan Abdibekov and Kairzhan Karzhaubayev

Al-Farabi Kazakh National University, al-Farabi av. 71, Almaty, Kazakhstan
ualii1@mail.ru, kairzhan.k@gmail.com

Abstract. This paper presents numerical simulations of pollutant transport in urban area including effects of developed turbulence, buoyancy and stratification. To incorporate the effect of stratification in the incompressible flow solver Boussinesq approximation to the density variation was used. To properly model vertical turbulent heat and concentration fluxes Algebraic Flux Model was used. The results presented in this paper have demonstrated that the inversion layer creates strong capping region, disallowing polluted air to mix with fresh air in the upper layer of the atmosphere.

Keywords: Atmospheric Boundary Layer, turbulence, pollution transport

1 Introduction

As a result of human activity most of the urban areas contains various heat and pollution sources like a power plants, transport, agriculture etc. Asphalt and other buildings may store and reflect sun radiation leading to high surface heating. This processes causes urban territories to become heat and pollution sources in the environment. City topography with high buildings and complex street net creates complex configuration that affects air flow and pollution dispersion.

At the moment simulation of the pollution transport at large scales is based on semi empirical and simple integral methods which takes into account wind intensity and direction [1,2]. However such approaches cannot be applied to simulate micro and mesoscale processes in the atmosphere.

In recent year, a growing interest has been found in applying Computational Fluid Dynamics (CFD) techniques to simulate complex environmental flows, like air flow in urban areas, over complex topography [3]. Numerical simulation of the atmospheric flows hardened by the fact that this kind of flows contains different spatial scales, ranging from the small scale typically used in engineering to the large scale used in meteorology.

2 Physical problem and model description

In the work we considered 24 hour temperature change of the atmosphere of the Almaty city. The city atmosphere is a complex configuration where air flow was influenced by city topography and high repeating factor of the windless situation. Presence of the strong temperature inversions [2] also influences city atmosphere.

Simulation of the air flow includes the following equations: continuity, mean momentum conservation (Reynolds equations), energy conservation and passive scalar transport.

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\langle P \rangle - \langle P_{ref} \rangle)}{\partial x_i} + \beta g_i (\langle T \rangle - \langle T_{ref} \rangle) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} - \tau_{\theta j} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Sc} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x_j} - \tau_{cj} \right) \quad (4)$$

Reynolds stresses were modeled using standard Eddy Viscosity Model (EVM) framework adopting additional equations for the kinetic energy of the turbulence and its dissipation.

Simplified approaches exist to model temperature and concentration fluxes, where, for example, temperature flux is modelled using Simple Gradient Diffusion Hypothesis (SGDH) or its further improvement - Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH). But as it has been shown by [4,5] that both SGDH and GGDH lacks of proper modeling of the vertical heat flux in buoyancy affected flows when gravitation vector is parallel to main heat flux direction. That is why turbulent temperature and concentration fluxes were modeled using Algebraic Flux Model (AFM).

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\tau_{\theta i} = -C_\phi \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \left(\tau_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \xi \tau_{\theta j} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \langle \theta^2 \rangle \right) \quad (6)$$

$$\tau_{ci} = -C_\phi \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \left(\tau_{ij} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x_j} + \xi \tau_{cj} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

Periodic boundary conditions for all variables were used in both of the horizontal directions, while the symmetry boundary condition was used for all variables in the upper top of the domain except for temperature for which the prescribed value of 22 C was used. Because of the high Rayleigh number describing the problem it is impossible to properly resolve near wall viscous sublayer. That restriction lead us to use the so called wall function approach on the bottom of the domain. Numerical solution of the equations (1)-(4) were based on a Finite Volume Method (FVM) [6]. Convective terms were discretized by 2nd order upwind and SMART schemes, diffusive terms were discretized by 2nd order central scheme, unsteady terms were discretized by 2nd order three time level approach. Velocity-pressure coupling was taken into account with iterative SIMPLE algorithm. Rhie-Chow interpolation technique [7] was used to get oscillation free pressure and velocity fields on a collocated grid. SIP solver [8] was used to solve all fields except for a pressure, for which Incomplete Cholesky Conjugate Gradient method was applied.

3 Results

Simplified scenario of the ground heating and pollution dispersion was used to simulate diurnal change of the air temperature and pollution transport. Satellite images of the city were used to mark main city ground areas that can be a main source of the heat and pollution. Diurnal heat source intensity were modeled as a sin dependence from the time changing in the interval 18-22 C (Fig. 1). Other city ground heating were modeled as a sin dependence from the time in the interval 19-21 C. Pollution was treated as a passive scalar, for which we used non dimensional value of 1 at the pollution source. Initial temperature was set to create temperature inversion on a height of 1 km (Fig. 2). The study case corresponds to a horizontal domain of 54x36 km and 4 km height. The results shown correspond to a mesh of 100x80x70 grid points with small mesh refinement up to the wall. City topography was created using available SRTM digital elevation data with a space resolution 90 m.

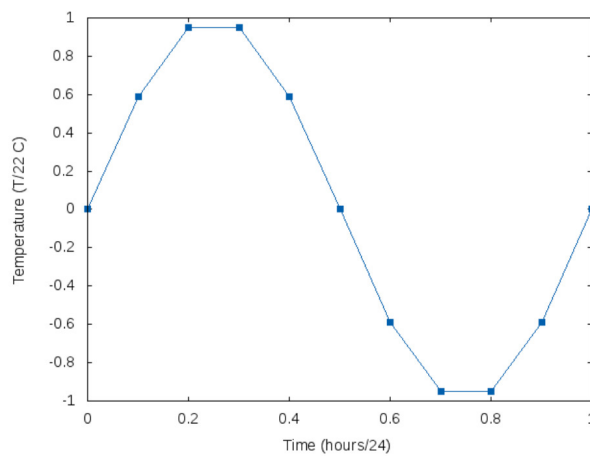


Fig. 1. Diurnal ground temperature change.

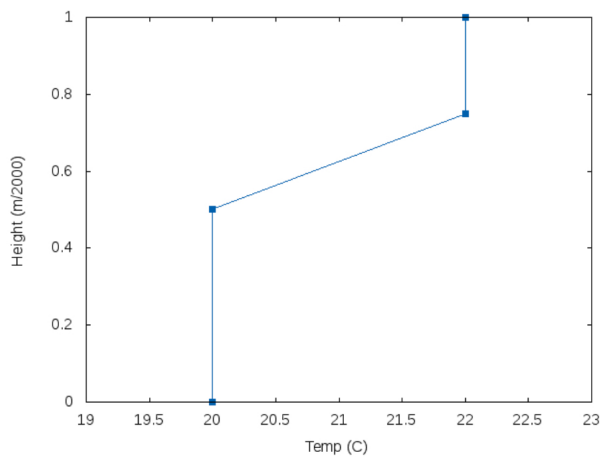


Fig. 2. Initial temperature profile.

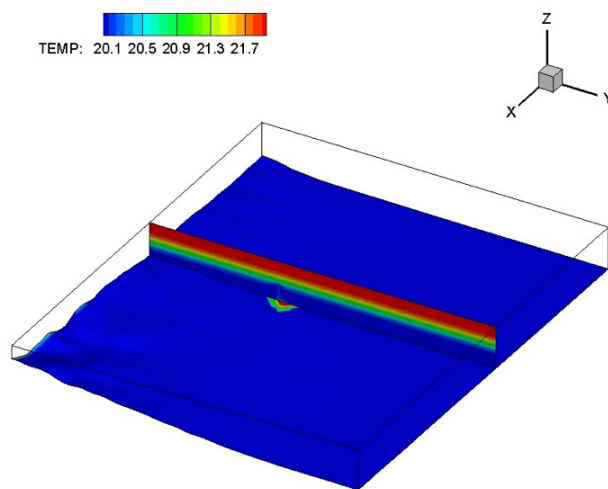


Fig. 3. Temperature distribution at 14:00.

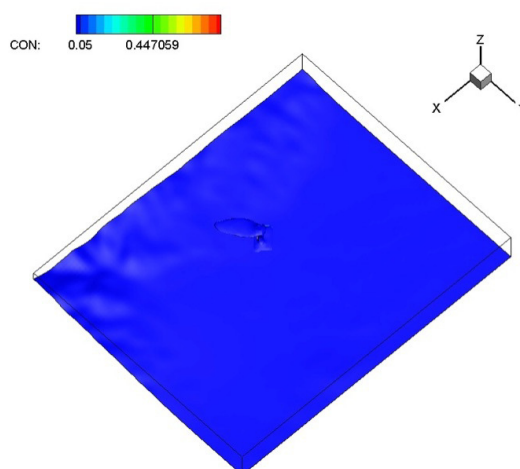


Fig. 4. Concentration distribution at 14:00.

Figures 2-3 shows presence of temperature inversion that blocks vertical air flow, disallowing polluted air to enter into the upper layers of the atmosphere, where it can be mixed with a fresh air or moved by upper layer wind. Blocked by capping region polluted air stays in the lower layer of the city atmosphere. This leads to accumulation of the polluted air on a top of the city.

4 Conclusions

Numerical simulation of turbulent pollution transport in thermally stratified atmosphere of the city was performed with algebraic turbulent flux model for the heat flux and the concentration. Density variation was treated by Boussinesq approach allowing to properly model buoyant flow under small temperature gradients. Finite volume method with realistic digital elevation data from SRTM project allowed to use non orthogonal mesh. Diurnal windless scenario used to investigate the influence of strong temperature inversion. Inverse layers creates strong capping regions making the polluted air to stay in the lower atmosphere of the city, causing accumulation of pollutants in the air.

References

1. Chen F. et al.: The integrated WRF/urban modelling system: development, evaluation, and applications to urban environmental problems. *International Journal of Climatology*. 31/2, 273–288 (2011)
2. Arystanbekova N.H.: Modeling pollution of Almaty air basin, 2nd ed.. Dyke press, Almaty (2011)
3. Flores, Federico, Rene Garreaud, and Ricardo C. Munoz.: CFD simulations of turbulent buoyant atmospheric flows over complex geometry: Solver development in OpenFOAM. *Computers & Fluids* 82, 1–13 (2013)
4. Kenjeres, S., and K. Hanjalic.: Combined effects of terrain orography and thermal stratification on pollutant dispersion in a town valley: a T-RANS simulation. *Journal of Turbulence* 3.026, 1–25 (2002)
5. Rossi, R., D. A. Philips, and Gianluca Iaccarino.: Numerical simulation of scalar dispersion in separated flows using algebraic flux models. *ICHMT DIGITAL LIBRARY ONLINE*, (2009)
6. Ferziger, Joel H., and Milovan Peric.: *Computational methods for fluid dynamics*. Vol. 3. Springer, Berlin (2002)
7. Rhie, C. M., and W. L. Chow.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA journal* 21.11, 1525–1532 (1983)
8. Schneider, G. E., and M. Zedan.: A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numerical Heat Transfer* 4.1, 1–19 (1981)

Modeling of the Ions Streams by the Method of Particles

Anna Sh. Lyubanova and Konstantin V. Mitin

Siberian Federal University,
Svobodny str. 79, 660041 Krasnoyarsk, Russia
lubanova@mail.ru

Abstract. The work is devoted to modeling of flows of the charged particles in an electrostatic field arising in the course of electrolysis between a surface of the cathode and the anode. The mixed method of particles adapted for modeling of the migratory diffusion of a stream of ions in the course of electrolytic refinement is given in the article. At the Eulerian stage potentials of an electrostatic field are modelled by means of Maxwell's equations. At the Lagrangian stage the motion laws and trajectories of ions are developed in the form of the square-law splines. The results of computer modeling for the electrolytic refinement of copper are given.

Keywords: method of particles, Maxwell's equations, electrolytic refinement, square-law spline, mathematical model, migratory diffusion

1 Introduction

The investigation of ions streams in the electrostatic fields is rather actual problem in the science and technology. Such studies are of great importance for the rise in the effectiveness of the metallurgical manufacture, in particular, the electrolytic refining of copper and other metals. Besides, modelling of electric fields allowed to study electric and magnetic fluxes, and also the streams of the charged particles (a dust, gases), which is useful in the design of the industrial filters, and systems of pipeline airing of the deep open-cast mines.

The transfer of substance in the course of the electrolytic refining is carried out by three mechanisms: the molecular diffusion, the migration and the convection. According to this the streams of the diffusion, migration and convection are considered. The total stream involves all of these streams [6].

This paper is devoted to the modeling of the migratory ions stream in the electrostatic field of electrodes as applied to the electrolytic refining and the gas purification.

The algorithms collectively known as "methods of particles" [7]–[9] find increasing applications in the current mathematical modeling. The distinctive feature of these methods is the special mode of discretization wherein the set of discrete objects or the model particles is introduced as a grid of the mobile points. The methods of particles are applied to the problems where the evolution of some medium in a time or the result of such evolution is investigated (see, for example, [4], [7]–[9] and references therein). Initially the methods of particles were gotten the greatest development in the fields of applied research where the wide intellectual and computing resources were concentrated for the large-scale computing experiments. As examples works in the fields of the computing physics of plasma [3], gas dynamics [1]–[2], [7]–[9] and other areas [3,6] can serve as examples of such areas of study.

Among the methods of particles the purely Lagrangian and mixed algorithms are distinguished. The algorithms of the first group are reduced to a numerical integration of dynamic systems of differential equations [4] which describe the trajectories of the interacting particles. The mixed algorithms are characterized by that the evolution of the particle system is modeled in two steps on each temporal interval. In one of the steps, under the fix position of the particles the result of their interaction and (or) collective action on a medium is calculated. The calculation

are carried out on a stationary ("Euler") grid. Therefore this step is called as the Euler stage. Another step, called the Lagrange stage, consists of solving the dynamic system on the next temporal interval provided that the right term of this system was calculated at the Euler stage.

The methods of particles, as a rule, are characterized by rather poor precision. Usually the relative error is as much as few percents. This resulted from the established compromise between the reasonable volume of computations and the possibility to model complicated phenomena. Such approach effects an essential economy of the machine time.

Unlike the problems of physics solving by the methods of particles where the processes run with the high velocity in a short time, the above technological processes are slowly current and takes much time. This determines the choice of the methods of particles-in-meshes for modeling of the technological processes because they feature a large supply of stability and allows for rather fast proceeding through an evolutionary variable. However the methods of calculation of the field potential used in the works mentioned above (for instance, the method of the fast Fourier transformation) are not suitable for the technological processes because of the essential error accumulation with time.

The paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the mathematical model of the stream of the ions. The mixed method of particles is adapted for modeling of the migratory diffusion of a stream of ions in the course of electrolytic refining. At the Eulerian stage potentials of an electrostatic field are modelled by means of Maxwell's equations. At the Lagrangian stage the motion laws and the trajectories of ions are modeled in the form of the square-law splines. In Section 3 the results of the computer modelling of the ions stream are discussed.

2 Mathematical model of the ions stream

As a basic mathematical model of driving the charged particle we take the laws of driving of an ion under the electric force. It is supposed that particles are distributed uniformly at the plane anode. For every portion of a trajectory the separate equations of driving ions are constructed which allows to find the coordinates and the velocity of a particle at any moment t . We consider driving in the normal direction to the surface of electrodes. The real trajectory of driving is casual because the velocity and the acceleration of the charged particle at each point of the trajectories depends on casual collisions with other charged particles or a wall of the dielectric capacity. Therefore the vector of acceleration defined by the electric field strength is found and used for calculation of a velocity at each point.

The strength of the electrostatic field is defined as an antigradient of a potential f of a field (see [7])

$$\mathbf{E} = -\text{grad}f.$$

In accordance with Maxwell's equations

$$-\text{div}\mathbf{E} = \text{div grad}f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Hence the potential f satisfies the Laplace equation in the domain $D = \{x \in (-d/2, d/2), y \in (0, l_1)\}$ and the boundary conditions

$$f(-d/2, y) = q, \quad f(d/2, y) = q_A, \quad f(x, 0) = f(x, l_1) = 0 \quad (2)$$

where q_A – the charge at the anode.

Let the particle reach the second electrode over the period T , i. e. t ranges from 0 to T . We consider so small time interval Δt that the strength $\overline{E} = (E_x, E_y)$ can be taken as being

approximately constant on a portion of the particle trajectory from the point $(x(t), y(t))$ to the point $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$. Then the model of the motion law for the charged particle can be represented in the form of a vector function $\bar{S} = (S_x(t), S_y(t))$ where $S_x(t)$ and $S_y(t)$ are the square splines constructed on the grid: $\omega : t_i = i\Delta t, i = 1, 2, \dots, n, n = T/\Delta t$. On every segment $[t_i, t_{i+1}]$ the vector \bar{S} is defined by functions [7]

$$S_x^i(t) = \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t - t_i)^2}{2} + v_{xi}(t - t_i) + S_x^{i-1}(t_i), \quad (3)$$

$$S_y^i(t) = \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t - t_i)^2}{2} + v_{yi}(t - t_i) + S_y^{i-1}(t_i). \quad (4)$$

where

$$E_{xi} \equiv E_x(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)),$$

$$E_{yi} \equiv E_y(S_x^{i-1}(t_i), S_y^{i-1}(t_i)).$$

In the case of a collision between two particles flying with the velocities $\bar{v}_1(t^*)$ and $\bar{v}_2(t^*)$ at the moment $t^* \in [t_i, t_{i+1}]$ the trajectory of the first particle changed with respect to the following law:

$$S_{1x}^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{1x}^i(t - t_i) + S_{1x}^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{1x}^i(t - t^*) + \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_{1x}^i(t^* - t_i) + S_{1x}^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}; \end{cases} \quad (5)$$

$$S_{1y}^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{1y}^i(t - t_i) + S_{1y}^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{1y}^i(t - t^*) + \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_{1y}^i(t^* - t_i) + S_{1y}^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}; \end{cases} \quad (6)$$

In a similar manner, the trajectory of a second particle is changed by the law

$$S_{2x}^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{2x}^i(t - t_i) + S_{2x}^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{2x}^i(t - t^*) + \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_{2x}^i(t^* - t_i) + S_{2x}^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}; \end{cases} \quad (7)$$

$$S_{2y}^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_{2y}^i(t - t_i) + S_{2y}^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_{2y}^i(t - t^*) + \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_{2y}^i(t^* - t_i) + S_{2y}^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}. \end{cases} \quad (8)$$

When striking the bottom of the electrolytic bath the angle of incidence of the particle is equal to the angle of reflection from the bottom. In this case the trajectory of a particle is

modeled as follows:

$$S_x^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_x^i(t-t_i) + S_x^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} - v_x^i(t-t^*) + \frac{qE_{xi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_x^i(t^*-t_i) + S_x^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}; \end{cases} \quad (9)$$

$$S_y^i(t) = \begin{cases} \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t_i)^2}{2} + v_y^i(t-t_i) + S_y^{i-1}(t_i), & t_i \leq t \leq t^*, \\ \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t-t^*)^2}{2} + v_y^i(t-t^*) + \frac{qE_{yi}}{m} \frac{(t^*-t_i)^2}{2} \\ + v_y^i(t^*-t_i) + S_y^{i-1}(t_i), & t^* \leq t \leq t_{i+1}. \end{cases} \quad (10)$$

In all of the described situations the coordinate z is constant, that is $z = z_0$.

The above model could be used for modeling of the streams of both cations of metal and anions of acid residual. Unlike cations of metal, anions of acid residual migrate freely in the electrolytic bath without the deposition at the electrodes.

3 The computer modeling of a stream of charged particles

The ions of copper are the charged particles of the same type and had the same mass. The mass of such particles is taken to be equal to 1 for all particles. In the initial moment the charged particle resides at a point $(0, y_0, z_0)$. The trajectories of particles are formed by laws (3)–(10) with $m = 1$.

In the electrolysis bath electrodes are parallel to each other. At such disposition of electrodes of $v_{0x} = 0$. Initial coordinates y_0, z_0 of the charged particle is modeled by the Monte-Carlo method as random variables obeys the uniform distribution law. In view of the kinematic equations (6), (7) of the plane motion the first portion of a spline is defined by the formulae (3), (4) for $i = 1$ under the constant strength of an electrostatic field.

Further, the coordinates of the particle (x_1, y_1, z_0) at the moment $t = t_1$ and the average velocity of the transfer of the particle to the point with these coordinates is modeled by means of (3)–(10). The process proceeds until the particle reaches the boundary of the area of modeling. When the particle reaches the lower horizontal boundary of area, the impact of the particle with a bottom of capacity is modeled. If the coordinates of two various particles are coincided at some moment of time, the collision of particles is modeled. In case of coincidence of the coordinates of a particle are coincident with the coordinates of a point at the cathode, then the deposition takes place.

The area of modeling represents the electrolyte-filled space between the alternating cathodes and anodes. The space is surrounded by the dielectric walls and bottom of the bath. The area is parallelepiped in form.

The charge on electrodes is taken to be uniformly distributed, as well as in [7]–[9]. The potentials of electrodes does not depend on their width z and are modeled in the plane of coordinates x and y . For the five-point difference scheme is used for calculation of the potential from the problem (1), (2). The difference scheme is constructed on a grid with the same mesh width h with respect to x and y .

The mathematical model of a stream of particles (1) - (10) can be applied to modelling of gas purification and airing with the only difference that the mass of the charged particles can vary. The computer experiments on modeling of gas purification were pursued for the electrofilter EGAV 1-40-9-6-4 used at Open Company "Krasnoyarsk cement" for refining of depart gases.

4 Conclusion

The proposed algorithm allows to apply the method of particles-in-meshes to modeling a stream of ions between the anode and the cathode is created at electrolytic refinement. The method is applied to modelling of streams of ions of metal and acid residual in the laboratory equipment for. The numerical and computer experiments on were made for modeling the streams of the charged particles in the electrolytic copper refining and gas purification.

References

1. Belotserkovsky, O.M., Davidov, Yu.M.: Metod krupnikh chastits v gazovoi dinamike (Methods of large particles in gas dynamics). Nauka, Moscow (1982)
2. Belotserkovsky, O.M.: Chislennoe modelirovaniye v mekhanike sploshnikh sred (Numerical modelling in a mechanics of continuous media). Nauka, Moscow (1984)
3. Berezin, Yu.A., Vshivkov, V.A.: Metod chastits v razrezhennoi plazme (Method of particles in dynamics of the rarefid plasma). Nauka, Novosibirsk (1980)
4. Vshivkov, V.A., Romanov, D.V., Snytnikov V.N.: Problema samopazogreva modelnoi plazmi v metode chastits (Problem of self-warming up of modelling plasma in the method of particles). Vichislitelniye tehnologii. 4, 62–72 (1999)
5. Grigoriev, Yu.N., Vshivkov, V.A., Fedoruk, M.P.: Chislennoye modelirovaniye metodami chastits-v-yacheykah (Numerical modelling by methods particles-in-meshes). Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk (2004)
6. Grigoriev, Yu.N.: Metod vikhrey-v-yacheykah dlya ploskikh szhimayemikh techenii (Method curls-in-meshes for flat contract currents). Vichislitelniye tehnologii. 9, 41–53 (2004)
7. Damaskin, B.B., Petry, O.A.: Vvedeniye v electrohimicheskuyu kinetiku (Introduction to electrochemical kinetics). Visshaya shkola, Moscow (1983)
8. Lyubanova, A.Sh., Mitin, K.V.: Modelirovaniye potoka zaryazhennikh chastits primenitelno k protsessam gazoочистки (Modelling's of a stream of the charg particles with reference to processes of gas purification). Journal of the Siberian federal university. Series: Technics and technologies. 4, 642-652 (2011)
9. Mitin, K.V., Lyubanova, A.Sh.: Modelirovaniye potokov ionov v protsesse electroliticheskogo rafinirovaniya metodom chastits (Modeling of streams of ions in the course of electrolytic refinement by method of particles) Fundamentalniye issledovaniya. № 9-3, 662-666 (2012)
10. Mitin, K.V.: Modelirovaniye potokov ionov v protsesse electroliticheskogo rafinirovaniya (Modeling of streams of ions in the course of electrolytic refinement) Journal of the Siberian federal university. Series: Technics and technologies. 6, 527-533 (2013)

Controllability Criterion of Nonlinear Dynamical Systems

T.Zh. Mazakov, Sh.A. Jomartova, A.T. Zhakypov, and A.T. Tursynbay

Kazakh National University named after Al-Farabi,
al-Farabi. av. 71, 050012 Almaty, Kazakhstan
jomartova@mail.ru

Abstract. This paper devotes to controllability of nonlinear dynamical systems. Main result of this work is controllability criteria, received on the basic of application of the interval analysis.

Keywords: control, criterion, interval

1 Introduction

Currently, increased requirements for the design, operation of complex technical objects and technological processes, as well as management. In connection with this circumstance developed new mathematical models of dynamic processes described by nonlinear differential equations. Thus there is a need for further development of the theory of nonlinear dynamical systems, improve understanding of the goals of management. Many technical problems of the structure of controlled dynamic systems and its parameters are known with some error. Application of interval analysis will take into account such errors.

2 Formulation of the Problem

Consider a system of control described by nonlinear ordinary differential equations

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

where x - n -n-vector, elements of which are the continuously differentiable functions by their arguments, x - n -dimensional system state vector, u - scalar control.

There given the limitations for control

$$u(t) \in U = \{u(t) : -L \leq u(t) \leq L, t \in [t_0, t_1]\}. \quad (2)$$

Investigating the problem of the existence of control, which satisfies to constraints (2) and transfers the system from the initial state

$$x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

to the specified final state

$$x(t_1) = x_1 \quad (4)$$

in a fixed time $t_1 - t_0$ [1].

By the properties imposed on the right side of the system of equations of the Cauchy problem (1) - (3) for a fixed control $u(t) \in U$ followed the conditions of theorems of existence and uniqueness of solution $x(t), t \in [t_0, t_1]$ [2].

Rewrite the Cauchy problem (1) - (3) in the form of integral recurrence

$$x_{k+z}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_k(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (5)$$

By the properties imposed on the right-hand side of equation (1), and limitations on the function $u(t)$ in [1] it is proved that the method of successive approximations (5) converges to the solution absolutely and uniformly for any fixed control.

Then the problem of control is reduced to the investigation of the following problem: whether there is at least one control $u(t) \in U$, in which the solution of the integral equation (5) at the time t_1 satisfies the condition (4).

To solve this problem we apply the results of the interval analysis [4]. We denote by $[f]_i = (f_i, 0)$ - the interval with center f_i and with radius 0, by $[\nu] = (0, L)$ - the interval from $-L$ to L .

Substituting in equation (5) interval $[\nu] = (0, L)$ instead of function $u(t)$ we obtain the interval integral equation

$$[x]_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [f]([x]_k(\tau), [\nu], \tau) d\tau \quad (6)$$

Theorem. In order for the investigating system was managed, there is necessary and sufficient that the given vector x_1 of the right-hand side of (4) belonged to interval vector $[x]_{k+1}(t)$.

As an example, consider the problem of Zermelo [5]. Managed process is described by the following system of differential equations

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = u. \quad (7)$$

There given the limitations for control

$$u(t) \in U = u(t) : -0.5 \leq u(t) \leq 0.5, t \in [t_0, t_1]. \quad (8)$$

As an initial state given the coordinates

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

As a final state given the coordinates

$$x(10) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In [6] there are the calculations that the optimal speed time for the sample is in the range 3.5-5 seconds.

3 Program Code

For a numerical calculation with using of library of the interval mathematics [6] there developed a program in Delphi, and the main text of which is given below:

```
Const n=3;m=100;h=0.05;izik=10;kt=10;
Type Interval=record
  med,rad:real;
end;
MatIntr=array[1..n,1..n] of Interval;
VecIntr=array[0..n] of Interval;
```

```

TForm1 = class(TForm);

var
Form1: TForm1;
x,xk,xn:array[1..m] of VecIntr;
rr,rm,u:Interval;
i,j,k,ij:integer;
r1,r2,r3,r4,r5,r6,x1t,x2t,x3t,h1:real;
ch:string;
fotl:TextFile;
odin_p_int,odin_m_int,null_int:Interval;

begin
odin_p_int.med:=1.0; odin_p_int.rad:=0.0;
odin_m_int.med:=-1.0; odin_m_int.rad:=0.0;
null_int.med:=0.0; null_int.rad:=0.0;
AssignFile(fotl,'d:\yprav.txt'); rewrite(fotl);
x1t:=3.0; x2t:=4.0; x3t:=0.0;
u.med:=0.0; u.rad:=0.5;
for i:=1 to m do begin
for j:=1 to 3 do xk[i,j].rad:=0.0;
xk[i,1].med:=(i-1)*x1t/m;
xk[i,2].med:=(i-1)*x2t/m;
xk[i,3].med:=(i-1)*x3t/m;
end;
for k:=1 to izik do begin
for j:=1 to 3 do begin xn[1,j].med:=1.0; xn[1,j].rad:=0.0; end;
{ xn[1,3].med:=0.0;}
for i:=1 to m-1 do begin
rm:=xn[i,1];
r5:=xk[i,3].med-xk[i,3].rad; r3:=cos(r5);
r6:=xk[i,3].med+xk[i,3].rad; r4:=cos(r6);
r1:=r3;
r2:=r4;
if (r1>r4) then r1:=r4;
if (r2<r3) then r2:=r3;
h1:=(r6-r5)/kt;
for ij:=1 to kt-1 do begin
r5:=r5+h1; r3:=cos(r5);
if (r1>r3) then r1:=r3;
if (r2<r3) then r2:=r3;
end;
r3:=0.5*(r1+r2); r4:=0.5*abs(r2-r1);
rr.med:=h*r3; rr.rad:=h*r4;
AddInN(rm,rr,xn[i+1,1]);

ch:='r1='+FormatFloat('#####0.00',r1)+' ';
ch:=ch+'r2='+FormatFloat('#####0.00',r2)+' ';

```

```

ch:=ch+'rr=('+FormatFloat('#####0.00',rr.med)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',rr.rad)+' ');
ch:=ch+'rm=('+FormatFloat('#####0.00',rm.med)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',rm.rad)+' ');
ch:=ch+'xn=('+FormatFloat('#####0.00',xn[i+1,1].med)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',xn[i+1,1].rad)+' ');

{   Writeln(fotl,ch);}
    rm:=xn[i,2];
r5:=xk[i,3].med-xk[i,3].rad;   r3:=sin(r5);
r6:=xk[i,3].med+xk[i,3].rad;   r4:=sin(r6);
r1:=r3;
r2:=r4;
if (r1>r4) then r1:=r4;
if (r2<r3) then r2:=r3;
h1:=(r6-r5)/kt;
for ij:=1 to kt-1 do begin
    r5:=r5+h1; r3:=sin(r5);
    if (r1>r3) then r1:=r3;
    if (r2<r3) then r2:=r3;
end;
r3:=0.5*(r1+r2); r4:=0.5*abs(r2-r1);
rr.med:=h*r3;   rr.rad:=h*r4;
AddInN(rm,rr,xn[i+1,2]);
    rm:=xn[i,3];
rr.med:=h*u.med;   rr.rad:=h*u.rad;
AddInN(rm,rr,xn[i+1,3]);

ch:='k='+IntToStr(k)+' i='+IntToStr(i)+' ';
ch:=ch+'t='+FormatFloat('#####0.00',i*h)+' ';
r1:=xn[i+1,1].med;r2:=xn[i+1,1].rad;
ch:=ch+'('+FormatFloat('#####0.00',r1)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',r2)+' ');
    r1:=xn[i+1,2].med;r2:=xn[i+1,2].rad;
ch:=ch+'('+FormatFloat('#####0.00',r1)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',r2)+' ');
    r1:=xn[i+1,3].med;r2:=xn[i+1,3].rad;
ch:=ch+'('+FormatFloat('#####0.00',r1)+' ');
ch:=ch+FormatFloat('#####0.00',r2)+' ');
Writeln(fotl,ch);
end;
for i:=1 to m do for j:=1 to 3 do xk[i,j]:=xn[i,j];

    ShowMessage(ch);
end;
CloseFile(fotl);
end.

```

4 Results

The software has an iterative linearization to compute the values of interval nonlinear equations. Integrals were considered in step 0.05. Results are presented in Table

1	0.5	(1,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,08)
1	1.0	(2,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,11)
1	1.5	(2,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,14)
1	2.0	(3,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,16)
1	2.5	(3,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,18)
1	3.0	(4,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,19)
1	3.5	(4,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,21)
1	4.0	(5,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,22)
1	4.5	(5,40 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,23)
1	4.95	(5,95 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,25)
2	0.5	(1,27 0,01)	(1,42 0,00)	(1,00 0,08)
2	1.0	(1,54 0,01)	(1,84 0,01)	(1,00 0,11)
2	1.5	(1,81 0,02)	(2,26 0,01)	(1,00 0,14)
2	2.0	(2,07 0,03)	(2,67 0,02)	(1,00 0,16)
2	2.5	(2,34 0,04)	(3,09 0,02)	(1,00 0,18)
2	3.0	(2,61 0,04)	(3,50 0,03)	(1,00 0,19)
2	3.5	(2,87 0,05)	(3,91 0,03)	(1,00 0,21)
2	4.0	(3,13 0,06)	(4,32 0,04)	(1,00 0,22)
2	4.5	(3,40 0,07)	(4,73 0,04)	(1,00 0,24)
2	4.95	(3,63 0,07)	(5,10 0,05)	(1,00 0,25)
3	0.5	(1,27 0,01)	(1,42 0,00)	(1,00 0,08)
3	1.0	(1,54 0,01)	(1,84 0,01)	(1,00 0,11)
3	1.5	(1,81 0,02)	(2,26 0,01)	(1,00 0,14)
3	2.0	(2,07 0,03)	(2,67 0,02)	(1,00 0,16)
3	2.5	(2,34 0,04)	(3,09 0,02)	(1,00 0,18)
3	3.0	(2,61 0,04)	(3,50 0,03)	(1,00 0,19)
3	3.5	(2,87 0,05)	(3,91 0,03)	(1,00 0,21)
3	4.0	(3,13 0,06)	(4,32 0,04)	(1,00 0,22)
3	4.5	(3,40 0,07)	(4,73 0,04)	(1,00 0,24)
3	4.95	(3,63 0,07)	(5,10 0,05)	(1,00 0,25)

The numerical results presented in the table, have shown the effectiveness of the proposed criterion of control and the possibility of their use in practical applications.

References

1. Voronov, A.A.: Stability, Controllability, Observability - M.: Nauka (1979)
2. Pontriagin, L.S.: Ordinary Differential Equations - M.: Nauka (1974)
3. Verlan, A.F., Sizikov V.S.: Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs - Kiev: Naukova Dumka (1986)
4. Shokin, I. I.: Interval Analysis - Novosibirsk: Nauka (1986)
5. Evtushenko, I.G.: Methods for Solving Extreme Problems and Their Application in Systems Optimization - M.: Nauka (1982)
6. Mazakov, T.Zh., Jomartova, Sh.A., Ospanova, M.K.: Library of Procedures of Interval Mathematics. J. Materials of the First International scientific-practical conference «Informatization of society», 160–162 (2004)

The Expected Inaccuracy in Measuring the Temperature Profiles in Solid Propellant by Thermocouple Elements

H. Milosevic^{1*}, A. D. Rychkov², N. Kontrec¹, and O. Taseiko³

¹Faculty of Science, University of Pristina in Kosovska Mitrovica,
Kosovska Mitrovica, Serbia

²Institute of Computational Technologies of Siberian Branch of
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

³Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia,
{mhrane, prof.a.d.rychkov, taseiko}@gmail.com, natasa_radenkovic@yahoo.com

Abstract. The behavior thermocouple in a solid medium is an interesting opportunity problem for accuracy of temperature measurement. This work considers interaction of thermocouple embedded in the solid substance pyrolyzed by external heat source with heat wave propagating inside the substance from the surface of its pyrolysis. Numerical simulation has shown that significant difference in the values of thermal conductivity coefficients of solid substance and thermocouple material results in the heat flow along thermocouple wires inside the substance that substantially changes thermo junction temperature thus misrepresenting thermocouple data.

Keywords: numerical simulation, heat transfer in solids, finite-difference methods, thermocouple measurement

1 Introduction

Subsurface thermocouple sensors are widely applied in various technical apparatus used for heat flux measurement in complex heat-stressed structures [1] and in various heat transfer devices [1] as well as at combustion of unitary solid fuels [2,3,4]. The evaluation of the consistency of values determined on the basis of thermocouple data becomes a problem. Errors result from the difference of thermophysical properties of thermocouple material and studied substance. At large temperature gradients in the heated substance, as a rule, heat outflow from the surface increases since thermal conductivity of metal thermocouples turns out to be substantially higher than thermal conductivity of the studied object substance. Extra difficulties are caused by variability of distance to the heat transfer surface conditioned by pyrolysis (carry-over) of the substance. In axisymmetrical statement, this problem was considered earlier in the work [5].

2 Mathematical Model Of Heat Wave Interaction With Thermocouple

Consider the process of temperature profile measurement in condensed substance pyrolyzed under the influence of external heat source. Formulate three-dimensional non-stationary problem of heat transfer between the solid and the embedded thermocouple (Fig. 1) assuming that substance pyrolysis rate and its surface temperature are constant. The thermocouple head is a sphere with radius R_m intersected at some angle 2α by two cylindrical conductors each with radius r_m . In this case, there are two planes of symmetry which allow reducing the size of the calculated area to a quarter from the full one. The view of solution area is shown in (Fig. 1a). Values of the angle α changed from 0 to 60°. It was assumed that at $\alpha = 0$ the wires were located so close to each other

* The work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 09-01-12023ofi), and Project nr III 44006 financially supported by Ministry of Education, Science and Technology, Republic of Serbia, period 2010-2015.

that they could be replaced by one wire with double section area. In Cartesian coordinate system, this area is $D\{x_s(y, z, t) \leq x \leq x_{\max}, 0 \leq y \leq y_{\max}, 0 \leq z \leq z_{\max}, t \geq 0\}$, which external borders are selected at rather large distance from the thermocouple head to avoid the influence of heat transfer between the substance and the thermocouple on temperature distribution. Left boundary of the area is a plane surface of pyrolysis moving inside the substance with constant velocity r_b , and its position is determined by the correlation $x_s(y, z, t) = x_s(y, z, 0) + r_b t$. Coordinate origin is in the geometry center of the thermocouple spherical head. Equation of thermal conductivity in the area D is written in divergence form

$$\frac{\partial(\rho CT)}{\partial T} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \tag{1}$$

where C , ρ and λ are specific heat capacity, density, and coefficient of heat conductivity.

These values are assumed constant but different in the areas occupied by the substance and thermocouple at which boundaries they change unevenly.

Recording of the equation (1) in divergence form provides correct calculation of heat fluxes in the case of discontinuous values of thermophysical parameters.

For equation (1), the following boundary conditions were set:

$$\begin{aligned} T(x_s, y, z, t) &= T_s; \\ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_{\max}} &= 0, \\ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=y_{\max}} &= \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=y_0}, \\ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_{\max}} &= \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0. \end{aligned}$$

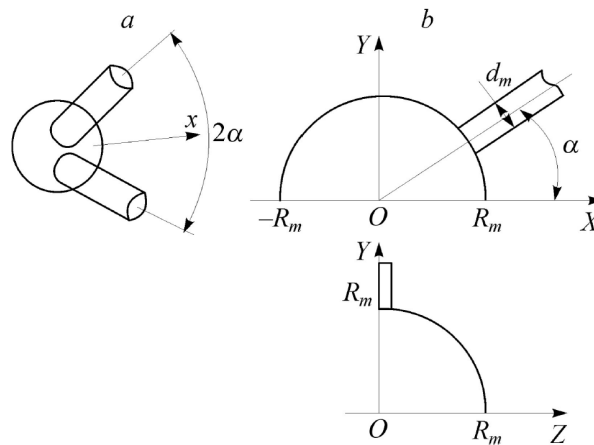


Fig. 1. Thermocouple arrangement scheme (a) and area of solution (b).

Initial conditions were set from the known Michelson solution describing temperature distribution in the plane heat wave moving along the OX axis with constant velocity r_b :

$$T(x, y, z, 0) = T_0 + (T_s - T_0) \exp(-r_b(x - x_s(0))C_p \rho_p / \lambda_p),$$

where index p relates to the substance parameters, T_s and T_0 are the pyrolysis temperature and initial temperature that were assumed constant. Initial position of the left boundary $x = x_s(0)$ is selected rather far from the thermocouple head top so that temperature distribution in thermocouple becomes close to T_0 .

3 Numerical Method Of Solution

For numerical solution of equation (1), the finite volume method was applied to carry out calculations on random finite-difference grid. The equation was written in in-tegral form for arbitrary fixed volume V :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} Q dV + \oint_S \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{S}} = 0, \quad (2)$$

where $Q = C\rho T$, $\vec{\mathbf{F}} = -\lambda\nabla T$ is heat flux through the normal-oriented element $d\vec{\mathbf{S}}$ of the surface S limiting the volume V . In the area D , let us build arbitrary difference grid with each cell topologically equivalent to parallelepiped. Designate the volume of such cell as $V_{i,j,k}$ and the average value Q on the n -th layer in time related to the center of such cell via $Q_{i,j,k}^n$. Then equation (2) is approximated by the following difference relation with the second order of accuracy in time and space:

$$\begin{aligned} & \frac{4Q_{i,j,k}^{n+1} - 3Q_{i,j,k}^n + Q_{i,j,k}^{n-1}}{2\tau} V_{i,j,k} + \left[(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i+1/2}^{n+1} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i-1/2}^{n+1} \right. \\ & \left. + (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j+1/2}^{n+1} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j-1/2}^{n+1} + (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k+1/2}^{n+1} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k-1/2}^{n+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where τ is the step in time. Scalar productions in square brackets are heat fluxes through respective areas of the volume facets $V_{i,j,k}$ multiplied by single normal to them. Method of their calculation is described in the work [6]. The obtained difference scheme is implicit, and for its solution we may apply the following iteration scheme based on the introduction of pseudo-time on each time layer in time:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_{i,j,k}^{n+1,s+1} - Q_{i,j,k}^{n+1,s}}{\tau_1} + \frac{4Q_{i,j,k}^{n+1} - 3Q_{i,j,k}^n + Q_{i,j,k}^{n-1}}{2\tau} \right] V_{i,j,k} \\ & + \left[(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i+1/2}^{n+1,s} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i-1/2}^{n+1,s} + (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j+1/2}^{n+1,s} \right. \\ & \left. - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j-1/2}^{n+1,s} + (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k+1/2}^{n+1,s} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k-1/2}^{n+1,s} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

where τ_1 is the step in pseudo-time and s is the number of iteration in pseudo-time. For realization (4), the scheme of splitting in spatial variables is used [7] (the subscripts are partially omitted):

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{s+1/3} - \delta^s}{\tau_1} V_{i,j,k} - \Lambda_1 \delta^{s+1/3} = \left[\frac{4Q_{i,j,k}^{n+1,s} - 3Q_{i,j,k}^n + Q_{i,j,k}^{n-1}}{2\tau} \right] V_{i,j,k} \\ & + \left[(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i+1/2}^{n+1,s} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{i-1/2}^{n+1,s} + (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j+1/2}^{n+1,s} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{j-1/2}^{n+1,s} \right. \\ & \quad \left. (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k+1/2}^{n+1,s} - (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}})_{k-1/2}^{n+1,s} \right], \quad (5) \\ & \frac{\delta^{s+2/3} - \delta^{s+1/3} \tau_1}{V_{i,j,k}} + \Lambda_2 \delta^{s+2/3} = 0, \\ & \frac{\delta^{s+1} - \delta^{s+2/3}}{\tau_1} V_{i,j,k} + \Lambda_3 \delta^{s+1} = 0, \quad Q^{n+1,s+1} = q^{n+1,s} + Q^{s+1}. \end{aligned}$$

Here δ^s are the corrections to the value Q ; A_1, A_2, A_3 are the difference operators considering only the second derivatives in respective directions. After iteration convergence on pseudo-time $\delta^s = 0$, exact approximation of complete initial equation takes place. The boundary conditions for δ^s are preset as follows. On the left boundary $\delta^s = 0$, on the other ones, "soft" boundary conditions are set. To calculate the value Q at the first step in time ($n = 0$) in the scheme (5), time approximation of the first order of accuracy was used since the values of the grid function $Q_{i,j,k}^{-1}$ are not known.

To build the curvilinear spatial difference grid we used the method based on numerical solution (scheme of stabilizing correction) of inverted two-dimensional Beltrami equations or diffusion in relation to the control metric [8]. The advantage of this method is possibility to build adaptive difference grids with preset properties. In particular, using the control metric we may control thickening of the grid nodes. This technology served to build the curvilinear block difference grid in the area D ; it thickened towards the area boundaries occupied by thermocouple. The grid was quasi-orthogonal in the vicinity of the section boundaries between the substance and the thermocouple. Such grid provided acceptable accuracy of calculations at small number of its nodes.

In the area between the left boundary and the thermocouple head, uneven rectangular difference grid was built that served to use the method of pyrolysis surface "trap-ping" in the grid node. The essence of the method is that the step in time was selected in such a way that at each further step in time, a position of the left boundary $x_s(t + \Delta t) = x_s(t) + r_b \Delta t$ coincided with the right closest vertical line of the difference grid. Then, a grid transformation during solution is not needed. Positions of the upper and right boundaries were selected to avoid significant effect on temperature distribution in the area occupied by thermocouple. The difference grid did not match the area boundaries occupied by thermocouple. Therefore, values of thermal conductivity coefficient at the cell boundaries were calculated as geometrical mean between its values at the centers of the adjacent cells. The values of $C \cdot \rho$ were calculated at the cell centers considering shares of these values for thermocouple and substance in the cell volume.

Accuracy of numerical solution was evaluated by calculations on progressively thickening grids. As a result, it was ascertained that the difference scheme with the number of grids in the area D $110 \times 110 \times 110$ over the coordinate axes provided relative accuracy of temperature calculations of approximately 0.1%.

4 Calculation Results

The calculations were performed for various radii of thermocouple head R_m , the wires' radii r_m were determined from the correlations $r_m/R_m = 0.2$ and 0.75 . The following values of thermophysical parameters were used:

$$\rho_p = 1.6[\text{g}/\text{cm}^3], \quad \rho_m = 8[\text{g}/\text{cm}^3], \quad C_p = 0.3[\text{cal}/(\text{g}\cdot\text{K})], \quad C_m = 0.2[\text{cal}/(\text{g}\cdot\text{K})], \quad \lambda_p = 0.00072[\text{cal}/(\text{cm}\cdot\text{s}\cdot\text{K})], \quad \lambda_m = 0.16[\text{cal}/(\text{cm}\cdot\text{s}\cdot\text{K})],$$

where index m stands for thermocouple material and index p for substance material. Temperature of pyrolysis surface $T_s = 650\text{K}$, initial temperature $T_0 = 300\text{K}$.

Calculations were carried out up to the moment of time when the pyrolysis surface contacted the thermocouple head. Values of thermocouple geometry parameters varied. Since spatial distribution of metal contacts forming thermocouple head and its voltage in seal is not clear we took the geometry center as a point for determination of thermocouple head temperature. Temperature at this point was determined by averaging over the volume of thermocouple head

V :

$$T_{av} = \iiint_V T(x, y, z, t) dx dy dz / \iiint_V dx dy dz.$$

The relative error of thermocouple temperature measurement was determined from the expression

$$\delta = \frac{T_\infty - T_{av}}{T_\infty} 100\%,$$

where $T_\infty = T(0, y_{\max}, z_{\max}, t)$ is the temperature at the point on the outer boundary of solution area rather remote from the thermocouple.

Two series of calculations were carried out, the first — at the pyrolysis rate $r_b = 0,1\text{cm/s}$, the second — at $r_b = 1\text{cm/s}$. Results of calculations are presented as dependence of relative error of temperature measurement $\delta(\xi)$ on dimensionless distance between pyrolysis surface and thermocouple head $\xi = R_m - x_s(t)/\Delta$, where $\Delta = \lambda_p/C_p\rho_p r_b$ is the width of the heat front of pyrolysis wave. Hatches designate variation of the relations of heat flux values from pyrolysis surface into solid

$$q = \left[\left(-\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_s \\ y=0 \\ z=0}} \right] / \left[\left(-\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_s \\ y=y_{\max} \\ z=z_{\max}}} \right]$$

at the points on symmetry axis and outer boundary. Width of heat front was $\Delta = 150\mu\text{m}$ at pyrolysis rate $r_b = 0.1\text{cm/s}$ and $\Delta = 15\mu\text{m}$ — at $r_b = 1\text{cm/s}$, respectively. Behavior of the $\delta(\xi)$ value at $r_b = 0.1\text{cm/s}$ is shown in (Fig. 2, 3, 4, 5). It is seen that wire configuration determined by the angle α significantly influences the value of the measurement error. The least measurement error is provided by the thermocouple with the least head radius. Presence of maximum on the curves is bound with the fact that when the pyrolysis front approaches the thermocouple head the heat outflow over the wires inside the solid substance increases, however, further at small distances ξ the thermocouple head heating sharply increases that results in the decrease of the value $\delta(\xi)$.

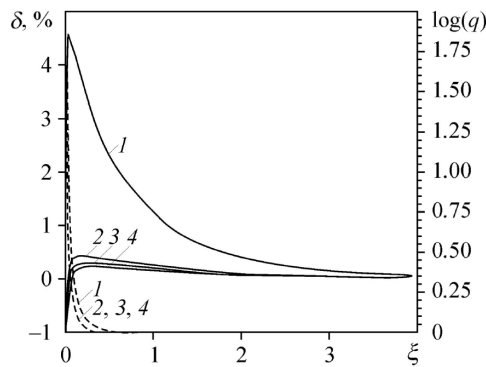


Fig. 2. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 12\mu\text{m}$ ($r_m/R_m = 0.2$). ≡Figure 6 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

In (Fig. 6, 7, 8, 9) there are results of analogous calculations at pyrolysis rate $r_b = 1\text{cm/s}$. It is seen that along with the increase in a thermocouple head radius the measurement error decreases, and at $R_m > 40\mu\text{m}$ it even becomes negative. This is bound with the fact that at larger dimensions of thermocouple head, the width of the heat wave becomes lesser than the head

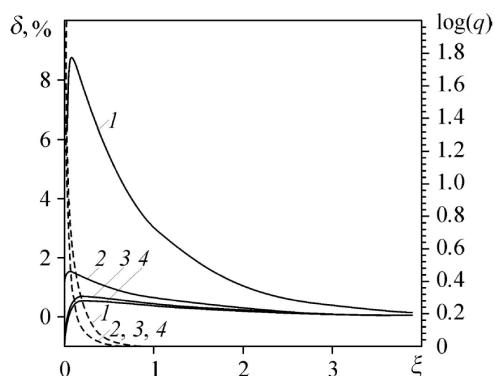


Fig. 3. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 20\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 7 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

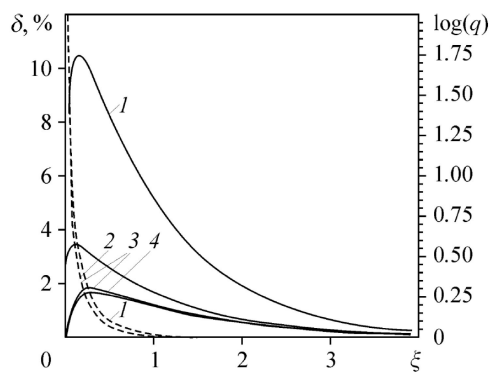


Fig. 4. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 45\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 8 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

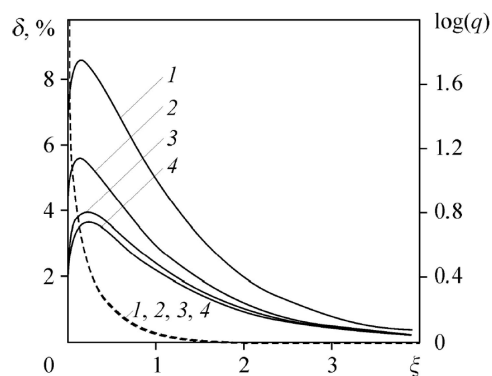


Fig. 5. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 120\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 9 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

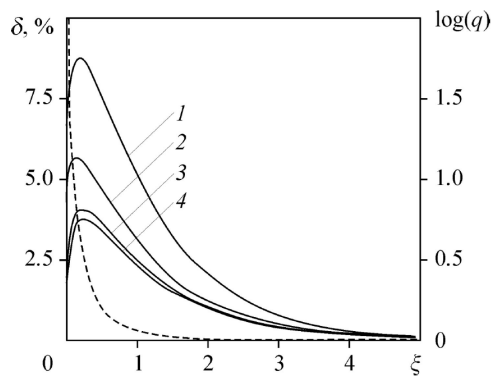


Fig. 6. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 12\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 2 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

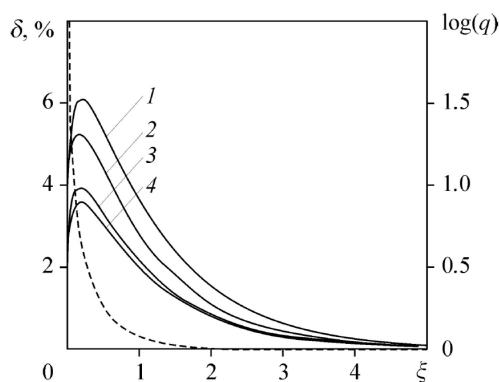


Fig. 7. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 20\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 3 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

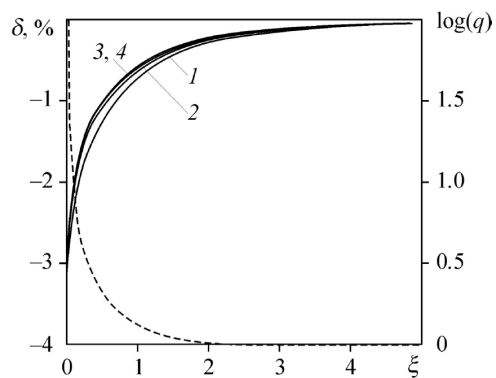


Fig. 8. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 45\mu m$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 4 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

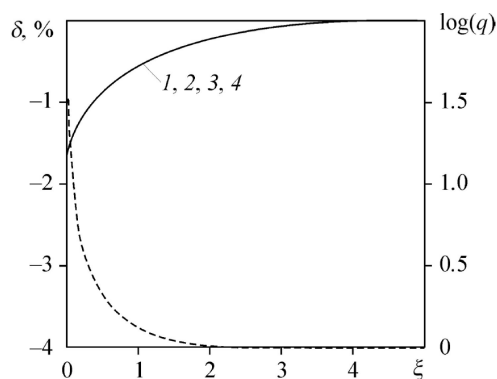


Fig. 9. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 120\mu\text{m}$ ($r_m/R_m = 0.2$). \equiv Figure 5 $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

diameter. Therefore, in this case the head simply has insufficient time for heating that influences the error value.

Absolutely analogous behavior of the value δ shown in (Fig. 10), takes place at small pyrolysis rate for rather large dimensions of thermocouple head as well. For thermocouples with relatively large radii of wires with correlation $r_m/R_m = 0.75$, the measurement error turns out to be much higher (Fig. 11), that is bound with the increase in heat flux in the wires because of the increase in the areas of their transverse sections.

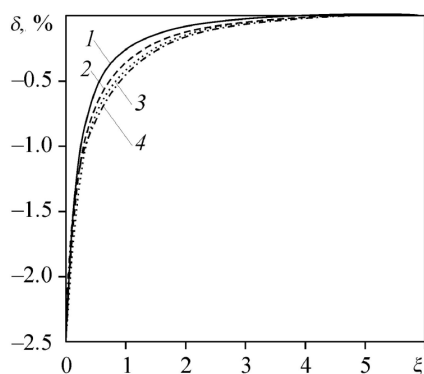


Fig. 10. Variation of $\delta(\xi)$ for $R_m = 400\mu\text{m}$ ($r_b = 0.1\text{cm}$, $r_m/R_m = 0.2$). $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

The obtained results prove that accuracy of information on temperature distribution in near-surface layer of solid substance which thickness is comparable with the front width of pyrolysis hear-wave may be rather unreliable. Moreover, heat sink into thermocouple results in significant increase of heat outflow from pyrolysis surface at its approaching a thermocouple that may result in significant change of pyrolysis rate in the vicinity of thermocouple head. Values $q(\alpha)$ in the moment of pyrolysis surface approach to thermocouple head are given in the table for two rates of pyrolysis. It is seen that the behavior of this value at the increase of the angle α significantly depends on thermocouple head size and pyrolysis rate determinant for heat overflows between the head and wires. This fact may serve an additional source for inaccuracy at thermocouple temperature measurement in the near-surface layer.

5 Conclusions

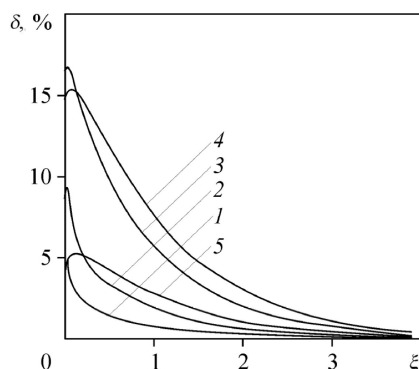


Fig. 11. Variation of $\delta(\xi)$ for $r_m/R_m = 120\mu\text{m}$ ($r_b = 0.1\text{cm/s}$, $\alpha = 60^\circ$). $\alpha = 0^\circ$ (1), 15° (2), 45° (3), 60° (4).

Table 1. Dependencies of heat flux values on the angle α

$R_m \mu\text{m}$	$r_b = 0.1\text{cm/s}$				$r_b = 1.0\text{cm/s}$			
	0°	15°	45°	60°	0°	15°	45°	60°
12	53.4	23.8	19.8	19.8	123.8	120.7	131.8	145.3
20	94.4	56.6	44.3	43.9	91.0	105.2	121.7	137.7
45	137.5	110.9	101.8	105.7	59.8	61.5	73.2	84.1
120	128.8	125.8	138.6	153.9	27.4	28.2	33.8	40.0
400	64.2	66.0	77.7	88.4				

1. Numerical simulation has revealed significant error at thermocouple temperature measurement in solid at its pyrolysis, and the error value depends both on pyrolysis rate and geometry dimensions of thermocouple.
2. The obtained results may be used to correct the error of temperature measurement with the use of thermocouples at experimental investigations of solids pyrolysis.

References

1. T. V. Borovkova, Y. N. Yeliseyev, and I. I. Lopukhov, *Mathematical modeling of contact thermo-couple*, Physics of Particles and Nuclei Letters, **5**(3), 274–277 (2008).
2. G. A. Franco, E. Caron, and M. A. Wells, *Quantification of the surface temperature discrepancy caused by surface thermocouples and methods for compensation*, Metallurgical and Materials Transactions B, **338B**, 949–956 (2007).
3. A. A. Zenin, *Errors of thermocouple measurements of flames*, J. Engng. Phys., **5**(5), 67–74 (1962).
4. A. A. Zenin, *Heat transfer of thermocouples in solid fuel combustion waves*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys., **5**, 125–131 (1963).
5. B. W. Asay, S. F. Son, P. M. Dickson, L. B. Smilowitz, and B. F. Henson, *An investigation of the dynamic response of thermocouples in inert and reacted condensed phase energetic materials*, Pro-pellants, Explosives, Pyrotechnics, **30**(3), 199–208 (2005).
6. A. D. Rychkov, L. K. Gusachenko, and V. E. Zarko, *Accuracy estimation of thermocouple temperature measurement in solid fuel*, Papers of VI Meeting of Rus.-Kazakh Work Group in Comp. and Inform. Technol., Kazakh National University, Almaty, 282–286 (2009).
7. M. Vinokur, *An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws*, J. Comput. Phys., **81**, 1–52 (1989).
8. N. N. Yanenko, *Fractional Step Method for Solving Problems of Mathematical Physics*, Nauka, Novosibirsk 1967.
9. V. D. Liseikin, *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*, second edition, Springer, Berlin, 2007.

Non-uniform ENO Scheme for Simulation of Supersonic Flows

Yekaterina Moisseyeva, Altynshash Naimanova and Asel Beketaeva

Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi 71, Almaty, 050040, Kazakhstan
k.moisseyeva@gmail.com, alt_naimanova@yahoo.com, azimaras@mail.ru

Abstract. The third order finite-difference shock-capturing essentially non-oscillatory (ENO) scheme for a non-uniform grid has been developed. The design of the ENO scheme is based on the methodology for uniform grids. The efficiency of the developed algorithm is demonstrated by the numerical experiments on the simulation of the three-dimensional turbulent steady flowfield generated by the transverse hydrogen injection into the supersonic air cross-flow. The analysis of the different variations of the limiter functions for the developed algorithm is provided to define the optimal function producing the smallest spread of the solution. The effect of the limiter choice on the mixing layer dynamics is studied for the non-uniform grid. The numerical experiments revealed that the nonoptimal choice of limiter can result in the overgrowth of the mixing layer, that is important for the numerical modeling of the combustion.

Keywords: ENO scheme, non-uniform grid, slope limiters, supersonic flow, transverse injection, multispecies gas

1 Introduction

The study of the transverse injection into a supersonic flow is an important issue in the modeling of the supersonic combustion in scramjets. The mixing flowfield is very complex, the Fig. 1 shows the general structure of the supersonic freestream with the transverse injected jet [1,2]. A three-dimensional bow shock forms ahead the injection and interacts with the boundary layer, producing the separation shock. The separated region results in a smaller weak shock, and these three shocks create the lambda shock structure. The underexpanded jet jet emerges from the orifice and expands to the freestream pressure at the jet boundary, the barrel shock occurs. Acceleration of the jet flow continues until a normal shock (Mach disk) forms, behind which the flow becomes subsonic and accelerates then downstream to the mainflow velocity value. Further downstream the jet boundary takes the form of a pair of the counter rotating vortices. The horseshoe-vortex wraps around the jet and forms the wake vortices. Also there is another recirculation zone downstream of the jet due to the rarefaction behind the jet.

To capture these complex structures, in the regions of the large gradients (in the boundary layer, near the wall and on the jet exit) condensation of the grid is introduced and schemes of the high order of accuracy are used. At the present, TVD (Total Variation Diminishing), ENO (essentially non-oscillatory) and WENO (weighted ENO) schemes are successful tools for numerical simulations of supersonic flows. Traditionally these schemes have been derived for a uniform grid with a coordinate system transformation [3,4,5]. Recently, a number of authors [6,7] have investigated applications of TVD schemes to non-uniform grids and analyzed the slope limiters on non-uniform grids.

The objective of the present paper is development of the third order finite-difference shock-capturing ENO scheme for a non-uniform grid. The design of the ENO scheme is based on the methodology for uniform grids proposed by the authors in [8]. Here, the Newton interpolant of the third order degree was adapted for the non-uniform grid to construct the essentially non-oscillatory piecewise polynomial. The efficiency of the developed algorithm is demonstrated by the numerical simulation of the three-dimensional turbulent steady flowfield generated by

the transverse hydrogen injection into the supersonic air cross-flow by solving the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations closed by the $k-\omega$ turbulent model. Additionally, the effective adiabatic parameter of the gas mixture is introduced. It allows one to calculate the derivatives of the pressure with respect to independent variables for determining the Jacobian matrices, and thus to construct an efficient implicit algorithm of the solution. The analysis of the effect of the modified limiter choice on the solution is provided for the numerical simulation of the three-dimensional supersonic air flow with the perpendicular injected hydrogen.

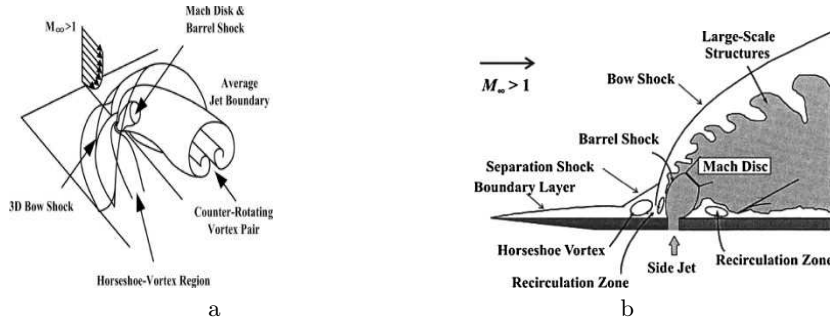


Fig. 1. Schematic diagram of the flowfield [1] (a), in the symmetry section xz [2] (b)

1.1 Governing Equations

Basic equations for the problem are the system of the three-dimensional Reynolds averaged Navier-Stokes equations for the compressible turbulent multispecies gas in the Cartesian coordinate system written in the conservative form as

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Vectors \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} are defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T, \\ \mathbf{E} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E_t + p)v, \rho v Y_k)^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E_t + p)w, \rho w Y_k)^T, \end{aligned}$$

and vectors \mathbf{E}_v , \mathbf{F}_v , \mathbf{G}_v are associated with viscous stress

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T, \\ \mathbf{F}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, J_{ky})^T, \\ \mathbf{G}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T. \end{aligned}$$

The components of the viscous stress tensor are

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2\mu}{3Re} (2u_x - v_y - w_z), \quad \tau_{yy} = \frac{2\mu}{3Re} (2v_y - u_x - w_z), \\ \tau_{zz} &= \frac{2\mu}{3Re} (2w_z - u_x - v_y), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re} (u_y + v_x), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{Re} (v_z + w_y). \end{aligned}$$

The heat flux is defined by

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{xk} , \\ q_y &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{yk} , \\ q_z &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{zk} , \end{aligned}$$

and the diffusion flux is determined by

$$J_{kx} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x} , J_{ky} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial y} , J_{kz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z} .$$

The pressure and the total energy are

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} , E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N Y_k h_k - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) ,$$

The specific enthalpy and the specific heat at constant pressure of the k th species are

$$h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT , c_{pk} = C_{pk} \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right) ,$$

where the molar specific heat is written in the polynomial form as

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^5 \bar{a}_{ki} T^{i-1} ,$$

the coefficients \bar{a}_{ki} are taken from the thermodynamic tables JANAF [9].

The viscosity coefficient is defined as a sum of the laminar and turbulent viscosity coefficients: $\mu = \mu_l + \mu_t$, where μ_l is determined by Wilke formula, and μ_t is determined by $k - \omega$ turbulent model [10].

In the system (1) u, v, w, ρ, T represent the components of the velocity vector, the density and the temperature, respectively. Y_k and W_k are the mass fraction and the molecular weight of the k th species, where Y_1 stands for the mass fraction of H_2 , Y_2 for the mass fraction of O_2 , Y_3 for the mass fraction of N_2 . γ is the adiabatic parameter, M is the Mach number. Index 0 indicates jet parameters and index ∞ indicates parameters of the main flow.

The system (1) is written in a nondimensional form. Constitutive parameters are parameters of the main flow at the inlet ($u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$). The injector diameter d is chosen as the characteristic length.

1.2 Boundary Conditions

On the flow field entrance, the parameters of the free stream are given

$$\begin{aligned} p &= p_\infty , T = T_\infty , u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}} , v = w = 0 , Y_k = Y_{k\infty} , W_k = W_{k\infty} , \\ x &= 0 , 0 \leq y \leq H_y , 0 \leq z \leq H_z . \end{aligned}$$

Also boundary layer is given near the wall, the longitudinal velocity component is approximated by the 1/7th power law.

On the injector, the parameters of the jet are given

$$p = np_\infty, \quad T = T_0, \quad u = v = 0, \quad w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, \quad Y_k = Y_{k0}, \quad W_k = W_{k0},$$

$$z = 0, \quad |x^2 + y^2| \leq R,$$

where $n = p_0/p_\infty$ is the pressure ratio.

The non-reflecting boundary conditions are adopted on the flow field exit [11]. The adiabatic no-slip boundary condition on the wall and the symmetry boundary condition on the symmetry faces are specified. Here H_x , H_y and H_z are the length, width and height of the computational domain, respectively. R is the injector radius.

2 Method of Solution

The problem is solved by the implicit method. The methodology is similar to that on a uniform grid and can be found in [8,12]. Numerical solution is performed in two steps. At the first step the thermodynamic parameters and at the second step the mass fractions are resolved. The conservation equations are discretized using a first-order forward difference operator for the time derivative. The upwind differences of the first order of accuracy have been used for the approximation of the first derivatives, and the central differences of the first order of accuracy have been used for the second derivatives. For the approximation of the convective terms, the ENO scheme of the third order is applied, which will be described below. The obtaining system of equations is solved by the factorization using the matrix sweep method for the vector of the thermodynamic parameters and the tridiagonal inversion for the vector of the mass fractions.

Finite Difference ENO Scheme on Non-Uniform Grid. For numerical solution of (1), the ENO scheme of the third order is applied for the inviscid convective fluxes, where the Newton interpolant of the third order degree was adapted for the non-uniform grid to construct the essentially non-oscillatory piecewise polynomial. After that, the reconstruction procedure via primitive function is applied. In accordance with the principle of the ENO scheme, the inviscid convective fluxes are presented as

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E}^{n+1} + (\mathbf{E}_x + \mathbf{D}_x)^n. \quad (2)$$

In (2), \mathbf{E}^m is the modified flux at the node point (i, j, k) , which consists of the original convective vector \mathbf{E} and additional terms of the high order of accuracy \mathbf{E}_x , \mathbf{D}_x :

$$\mathbf{E}_{x,i}^\pm = \pm \text{limiter1}(\bar{\mathbf{E}}_{x,i-1/2}, \bar{\mathbf{E}}_{x,i+1/2}), \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_{x,i}^+ = \begin{cases} \text{limiter2}(d_i \bar{\mathbf{D}}_{x,i-1/2}^+, d_{i+1} \bar{\mathbf{D}}_{x,i+1/2}^+), & \text{if } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \mathbf{U}}{s_i} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \mathbf{U}}{s_i} \right) \right| \\ \text{limiter2}(d_{i+1} \hat{\mathbf{D}}_{x,i+1/2}^+, d_{i+2} \hat{\mathbf{D}}_{x,i+3/2}^+), & \text{if } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \mathbf{U}}{s_i} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \mathbf{U}}{s_i} \right) \right| \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_{x,i}^- = \begin{cases} \text{limiter2}(d_i \hat{\mathbf{D}}_{x,i-3/2}^-, d_{i+1} \hat{\mathbf{D}}_{x,i-1/2}^-), & \text{if } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \mathbf{U}}{s_{i+1}} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \mathbf{U}}{s_{i+1}} \right) \right| \\ \text{limiter2}(d_{i+1} \bar{\mathbf{D}}_{x,i-1/2}^-, d_{i+2} \bar{\mathbf{D}}_{x,i+1/2}^-), & \text{if } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \mathbf{U}}{s_{i+1}} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \mathbf{U}}{s_{i+1}} \right) \right| \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned}\bar{E}_{x,i-1/2} &= \bar{h}_i \left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i-1/2}| \right) \frac{\Delta_- \mathbf{E}_i}{s_i}, \\ \bar{E}_{x,i+1/2} &= \bar{h}_i \left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i+1/2}| \right) \frac{\Delta_+ \mathbf{E}_i}{s_{i+1}}, \\ \bar{D}_{x,i-1/2}^\pm &= \bar{h}_i \alpha_i \left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_i} |A_{i-1/2}| \right) \left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i-1/2}| \right) \Delta_\mp \frac{\Delta_- \mathbf{E}_i}{s_i}, \\ \bar{D}_{x,i+1/2}^\pm &= \bar{h}_i \alpha_i \left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_i} |A_{i+1/2}| \right) \left(I - \frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i+1/2}| \right) \Delta_\mp \frac{\Delta_+ \mathbf{E}_i}{s_{i+1}}, \\ \hat{D}_{x,i-1/2}^\pm &= \bar{h}_i \bar{h}_{i\mp 1} \left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_{i\mp 1}} |A_{i-1/2}| - I \right) \left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i-1/2}| + I \right) \Delta_\mp \frac{\Delta_- \mathbf{E}_i}{s_i}, \\ \hat{D}_{x,i+1/2}^\pm &= \bar{h}_i \bar{h}_{i\mp 1} \left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_{i\mp 1}} |A_{i+1/2}| - I \right) \left(\frac{\Delta t}{\bar{h}_i} |A_{i+1/2}| + I \right) \Delta_\mp \frac{\Delta_+ \mathbf{E}_i}{s_{i+1}}\end{aligned}$$

Here, $\Delta_\pm \mathbf{U}_i = \pm (\mathbf{U}_{i\pm 1} - \mathbf{U}_i)$, $A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1} = R \left(\frac{A \pm |A|}{2} \right) R^{-1}$. $A = \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U}$ is the Jacobi matrix. I is the identity matrix. R and R^{-1} are the left and right eigenvectors, Λ is the matrix of eigenvalues. $\alpha_i = s_i$ for A^+ and $\alpha_i = s_{i+1}$ for A^- , $s_i = \bar{h}_i + \bar{h}_{i-1}$, $d_i = 1/(\bar{h}_i + \bar{h}_{i-1} + \bar{h}_{i-2})$, $\bar{h}_i = (h_i + h_{i-1})/2$, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

In (3), the limiter functions $\text{limiter1}(a,b)$ and $\text{limiter2}(a,b)$ are associated with terms of the second and third order of the accuracy, respectively. As limiters, functions $m(a,b)$, $\text{minmod}(a,b)$ or $\text{superbee}(a,b)$ are chosen, where

$$\begin{aligned}\text{limiter1}(a,b) &= \text{minmod}(a,b) = \begin{cases} s \cdot \min(|a|, |b|), & \text{if } \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = s \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ \text{limiter1}(a,b) &= \text{superbee}(a,b) = \begin{cases} \text{minmod}(2a,b), & \text{if } |a| \leq |b| \\ \text{minmod}(a,2b), & \text{if } |a| > |b| \end{cases} \\ \text{limiter2}(a,b) &= \hat{m}(a,b) = \begin{cases} 1/2 a, & \text{if } |a| \leq |b| \\ 1/2 b, & \text{if } |a| > |b| \end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

The expressions for the fluxes \mathbf{F}^m and \mathbf{G}^m are written similarly to \mathbf{E}^m .

3 Results

The numerical computations of the problem are made on the staggered spatial grid with the number of cells $241 \times 201 \times 201$, and the time step is $\Delta t = 0.01$. The computational domain is $H_x = 20$, $H_y = 15$ and $H_z = 10$ calibers. The injector is located in the center of the bottom. The initial parameters of the main flow and the jet are: $Pr = 0.9$, $M_0 = 1$, $M_\infty = 4$, $T_0 = 800K$, $T_\infty = 1000K$, $Re = 10^4$, the pressure ratio $n = 11.72$.

Since the study focuses on the application of the scheme to the non-uniform grid, the comparison of the computation on the uniform grid with the use of the coordinate system transformation and on the non-uniform grid was preliminarily done in [13]. It was obtained that the behaviour of the flowfield on the non-uniform grid agrees with that on the uniform grid.

As the limiter functions are used in the ENO scheme and there are many different forms of the limiters in the literature [6], for the numerical solution of the (1) the following two kind of the limiters from (4) are selected to investigate its influence on the physics:

$$\text{limiter1}(a, b) = \text{minmod}(a, b), \text{limiter2}(a, b) = \dot{m}(a, b); \quad (5)$$

$$\text{limiter1}(a, b) = 1.1\text{superbee}(a, b), \text{limiter2}(a, b) = \dot{m}(a, b). \quad (6)$$

The choice of these functions is determined by the test performed on the uniform grid by the authors in [14], where the transfer of the hydrogen cube problem was solved to choose the optimal limiter. It was shown there that the use of (1) considerably spreads the original solution while the slight change of the second order limiter (6) gives the significant reduce of the dissipative effects.

The numerical calculations of (1) with the different limiter functions (1), (6) on the non-uniform grid confirm the known dynamics of the transverse sonic jet injection into the supersonic cross-flow, including the shock wave and vortical structures [1,2]. On Fig. 2, the isobars (Fig. 2a,b) and the local Mach number isolines in the supersonic region ($M > 2$) (Fig. 2c,d) are represented in the symmetry section xz as this plane best demonstrates the distinction between the solutions. The results for the limiters (1) are shown on the left and the results for the limiters (6) are shown on the right. The choice of the limiters has almost no effect on the distribution of the isobars, but more noticeable effect of that on the Mach number distribution can be seen in the supersonic region ($M > 2$).

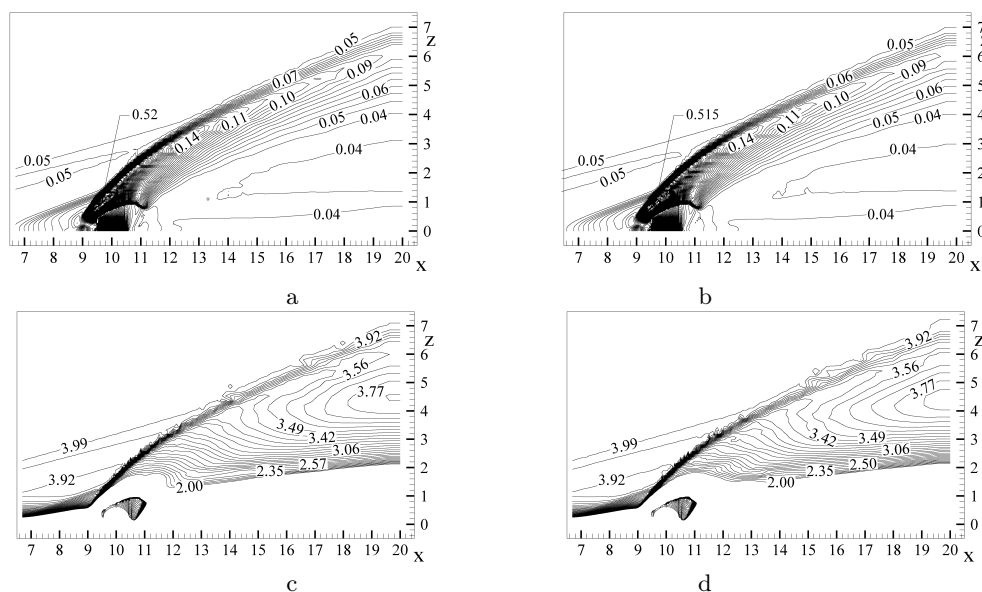


Fig. 2. Distribution of the pressure (a,b) and the local Mach number in the supersonic region ($M > 2$) (c, d) in the symmetry section xz for the limiters (1) (a, c) and for the limiters (6) (b, d), $n = 11.72$

Despite the slight difference in the dynamic parameters for the limiters (1) and (6), the isolines of the mass fraction clearly show this discrepancy. The distribution of the hydrogen mass fraction in the symmetry section xz is shown on Fig. 3. Here, the results obtained with the limiters (1) are shown on the left (Fig. 3a), and the results for the limiters (6) are represented on the right (Fig. 3b). It is visible that using limiters (1) considerably increases the upper mixing layer in comparison with the other limiter functions (6). Thus, the maximum value of the height for the

0.3% hydrogen concentration is $z_{max} = 4.94$ for the (1) and $z_{max} = 4.902$ for the (6). However, it should be noted that the use of the limiters (6) results in the slight spread of the solution in the region behind the jet.

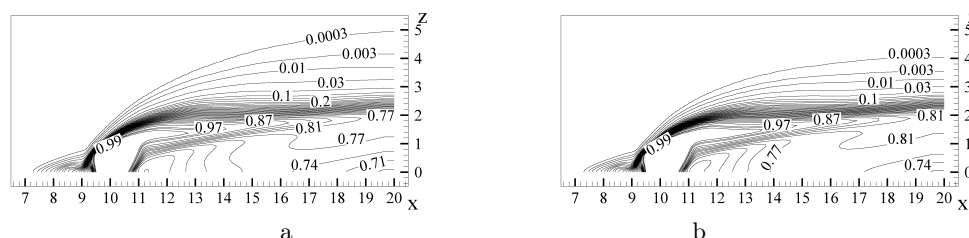


Fig. 3. Distribution of the hydrogen mass fraction in the symmetry section xz for the limiters (1) (a) and for the limiters (6) (b), $n = 11.72$

Figure 4 shows the distribution of the hydrogen mass fraction in the different sections yz for the limiters (1) (on the left, Fig. 4a) and for the limiters (6) (on the right, Fig. 4b). According to the comparison of Figs. 3 and 4, the jet expansion in the xz section is considerably less than that in the yz sections. Obviously, it occurs because of the great drift of the injected substance by the main flow.

Figure 4 at the $x = 8.92$ shows that the hydrogen penetration in the region in front of the jet spreads insignificantly near the wall, i.e. in the subsonic region. The noticeable lateral jet expansion in the injector center (Fig. 4, $x = 10$) is explained by the presence of the lateral vortices which lead to the mainflow velocity reduce. Behind the jet, the accumulation of the injected substance occurs (Fig. 4, $x = 14.87$), then it decreases downstream. In the transverse sections, the significant solution spreading is also can be seen for (1) in comparison with the results for (6).

The effect of the dynamic pressure ratio $q = (\rho V)_0 / (\rho V)_\infty$ on the jet penetration is shown on the Fig. 5. Numerical experiments were done with parameters of the experiment [15]: $4 < q < 16$ that corresponds to $7 < n < 24$, $Re = 9.47 \cdot 10^4$ for $n = 7.81$ and $n = 11.72$, $Re = 6.31 \cdot 10^4$ for $n = 15.61$ and $n = 23.356$. The upper curves mark the hydrogen penetration ($Y_1 = 0.0003$), and the lower curves are for the maximum values of the mass fraction of H_2 . Figure 5 shows the noticeable spread of the solution obtained with the limiters (1).

4 Summary

In the present paper the third order finite-difference shock-capturing essentially non-oscillatory (ENO) scheme for a non-uniform grid has been developed. Main advantage of the algorithm is that the modification of it from uniform to non-uniform mesh can be done by simple way. The steps of the ENO scheme correspond to the method on the uniform grid written in [12]. The methodology developed here is applied to the numerical simulation of the three-dimensional turbulent steady flowfield generated by the transverse hydrogen injection into the supersonic air cross-flow by solving the RANS equations closed by the $k - \omega$ turbulent model. The different slope limiters were revised and adapted on the non-uniform meshes. The analysis of the different variations of the limiter functions has been done for the non-uniform ENO scheme. The effect of the limiters on the mixing layer was studied numerically. It was obtained that the unsuccessful choice of some limiters can result in the overgrowth of the mixing layer. The results of the numerical computations show good agreement with the experimental data.

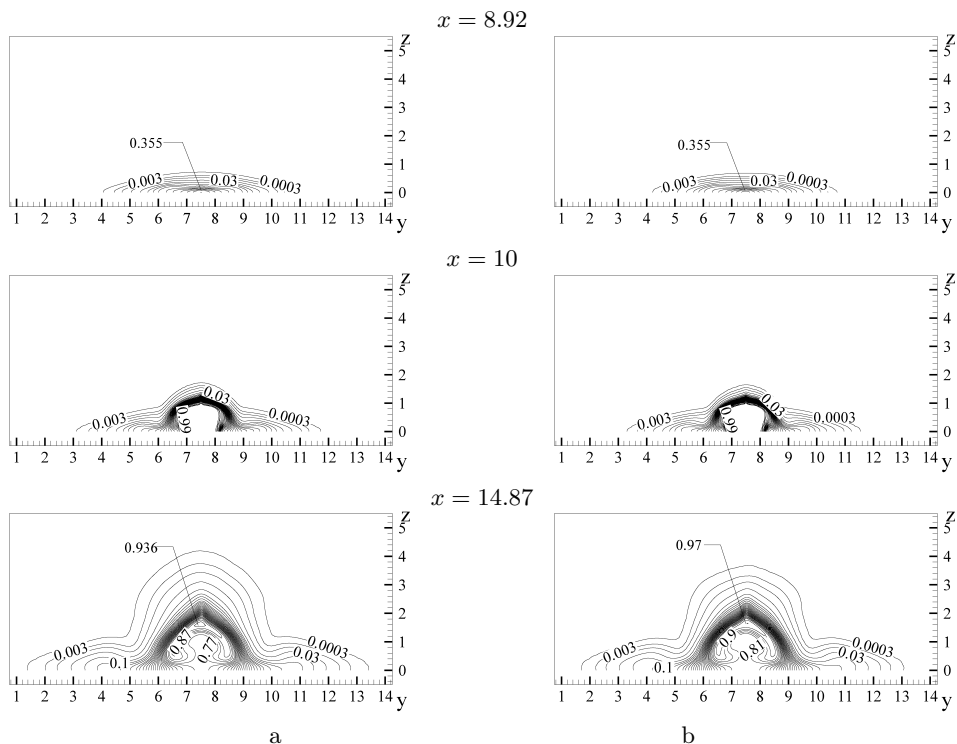


Fig. 4. Distribution of the hydrogen mass fraction in the different sections yz for the limiters (1) (a) and for the limiters (6) (b), $n = 11.72$

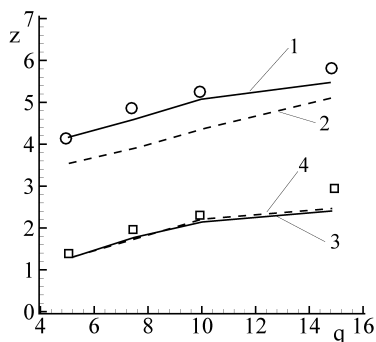


Fig. 5. Effect of the dynamic pressure ratio q on the jet penetration at $x = 17$: curve 1 - $Y_1 = 0.0003$ for the limiters (1); curve 2 - $Y_1 = 0.0003$ for the limiters (6); curve 3 - maximum value of Y_1 for the limiters (1) ($Y_1 = 0.541$ for $n = 7.81$, $Y_1 = 0.693$ for $n = 11.72$, $Y_1 = 0.817$ for $n = 15.61$, $Y_1 = 0.93$ for $n = 23.356$); curve 4 - maximum value of Y_1 for the limiters (6) ($Y_1 = 0.297$ for $n = 7.81$, $Y_1 = 0.382$ for $n = 11.72$, $Y_1 = 0.476$ for $n = 15.61$, $Y_1 = 0.61$ for $n = 23.356$); \circ , \square - experiment [15]

References

1. Gruber, M.R., Nejad, A.S., Chen, T.H., Dutton, J.C.: Transverse Injection from Circular and Elliptic Nozzles into a Supersonic Crossflow. *J. Propulsion and Power*. 16 (3), 449–457 (2000)
2. Ben-Yakar, A., Mungal, M. G., Hanson, R. K.: Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows. *Physics of Fluids*, 18, 026101 (2006)
3. Adams, N.A., Shariff, K.: A High-Resolution Hybrid Compact-ENO Scheme for Shock-Turbulence Interaction Problems. *J. Comp. Phys.* 127 (1), 27–51 (1996)
4. Sun, D., Hu, Ch., Cai, T.: Computation of Supersonic Turbulent Flowfield with Transverse Injection. *App. Math. Mech. English Edition*. 23 (1), 107–113 (2002)
5. Amano, R.S., Sun, D.: Numerical Simulation of Supersonic Flowfield with Secondary Injection. In: 24th Congress of ICAS, Yokohama (2004)
6. Berger, M.J., Aftosmis, M.J., Murman, S.E.: Analysis of slope limiters on irregular grids. In: 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2005-0490, Reno, NV (2005)
7. Zeng, X.: A General Approach to Enhance Slope Limiters on Non-Uniform Rectilinear grids. Submitted to *SIAM J. Sci. Comput.* (2014)
8. Bruel, P., Naimanova, A.: Computation of the normal injection of a hydrogen jet into a supersonic air flow. *Thermophysics and Aeromechanics*, 17 (4), 531–542 (2010)
9. Kee, R.J., Rupley, F.M., Miller, J.A.: CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics. SANDIA Report SAND89-8009 (1989)
10. Rumsey, C L.: Compressibility considerations for $k - \omega$ turbulence models in hypersonic boundary layer applications. NASA/TM-2009-215705 (2009)
11. Poinso, T.J., Lele, S.K.: Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows. *J. Comp. Phys.* 101, 104–129 (1992)
12. Moisseeva, Ye., Naimanova, A.: Supersonic flow of multicomponent gaseous mixture with jet injection. *Computational technologies*, vol. 19, № 5, 51–66 (2014)
13. Moisseeva, Ye., Naimanova, A., Belyayev, Ye., Shakhan, N.: Third order ENO Scheme on Non-uniform Grid for Supersonic Flows. Submitted to *Applied Mechanics and Materials* (2015)
14. Moisseeva, Ye., Naimanova, A.: Numerical simulation of the transverse hydrogen injection into a supersonic turbulent airstream. In: *Proceedings of Advanced Problems of Mechanics (APM) 2014*, pp. 358–365. St.-Petersburg, Russia (2014)
15. Rogers, R. C.: A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream. NASA TN D-6114 (1971)

The Simulation Modeling Technology of Warehouse Logistics Processes in Distributed Computing Environment

I.V. Bychkov, G.A. Oparin, A.G. Feoktistov, V.G. Bogdanova, A.A. Pashinin

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of RAS, Lermontov str., 134,
664033, Irkutsk, Russia
idstu@icc.ru

Abstract. The problem of analysis of functional and organizational structure of logistics warehouse is considered in this article and a new technology for performing such analysis is offered. The technology is based on simulation modeling. In detail this technology includes methods and tools for development of simulation models, for creating problem-oriented services of the simulation modeling, for intelligent management of computing in a distributed environment. The aim of research is to develop and realize high-level methods and tools of formulating and solving non-traditional (for conventionally used warehouse management systems) tasks using problem-oriented knowledge. The example of methods and tools realization to automate the simulation modeling of the logistics warehouse is presented here. Experiments results for some tasks of the simulation modeling of the logistics warehouse are discussed.

Keywords: simulation modeling, warehouse logistics, distributed computing environment, service-oriented programming

1 Introduction

A mathematical modeling of technological processes plays important role in the research and optimization of enterprises. Currently, the enterprises, that are focused on an ultimate consumer and integrated in logistics chains, are most effective. The warehouse logistics, oriented to the management of material flows, makes the significant contribution to indicators of functioning of enterprises. The particular attention is paid to regional warehouses. This situation is due to the fact, that today the significant number of large Russian production companies and retailers are choosing an expansion of sales in regions as the main direction of their development. Therefore, enterprises sharply need high-quality large-scale warehouse logistics servicing.

Modern logistics warehouses are rather difficult economic systems oriented to the management of cargo traffic of the large capacity, including the distribution of goods, and, therefore, play important role in the economic sphere. In this regard, the most important tasks of warehouse management are the analysis and optimization of a functional and organizational structure as the exploited and designed logistics warehouses. The development trend of modern logistics warehouses is the constant improvement of technologies and communication systems, expanding the set of warehouse and logistics operations and it increases their level of complexity, the emergence of many alternatives to the adoption of logistics solutions.

One of the most effective approaches to an analysis of functioning of a logistics warehouse as a queuing system is simulation modeling [1]. Imitation modeling is a modern tool which simplifies the development and the optimization of warehouse operations. Simulating a warehouse implies developing a simulation program and testing it by executing experiments with different combinations of warehouse parameters. These experiments provide a low-cost method to determine the optimal parameter set for a warehouse.

A process of building a simulation program adequately reflects the system of study which is largely non-trivial task and requires from its developer the high mathematical and programming

skills [2], especially when it comes to parallel or distributed program [3]. Thus, there is a need for high-level tools to automate the process that will maximize the potential of high-performance computing and provide the building of complex technological chain: from formulating task to creating model, then to developing program and to carrying out experiment in a distributed computing environment.

In this paper the simulation modeling technology of warehouse logistics processes in a distributed computing environment is proposed. This technology includes methods and tools for developing simulation model, for creating services of simulation modeling, for intelligent management of computing in a distributed environment. The example of realization of methods and tools to automate simulation modeling of the logistics warehouse is presented. Experiment results for some tasks of the logistics warehouse simulation modeling are presented in this article.

2 Material and Information Flows Management in a Modern Logistics Warehouse

Warehouse performs logistics operations with material and information flows: transportation, loading/unloading, packaging, warehousing, packaging, cargo processing, collection of returnable waste, distribution, pricing and other operations. Fig. 1 shows the information and logical interconnections of some basic logistics operations in the warehouse. Material and information flows define the relations between the logistics operations. Management of material and information flows in modern logistics warehouse is carried out by the warehouse management system (WMS).

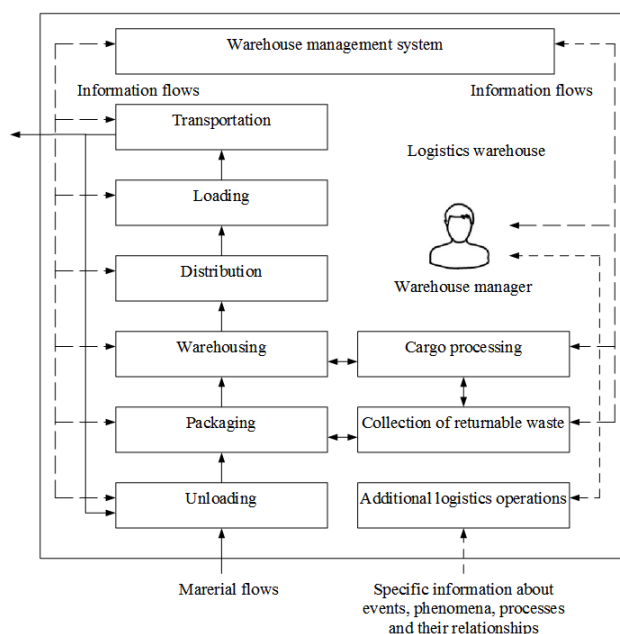


Fig. 1. Operations of logistics warehouse.

In Russia, WMS is presented with large range of software systems. They include such systems as 1C-Logistics: WMS [4], GESTORI Pro [5], Solvo.WMS [6] and others systems [7]. Such software systems include some modeling tools of warehouse processes. But they are usually

highly specialized and not suitable for the simulation of many logistics processes encountered in the implementation of the joint operations of warehousing, transportation and trade. Systems for enterprise resource planning (ERP) [8], for example, the Oracle E-Business Suite [9], SAP ERP [10], Microsoft Dynamics AX [11] or Infor ERP LN (BAAN) [12], are powerful tools for management of enterprise processes, including the warehouse processes. However, such commercial systems are oriented mainly to the large enterprises. Generally these systems use analytical modeling techniques which do not take into account all details of additional logistics operations and do not analyze these details in dynamics, unlike the simulation modeling.

Moreover, in solving of practical tasks it is often necessary to implement additional logistics operations (Fig. 1) and to process specific information about events, phenomena, processes and their relationships that do not fit the model of problem. Additional logistics operations apply to information flows. For example, scheduling logistics operations, predicting equipment failures, transformation external constraints into internal constraints, allocation of resources for the implementation of logistics operations, an analysis of the operations implementation efficiency.

Thus, the aim of research is to develop and realize high-level methods and tools of formulating and solving non-traditional (for conventionally used WMS) tasks using specific problem-oriented knowledge. The main problem is the development the simulation modeling system with the service-oriented interface and technology of implementation to support the manager of the logistics warehouse in making decisions.

3 Simulation Modeling Technology of Warehouse Logistics Processes

The authors developed software to support the experimental simulation modeling. Simulation models are implemented in the language of General Purpose Simulation System (GPSS) [13]. This software includes the tools of developing simulation models on the base of templates for typical objects (modules) of the researched systems and tools to support the experimental simulation modeling with the developed models. The modular approach provides a number of important advantages. Firstly, it is the flexible modification and development of mathematical support and software of the basis for modeling the researched systems. The modification and development of mathematical support and software is carried out with the help of extension or replacement of modules of this basis by new modules, including the modules from the developed libraries of templates for objects of researched systems. Secondly, it is the rapid point implementation of additional capabilities of system processes modeling, not represented in the used WMS.

The considered software focuses firstly on PC-based clusters that are created on the base of computing resources of corporate, educational or scientific organizations. The clusters must function under the control of the local resource manager Condor [14]. This system has the following advantages. Firstly, the creation PC-based cluster is based on any available network that requires minimal cost and time; it operates under a variety of operating systems, including OS Windows; it is the open source of software.

The technology of simulation modeling with the help of the developed software and cluster under the control of the Condor includes a number of stages.

The stage of *experiment planning* includes: the determination of the runs number of the model before moving to operating mode and in operating mode; selection of the main factors and observable variables of the model; carrying out of the factorial analysis. Some specialized tools are realized in software for simulation modeling. These tools provide abilities to use unlimited number of factors and levels (unlike tools of GPSS World [15]), to implement the factorial analysis in parallel and to automate the processes of planning and execution of experiments.

The stage of *input data preparation* for experiment includes: selection GPSS-model, files with additional model fragments and files with variants of input data.

The stage of *specifying of job* for model run in distributed computing environment includes description of instructions set for computing system in terms of Condor. The job is a specification of the process of solving the problem, including information about the required computational resources, software, variants of the input/output data, quality criteria of the job execution, as well as other necessary information.

The stage of *job execution planning* includes the choice of nodes of distributed computing environment in which this job may be executed. The logical-and-probabilistic algorithm for multilevel scheduling of job flow with defined criteria (reliability, time and cost) of quality of their execution is used to the nodes choice. The planning process is carried out in four steps by a special system of program agents representing the cluster nodes. The planning process includes: forming of set of available nodes; specialization of formed set by way of removing of overloaded nodes (relative to the current average loading nodes, taking into account existing job queues) from this set; creating polyvariant plan of job execution in nodes; creating specialized plan, that satisfy the defined criteria of quality of job execution and current state of the computing environment, by way selection from polyvariant plan; allocation of cluster nodes for job execution in accordance with the specialized plan. The specialized plan is formed on the basis of economical regulation mechanism of demand and supply for computing resources [16].

The stage of *job execution* includes job run in allocated node of cluster and sending calculations results to the main node of cluster. In case of the node failure a new allocation of node for the job run is carried out.

The stage of *output data processing* includes reports collection and the extraction from the reports relevant data for further analysis.

The stage of *data analysis* includes the of multi-criteria selection problem solving parameters optimal values of the researched. The lexicographic and majority methods of choice are used to solve this problem. These methods are chosen for their ease of use by specialists of problem domain and program implementation as compared with other similar methods.

The all considered above stages are fully or partially automated and presented as a Grid-services. Now, there is a wide range of tools [19] for service creation. The technologies Web Services Resource Framework (WSRF) [18] and using of templates for interconnection with local resource managers of distributed computing environment are used in the paper. The system High-performance computing Service-oriented Multiagent System (HpcSoMaS) Framework, developed by authors, is used for service creation based on these technologies.

4 High-Performance Computing Service-Oriented Multiagent System Framework

This framework is designed for implementation the agent-based approach to automate the creation of software systems to solve large-scale scientific problems in a service-oriented Cluster Grid with computing nodes which can have complex hybrid structure.

With this approach, computing management is implemented with the help of the multiagent system (MAS) The organizational structure is shown in Figure 2. Coordination of agents is implemented with the help of general rules of group behavior. Agents operate in accordance with the specified roles and their rules of behavior in the virtual agents' community, which are defined for each role. The MAS includes agents of users, computing planning, monitoring and distributing the resources, classifying, specializing and running the jobs. The agents can

coordinate their actions through cooperation or competition in different virtual communities arising in the MAS. In details this MAS is described in [16].

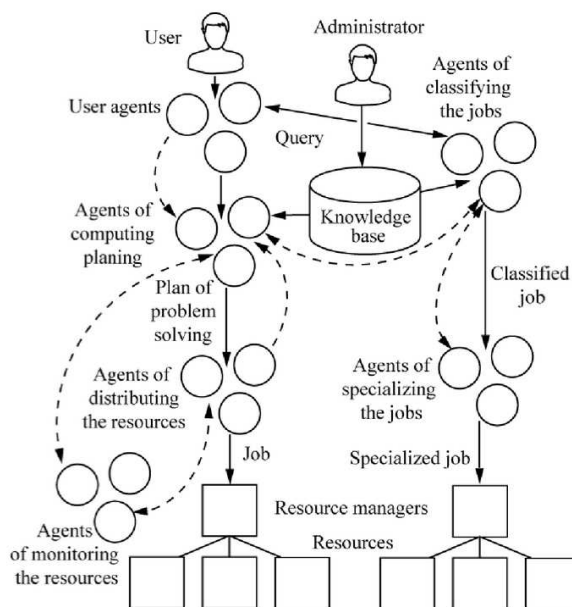


Fig. 2. The multiagent system structure.

Unlike some well-known scheduling systems, this toolkit provides the ability to management of distributed computing both at collective level and at problem-oriented software (application) level. The main functional and system features of the application level implemented in the form of services. Agents at the application level are implemented as services too. The user's requests to services of application are implemented into jobs for resource managers of environment nodes.

Additional tools for computing scheduling and resource management at application level represent a virtual community (VC) of agents created to organize parallel execution of user application in distributed computing environment. Main purpose of VC is to provide the choice of the least loaded resource (cluster) to execute a parallel application and the monitoring to send results to the user. VC agents include a user agent, scheduling and classifying agents, a manager-agent and dynamic set of local agents. First three agents are used to receive and classify user requests and problem solving plan composition. A task formed after cooperative agent actions are transferred to the manager-agent who distributes the task at local agents by cooperation with a resource monitoring agent. The manager-agent is also used for: partition task into subtasks; automatic restart of task running with new parameters; management; user task monitoring. Local agents are used to send tasks into a cluster resource management system.

Framework includes a set of system components (standard agents) to be controlled by developed agents and the library of standard classes for Java programs. This library supports implementation of software tools to manage the agents, information and message exchange between agents and other functions. Library of standard classes provides classes for all types of VC agents. Agents-managers are the main components in HpcSoMaS Framework. These agents produce most of the work on the distribution of tasks, selection of the best computing environment for a specific task, interaction with resource-manager of cluster, reallocation of tasks, and their decomposition.

Unlike other similar tools, such as [19],[20],[21], using HpcSoMas Framework agents may be presented in the form of services. The access to user application may also be issued in the form of services. Agents-managers are presented as rest-services. Agents-managers use the soap-services to perform different functions, depending of the configuration of the VC, and should have the ability to dynamically connect these services without recompiling.

This framework provides the possibility of building web services and interfaces for the conversion of users' requests to the VC in the combined flows of tasks and the distribution of these flows tasks in a computing environment. Therefore, in addition to the main library the HpcSoMaS Framework includes:

- the library for development of services based on REST and SOAP standarts;
- the ready-made services that implement system functions of VC agents basing on library classes and require for their use only configuration setting;
- tools for graphical design of services;
- the documentation, describing the format of service configuration file.

This framework was used for creating problem-oriented services of the simulation modeling service and VC of agents for intelligent management of computing in a distributed environment at the application level.

5 Experiments

Service-oriented system simulation provides the following features that are supported by HpcSoMas Framework:

- Web-service interface for generating and editing the list of observable parameters Observable Parameter List Edit (OPLE). This list then is used during the simulation.
- Web-interface for the user's request to simulations. Setting parameters for computing experiment: the input and output of the program, the list of observable output parameters.
- Parallel solution through multivariant calculations for different input parameters in a distributed computing environment.
- Information of the user about the completion of the solution. Integrating and visualization of the solution results.

Service simulation contains the following input parameters (Fig. 3):

- The model name.
- Number of model runs for transition to the operating mode.
- Number of model runs in the operating mode.
- List of variant of input data.
- A list of observable parameters. This list is generated by a web-interface of OPLE.
- Choose the method of analysis of statistics.

Some problems of warehouse logistics, solved with the help of cold-store Co Ltd в ТЭИ Irkutsk Khladokombinat в ТЭИ using the researched technology, are given below. Co Ltd в ТЭИ Irkutsk Khladokombinat в ТЭИ has the following characteristics: total storage volume 20000 t; 42 storages; several temperature regimes of storages; four floors and several freight elevators; ramps for road and rail transport; eight commodity groups; different categories of customers; many areas for office, back offices, garages, processing of goods.

Modeling of loading/unloading processes. The warehouse under study operates with input and output material flows, on base of both scheduled and random requests. The generated

Fig. 3. Web-interface of the simulation service.

daily scheduled requests contain information about the time of arrival/departure of the goods, the servicing time of request, the volume of goods, and the required resources to carry out the logistics operations. The intensity of the random requests varies in different times. The processes of arrival/departure of the goods have different characteristics and correspond to the different probability distributions. For servicing applications using following technical and human resources: electric loaders, electric loader drivers, storekeepers, loaders, elevator operator, dispatchers and others resources.

The problem was to determine the optimal distribution of resources for logistics operation in loading/unloading processes. The specific features of this problem are availability of elevators and temperature regimes of storages. These features are usually not taken into account in WMS. The problem was solved by multivariate calculations with followed multi-criteria choice of variants of initial data (the optimal distribution of resources).

The modeling results were used in the management divisions of the cold-store for following works: developing of method for forming of scheduled requests and accounting random requests; forming teams of electric loader drivers, storekeepers and loaders; scheduling of these teams work; planning of servicing and renewal of technical resources.

Modeling of customer servicing level. On the cold-store the loading/unloading processes are carried out for the road and rail transport of different carrying capacity. There are standards of the loading/unloading processes for the type of freight transport, type and category of cargo. Failure to comply with the standards entails penalties.

The problem was to determine the distribution of resources for the preferred customer servicing level [1].

The problem was solved by multivariate calculations with followed choice of variants of initial data, corresponding to the values of the observable variables that satisfy the given constraints.

The modeling results were used in the management divisions of the cold-store for following works: developing and optimization of standards of loading/unloading processes; determining of categories of loyal customers.

The simulation models are designed in the system GPSS World. The simulation modeling was carried out on the cluster of 20 heterogeneous PCs (40 cores) and the cluster of 12 homogeneous PCs (24 cores). The both clusters are functioning under the control of the OS Windows and local

resource manager Condor. In experiments the number of data variants for models ranged from 100 to 10000. One task for Condor was generated by agents for the one run of model. The one job was executed on a one core. Estimations of time spent on different stages of the experiment with one data variant for automated and non-automated simulation modeling are showed on Fig. 4.

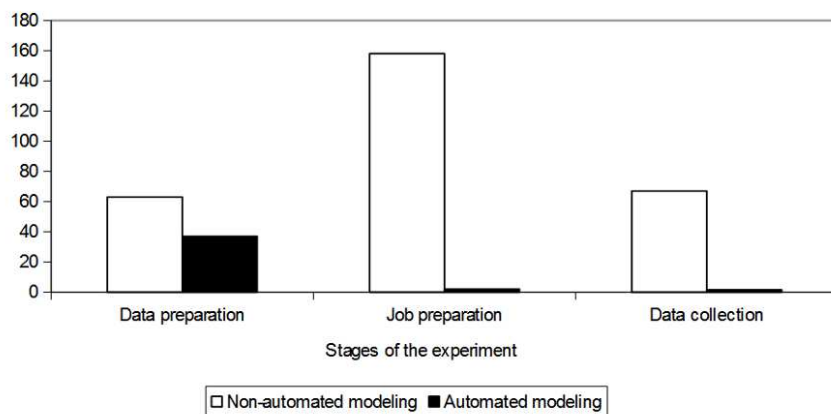


Fig. 4. Estimations of time spent on different stages of the experiment with one data variant.

Figure 5 illustrates the scalability of multivariant calculations in distributed computing environment (the acceleration of performance is near to linear) for tasks of simulation modeling of customer servicing level and loading/unloading process. On figure 5: T_1 – the time of task solving using one core, T_n – the time of task solving using n core. The modeling of the developed service for simulation using the resources (over 3700 cores) of the supercomputer center at the IDSTU SB RAS showed similar results scalability.

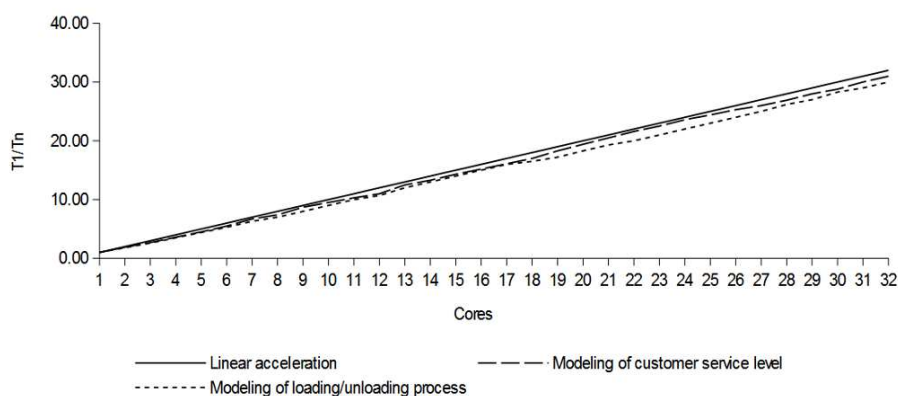


Fig. 5. Scalability of multivariant calculations in distributed computing environment.

Based on estimations, obtained in the process of solving practical problems and scalability of multivariant calculations in distributed computing environment, we can conclude about high efficiency of service for simulation.

6 Conclusions.

In this paper the some initial results of a study that focus simulation modeling of warehouse with non-typical logistics operations are showed. The automation of simulation modeling and the use of distributed computing have provided the rapid modeling results, needed for making management decisions. The principles of work, the technology of application, means and ways of implementing the above mentioned methods and tools are provides their widespread use to simulation modeling of complex systems in different spheres of human activity.

References

1. Taha, H.A.: Operations Research: An Introduction. Upper Saddle River, Prentice Hall (2006)
2. Low, A.M., Kelton, W.D.: Simulation modeling and analysis. New York, McGraw-Hill (2000)
3. Fujimoto, R.M.: Parallel and Distributed Simulation Systems. New York, John Wiley (2000)
4. 1C-Logistics: Warehouse management 3.0 software for warehouse management (WMS), http://www.1bit.com/solutions/1c_logistics_warehouse_management_3_0.html
5. GESTORI Pro, <http://www.fit.ru/solutions/software/gestori/>
6. Solvo.WMS вЂ“ a comprehensive warehouse management software solution, <http://www.solvo.ru/en/>
7. Frazelle, E.: World-Class Warehousing and Material Handling. New York, McGraw-Hill (2001)
8. O'Leary, D.L.: Enterprise resource planning systems. Cambridge University Press (2000)
9. Oracle E-Business Suite, <http://www.oracle.com/ru/products/applications/ebusiness/overview/index.html>
10. SAP, <http://go.sap.com/index.html>
11. Microsoft Dynamics, <http://www.microsoft.com/ru-ru/dynamics/default.aspx>
12. Infor, <http://www.infor.com/>
13. Schriber, T.J.: Simulation using GPSS. New York, John Wiley (1974).
14. Litzkow, M., Livny, M., Mutka, M.: Condor вЂ“ A Hunter of Idle Workstations. In: 8th International Conference of Distributed Computing Systems, pp. 104-111. IEEE CS Press, Los Alamitos (1988).
15. GPSS World Tutorial Manual, http://www.minutemansoftware.com/tutorial/tutorial_manual.htm
16. Bogdanova, V.G., Bychkov, I.V., Korsukov, A.S., Oparin, G.A., Feoktistov, A.G.: Multiagent Approach to Controlling Distributed Computing in a Cluster Grid System. Journal of Computer and Systems Sciences International. 53, 5, 713-722 (2014).
17. Rajkumar Buyya, R., Vecchiola, C., Selvi, S.T.: Mastering Cloud Computing. Burlington, Massachusetts, Morgan Kaufmann (2013)
18. The WS-Resource Framework. Version 1.0, <http://www.globus.org/wsrf/specs/ws-wsrf.pdf>
19. Bellifemine F., Bergenti F., Caire G., Poggi A. Jade: A Java Agent Development Framework // Multiagent Systems, Artificial Societies, and Simulated Organizations: Multi-Agent Programming / Eds R. Bordini, M. Dastani, J. Dix, A. El Fallax Seghrouchni. Springer, 2006. V. 15. P. 125-147.
20. H. Avancini et al. A Java Framework for Multi-agent Systems, EJS 3(1) 1-12 (2000).
21. Sardinha et al. An Object-Oriented Framework for Building Software Agents, in Journal of Object Technology, vol. 2, no. 1, January-February 2003, pages 85-97.

Reduction in the Research of Large-Scale Dynamics with Allowance of the Effects of Magnetic Field Diffusion

Sergey Peregudin, Svetlana Kholodova

Department of Information System, Saint Petersburg State University,
Universitetskii av. 35, Petergof, 198504 Saint Petersburg, Russia
National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics,
Kronverksky prospekt 49, 197101 St. Petersburg, 197101 Saint Petersburg, Russia
{peregudinsi,kholodovase}@yandex.ru

Abstract. A system of nonlinear partial differential equations is considered that models perturbations in a layer of an ideal electrically conducting rotating fluid bounded by spatially and temporally varying surfaces with allowance for inertial forces and diffusions of magnetic field. The system is reduced to a scalar equation. The solvability of initial boundary value problems arising in the theory of waves in conducting rotating fluids can be established by analyzing this equation. Solutions to the scalar equation are constructed that describe small-amplitude wave propagation in an infinite horizontal layer and a long narrow channel.

Keywords: Ideal fluid dynamic problems, magnetohydrodynamic equations, reduction of vector equations to scalar equations, analytical method, diffusions of magnetic field.

1 Introduction

The system of nonlinear partial differential equations describing the dynamics of a rotating layer of an ideal conducting incompressible fluid is difficult to investigate because of its vector character. Therefore, it is natural to try to reduce it to equivalent scalar equations for auxiliary functions.

We consider the nonlinear system of partial differential equations that model perturbations in a layer of an ideal conducting rotating fluid bounded by spatially and temporally varying surfaces with allowance for inertial forces and diffusions of magnetic field. The purpose of this study is to reduce this system to a scalar equation and to construct analytical solutions to the corresponding boundary value problems.

The accounting of diffusive members is necessary when studying dynamics of waves of more local character, i.e., when the horizontal scale of change of hydromagnetic sizes much less than a radius of a considered layer, and also at very great time scales. It would be desirable to see influence of diffusion of a magnetic field on its generation. Whether there will be able to be a magnetic field as much as long time and whether it will exist at shutdown of an inoculating field.

The motion of a conducting fluid in a magnetic field causes electric currents. These currents change the magnetic field. At the same time, the forces acting on the currents in the magnetic field can change the character of the fluid motion. Hence, hydrodynamic motion and electromagnetic phenomena are interrelated. This relation is described by the joint system of field equations and the equations of motion of a fluid. According to the works by the well-known Swedish physicist and astrophysicist G. Alfven, the interrelation between electromagnetic and hydrodynamic phenomena strengthens as the linear scale of a phenomenon increases. For large-scale phenomena, this interrelation can be rather strong. For example, this is true of star interiors and the Earth's liquid core [1].

Large-scale motions of an electrically conducting fluid have been intensively studied. In particular, we note [2]–[6], which investigate a model constructed in the approximation of fast

rotation. Within the framework of this theory, the inertial force is ignored in the equation of motion. As a result, the inertial, Alfvén, and Rossby waves are filtered out. Furthermore, in the limit of fast rotation, the velocity \mathbf{v} is not determined uniquely but rather up to a term representing the geostrophic velocity. The reason for this is that the geostrophic velocity does not satisfy the magnetostrophic equation. To overcome these difficulties, viscous forces are invoked and the viscosity is neglected when possible.

In [7], [8], large-scale motions of a conducting fluid in a layer between the planes $z = 0$ and $z = d$ were studied in the magnetostrophic approximation taking into account viscous forces.

In this study, we assume that the boundaries of the layer are not stationary but vary in space and time. Furthermore, the inertial forces are taken into account in the equation of motion.

2 Dynamics of a thin rotating layer of an ideal electrically conducting incompressible fluid

Consider a thin layer of an ideal conducting incompressible fluid rotating at an angular velocity ω . The layer is bounded from below by a moving bottom specified by $z = h_B(x; y; t)$, where $h_B(x; y; t)$ is an unknown function and $z = 0$ is the reference level. The layer is bounded from above by a known surface $Z(x; y)$. The axis of fluid rotation coincides with the z -axis.

2.1 Governing equations of a horizontal structure of an electrically conducting rotation fluid

The governing magnetohydrodynamic equations for the problem under consideration are written in projections onto the coordinate axes [1], [9]–[12]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\omega \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} \operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

where v_x, v_y and v_z are the velocity components of the fluid; p is the pressure; \mathbf{g} is the acceleration of gravity; ρ is the density; b_x, b_y and b_z are the magnetic induction components; μ is the magnetic permeability; σ is the electrically conduction of the medium; and ω is the angular velocity of the Earth.

Consider the following characteristic scales of the variables in (1)–(4): D for vertical motion (where D is the average depth of the fluid layer $h_B(x; y; t) - Z(x; y)$), L for horizontal motion, U for the horizontal velocity component, \mathbf{b} for the horizontal field components, H for the vertical field component, T for time, and P for the pressure field.

The basic equations of magnetohydrodynamics (1)–(4) of the problem in projections on the coordinate axes are of the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) + \\ + 2\omega v_y + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - \\ - 2\omega v_x + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - g + \\ + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - b_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \lambda \Delta b_x, \quad (8)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - b_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \lambda \Delta b_y, \quad (9)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \lambda \Delta b_z, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2. \quad (12)$$

We pass from the system (5)–(12) to the corresponding system in dimensionless variables. Previously we introduce the characteristic scales of the variables system. Let D – characteristic vertical scale equal characteristic value of the average depth of the liquid layer $-Z(X, y) + h_B(x, y, t)$ and L – the characteristic scale of the horizontal movement. We assume that

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1.$$

We introduce further in consideration of the characteristic scale: U is scale of horizontal speed; W is scale of vertical speed; B is value b_x, b_y ; H is value of b_z ; T is value of time t ; P is value of the fields of pressure.

In the equation (11) first and second terms of the order $O\left(\frac{U}{L}\right)$, so the order third term $O\left(\frac{W}{D}\right)$ no more than $O\left(\frac{U}{L}\right)$. Therefore, using the equation (11), we obtain

$$W \leq O(\delta U).$$

Similarly, using the equation (12), we obtain

$$H \leq O(\delta B).$$

Given the extent of the connection, we have system (5)–(10) to dimensionless variables. The a result we obtain a system

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho L} \left(P + \frac{(1 + \delta^2) B^2}{2\mu} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) + 2\omega U v_y + \frac{B^2}{L\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho L} \left(P + \frac{(1 + \delta^2) B^2}{2\mu} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - 2\omega U v_x + \frac{B^2}{L\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta U}{T} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\delta U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho D} \left(P + \frac{(1 + \delta^2) B^2}{2\mu} \right) \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - g + \frac{\delta B^2}{L\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{T} \frac{\partial b_x}{\partial t} + \frac{UB}{L} \left(v_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \right. \\ \left. - b_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\lambda B}{L^2} \Delta b_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{T} \frac{\partial b_y}{\partial t} + \frac{UB}{L} \left(v_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \right. \\ \left. - b_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{\lambda B}{L^2} \Delta b_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta B}{T} \frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{\delta UB}{L} \left(v_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x \frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_z}{\partial y} - \right. \\ \left. - b_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\lambda \delta B}{L^2} \Delta b_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Hereinafter dimensionless variables denote the same symbols.

From equations (13) and (14), it follows that scale dynamic pressure P and the magnetic pressure $\frac{B^2}{\mu}$ is equal to the highest value set of parameters $\frac{\rho UL}{T}$, ρU^2 , $2\omega\rho UL$, otherwise the acceleration of the flow of traffic will be zero.

Let us turn to a simplified version of the studied system of differential equations.

Leaving equation (15) principal terms, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{b^2}{2\mu} \right) = -\rho g,$$

or, after integration in z

$$p + \frac{b^2}{2\mu} = -\rho g z + C(x, y, t).$$

Here and in what follows, we retain the same notation for dimensionless variables as for dimensional ones.

All the terms in (13) and (14) are used unchanged in the subsequent study.

The ratio of convective member in equations of induction (16)–(16) to diffusion member expressed through the characteristic velocity of liquid U and the characteristic length L is a

dimensionless parameter $\frac{LU}{\lambda}$, which is called the magnetic number of Reynolds. It characterizes the relationship between a plasma flow and a magnetic field. Under laboratory conditions usually $R_m \ll 1$, and this relationship is weak, whereas in astrophysics usually $R_m \gg 1$, and this relationship is strong [1]. Equation of induction determines the behavior of the magnetic field given the velocity, and this behavior depends significantly on the value of Reynolds magnetic number R_m . In the general case, the magnetic power lines are partially transferred by the plasma flow, and partially diffuse through it.

We will consider this general case. Thus we let $R_m = 1$, and assume that the diffusion members have the same order as the convection members.

Accounting for diffusion members is required when studying the dynamics of waves of more local nature, i.e. when L is much less than the radius of the layer, and at very large time scale T . It would like to examine the influence of diffusion of a magnetic field on its generation. Can such a field exist for an arbitrarily long time, and will it exist after switching the inoculating field off.

Define the total depth function $H = h_B \check{Z}$. Assume that the thickness of the fluid layer at rest is $H_0(x, y)$. The function $H(x, y, t)$ is represented in the form $H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x, y, t)$, where (x, y, t) is a small perturbation such that $\eta \ll H_0$. To describe the propagation of small perturbations, we use the standard linearization method applied in continuum mechanics to systems of differential equations describing the behavior of a medium. A solution to system is sought in the form

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, y, t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x, y, t), \quad (17)$$

assuming that the small perturbations of the horizontal velocity \mathbf{v}' and horizontal magnetic field \mathbf{b}' propagate against a certain steady-state uniform background described by the constants \mathbf{v}_0 and \mathbf{b}_0 . Consider the case $\mathbf{v}_0 = 0$. We obtain the new system of equations

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu \rho} \left(b_{0x} \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x = g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} \left(b_{0x} \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial b_y}{\partial y} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_0 v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_0 v_y) = 0, \quad (20)$$

$$H_0 \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} - b_{0x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_{0y} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta b_x, \quad (22)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} - b_{0x} \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_{0y} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta b_y. \quad (23)$$

where $\alpha = 2\omega$.

Substituting, we obtain the following equation for $\xi(x, y, t)$:

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)^2 \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu \rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu \rho)^2 H_0}. \quad (24)$$

The above reasoning implies the following result.

Theorem Any solution $\mathbf{v}(x, y, t)$, $\mathbf{b}(x, y, t)$, and $\eta(x, y, t)$ to the small perturbation problem in a layer of an ideal incompressible homogeneous conducting rotating fluid with allowance effects of diffusions of magnetic field satisfying the necessary smoothness conditions can be represented

in the form

$$\mathbf{b}(x, y, t) = \mu\rho\mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)\tilde{\mathbf{b}}, \quad \eta = \frac{1}{g}\mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2)\tilde{\eta}, \quad \tilde{\tilde{\eta}} = \mathcal{D}_t\tilde{\eta}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{b}}} = \mathcal{D}_t\tilde{\mathbf{b}}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\eta}}_x + \mathcal{D}\tilde{\tilde{b}}_x \\ \tilde{\tilde{\eta}}_y + \mathcal{D}\tilde{\tilde{b}}_y \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_x \\ \tilde{\tilde{b}}_y \end{pmatrix} = \mathcal{D}(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \begin{pmatrix} \mu\rho\mathcal{D}_t\mathcal{R} - \mathcal{D}^2 & \alpha\mu\rho\mathcal{R} \\ -\alpha\mu\rho\mathcal{R} & \mu\rho\mathcal{D}_t\mathcal{R} - \mathcal{D}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\tilde{\tilde{\eta}}(x, y, t) = (\mathcal{F}^2 + (\alpha\mathcal{D}^2)^2)\xi(x, y, t), \quad \mathcal{F} = \mu\rho(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) - \mathcal{D}^2\mathcal{D}_t, \quad (28)$$

$$\mathcal{D} = b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathcal{R} = \left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right), \quad (29)$$

where $\xi(x, y, t)$ is a solution to (24).

The converse is also valid: any solution to (24) generates a solution to system (18)–(22), which governs small perturbations in a thin layer of ideal incompressible homogeneous conducting rotating fluid, if the functions v , b , and z defined by formulas (25)–(28) satisfy the smoothness conditions in the domain under consideration.

Consider free linear oscillations of a conducting rotating fluid layer; that is, investigate small-amplitude wave propagation in an infinite horizontal layer and a long narrow channel.

Assume that $H_0 = \text{const}$ and $b_{z0} - b_{z0}^{(e)} = \text{Re } B e^{i(kx + ly - \sigma t)}$. Then, (24) has the solution

$$\zeta = \text{Re } A e^{i(kx + ly - \sigma t)},$$

if the dispersion relation

$$(\sigma^2 - \alpha^2)^2 \left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} \sigma \right) (k^2 + l^2) (b_{0x}k + b_{0y}l) = \frac{B}{Ai(\mu\rho)^2 H_0} \quad (30)$$

is fulfilled. In particular, for $b_{z0} = b_{z0}^{(e)}$, (30) implies

$$(\sigma^2 - \alpha^2)^2 \left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} \sigma \right) = 0,$$

wherefrom

$$\sigma = \pm\alpha, \quad \sigma = \pm \sqrt{\frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} - \frac{(k^2 + l^2)^2}{4R_m^2}} - i \frac{(k^2 + l^2)}{2R_m}.$$

We have two strong different branches for frequencies σ . The first type of oscillations is inertial waves. Inertia and Coriolis forces play main role here. Inertial waves have real frequencies and they are stable. The second type of oscillations is magnetic waves with complex frequencies. These magnetic waves are not stable, because they have negative imaginary part of frequencies σ .

In case $\mathbf{b}_0 = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm i \sqrt{\frac{(k^2 + l^2)^2}{4R_m^2}} - i \frac{(k^2 + l^2)}{2R_m} = \pm i \frac{(k^2 + l^2)}{2R_m} - i \frac{(k^2 + l^2)}{2R_m} = -i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m}, \\ \zeta &= \Re A \exp i(kx + ly + i \frac{(k^2 + l^2)}{R_m} t) = A \exp -\frac{(k^2 + l^2)}{R_m} t \cos(kx + ly). \end{aligned}$$

The diffusion of magnetic field causes damping of the field. We have the stationary process for infinite value of Reynolds magnetic number. It means that the induced magnetic field can exist for an arbitrarily long time.

We obtain the well-known dispersion relation for Alfvén wave with $R_m \rightarrow \infty$.

References

1. Smith, T.F., Waterman, M.S., Alfvén, H. and Fälthammer, C.-G.: *Cosmical Electrodynamics*. Oxford Univ. Press. (1963)
2. F. H. Busse: A Model of the Geodynamo. In: *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, vol. 42, pp. 437–459. (1975)
3. F. H. Busse: Generation of Planetary Magnetism by Convection. In: *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 12, pp. 350–358. (1976)
4. Zhang, K.-K. and Busse, F. H.: Finite Amplitude Convection and Magnetic Field Generation in a Rotating Spherical Shell. In: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 44, pp. 33–54. (1988)
5. Zhang, K.-K. and Busse, F. H.: Convection Driven Magnetohydrodynamic Dynamos. In *Rotating Spherical Shell*. In: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 49, pp. 97–116. (1989)
6. Zhang, K.-K. and Busse, F. H.: Generation of Magnetic Fields by Convection. in a Rotating Spherical Fluid Shell of Infinite Prandtl Number. In: *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 59, pp. 208–222. (1990)
7. I. A. Eltayeb: Hydromagnetic Convection in a Rapidly Rotating Fluid Layer. In *Proc. R. Soc., London*, vol. A 326, pp. 229–254. (1972)
8. I. A. Eltayeb: Overstable Hydromagnetic Convection in a Rapidly Rotating Fluid Layer. In: *J. Fluid Mech.*, vol. 71, pp. 161–179. (1975)
9. Kholodova, S. E. and Peregudin, S. I.: *Modelling and Analysis of Streams and Waves in Liquid and Loosy Mediums* [in Russian]. Saint Petersburg State University. Saint Petersburg. (2009)
10. Peregudin, S. I. and Kholodova, S. E.: Dynamics of a Rotating Layer of an Ideal Electrically Conducting Incompressible Inhomogeneous Fluid in an Equatorial Region. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 1871–1885. (2010)
11. Peregudin, S. I. and Kholodova, S. E.: Specific features of propagation of unsteady waves in a rotating spherical layer of an ideal incompressible stratified electroconducting fluid in the equatorial latitude belt. In: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 52, pp. 193–199. (2011)
12. Peregudin, S. I. and Kholodova, S. E.: Waves in a rotating layer of an ideal electrically conducting incompressible fluid with allowance effects of diffusion of magnetic field. In: *2014 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization, BDO 2014*; St. Petersburg; Russian Federation; 30 June 2014 through 4 July 2014. pp. 127–129. (2014)

Numerical Investigation one System Reaction-Diffusion with Double Nonlinearity

Sh. A. Sadullaeva, G. Pardaeva

Tashkent University of Information Technology,
Amir Temur st. 108, Tashkent, Uzbekistan
orif_sh@list.ru, gulmira_pardayeva@mail.ru

Abstract. In this paper we demonstrate the possibilities of the self-similar and approximately self-similar approaches for studying solutions of a nonlinear mutual reaction-diffusion system. The asymptotic behaviour of compactly supported solutions and free boundary is studied. Based on established qualitative properties of solutions numerical computation is carried out. The solutions are presented in visualization form with animation, which allows observing evolution of the studied process in time.

Keywords: reaction, diffusion, self-similar, asymptotic, compactly supported solutions, free boundary, numerical computation visualization.

1 Introduction

Let's consider properties of the Cauchy problem for following system of mutual reaction-diffusion equations with double nonlinearity in the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(|x|^k u^{m_1-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) + \gamma(t) u^{b_1} v^{q_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(|x|^k v^{m_2-1} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) + \gamma(t) v^{b_2} u^{q_2},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}u(0, x) &= u_0(x) \geq 0, \\ v(0, x) &= v_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N,\end{aligned}\tag{2}$$

where $k \in R$, $m_1, m_2 > 1$, $p \geq 2$ b_1, b_2, q_1, q_2 – positive numbers, $\nabla(\cdot) = \operatorname{grad}(\cdot)$, and $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$, $0 < \gamma(t) \in C(0, +\infty)$.

System (1) describes different physical process in two componential inhomogeneous nonlinear environment, for example the processes of the reaction-diffusion, heat conductivity, polytropic filtration of liquid and gas with a source power of which is equal $\gamma(t)u^{b_1}v^{q_1}$, $\gamma(t)v^{b_2}u^{q_2}$. Particular cases, when $k = 0$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 0$ were considered in works [1,3]. In the work [4] was investigated estimates of the different type solution, the asymptotes of the self-similar and approximately self-similar weak solutions and the front, of the problem Cauchy to the one equation of system (1).

Since the system (1) in the domain where $u = v = 0$ is degenerate, then it is in the area of degeneration may not have classical solutions. Therefore, we study the generalized solution of the system has the properties: $0 \leq u, v \in C(Q)$ и $|x|^k u^{m_1-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, $|x|^k v^{m_2-1} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \in C(Q)$.

Constructed on the basis of self-similar approaches system self-similar solutions, estimates for the free boundary, properties of solutions of the system are obtained. On the basis of qualitative research tasks developed a set of programs for reaction- diffusion systems with double nonlinearity and numerical calculations and visualization of the reaction-diffusion system describing (1). For the numerical solution of the problem have been applied by the racing method, the method of alternating directions in the multidimensional case [1,3].

2 Approximate self-similar and self-similar equations

For construction of the self-similar and approximately self-similar system for the system (1) the solutions of the system $u(t, x), v(t, x)$ we will search in the form

$$\begin{cases} u(t, x) = \bar{u}(t)w(\tau(t), \varphi(|x|)), \\ v(t, x) = \bar{v}(t)z(\tau(t), \varphi(|x|)), \end{cases} \tag{3}$$

where $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ are the solutions of following equations

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \gamma(t)\bar{u}^{b_1}\bar{v}^{q_1}, \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \gamma(t)\bar{v}^{b_2}\bar{u}^{q_2}. \end{aligned}$$

Integrating the equations, when $\gamma(t) = 1$ we got

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A(T + t)^{\frac{1}{-b_1-lq_1+1}}, \\ \bar{v} &= B(T + t)^{\frac{k}{-b_1-lq_1+1}}. \end{aligned}$$

where $A = \left[(-b_1 - lq_1 + 1) \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{q_1}{-b_2+q_1+1}}\right]^{\frac{1}{-b_1-lq_1+1}}$, $B = A^l \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{-b_2+q_1+1}}$, $l = \frac{-b_1+q_2+1}{-b_2+q_1+1}$.

Substituting of the (3) to the equation (1) reduced it to the following system of the equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} z^{m-1} \left| \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \bar{u}^{b_1-(m_1+p-2)} \bar{v}^{q_1} (w - w^{b_1} z^{q_1}) \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} &= \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} w^{m-1} \left| \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) - \bar{v}^{b_2-(m_2+p-2)} \bar{u}^{q_2} (z - z^{b_2} w^{q_2}) \end{aligned} \tag{4}$$

The functions $\tau(t), \varphi(x)$ are chosen as following

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_0^t \bar{u}^{m_1+p-3}(\eta) d\eta = \int_0^t \bar{v}^{m_2+p-3}(\eta) d\eta, \\ &\quad \text{if } m_i + p - 3 \neq 0, \quad i = 1, 2, \\ \tau(t) &= T + t, \quad \text{if } m_i + p - 3 = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{p_1} |r|^{p_1}, \quad |r| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad p_1 = \frac{p-k}{p}, \quad s = p \frac{N}{p-k}, \quad k < p.$$

The system (4) we will make a replacement a kind

$$w(\tau, \varphi) = f(\xi), \quad z(\tau, \varphi) = \psi(\xi), \tag{6}$$

where $\xi = \frac{\varphi(r)}{\tau^{1/p}}$ and the functions $f(\xi), \psi(\xi)$ satisfied to the approximately self - similar system equations

$$\begin{aligned} \xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} f^{m_1-1} \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} - \tau \bar{u}^{b_1-(m_1+p-2)} \bar{v}^{q_1} (f - f^{b_1} \psi^{q_1}) &= 0, \\ \xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} \psi^{m_2-1} \left| \frac{d\psi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\psi}{d\xi} - \tau \bar{v}^{b_2-(m_2+p-2)} \bar{u}^{q_2} (\psi - \psi^{b_2} f^{q_2}) &= 0. \end{aligned}$$

It is easy to calculate that

$$\begin{aligned} \tau \bar{u}^{b_1-(m_1+p-2)} \bar{v}^{q_1} &\equiv 1, \\ \tau \bar{v}^{b_2-(m_2+p-2)} \bar{u}^{q_2} &\equiv 1. \end{aligned}$$

In this case for the functions $f(\xi)$, $\psi(\xi)$ we have the following self-similar system of equation in "radial" form

$$\begin{aligned} \xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} f^{m_1-1} \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} - a_1 (f - f^{b_1} \psi^{q_1}) &= 0, \\ \xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} \psi^{m_2-1} \left| \frac{d\psi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\psi}{d\xi} - a_2 (\psi - \psi^{b_2} f^{q_2}) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned} a_1 &= A^{b_1-(m_1+p-2)} B^{q_1}, \\ a_2 &= B^{b_2-(m_2+p-2)} A^{q_2}. \end{aligned}$$

Next we will study asymptotes of the finite solutions of the system (7).

3 Asymptotes of the self - similar solutions

Now we will study asymptotes of weak compactly supported solutions (c.s.) of system (7) when $\gamma(t) = 1$.

Consider system of equations (7) with the following boundary condition

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 \geq 0, \quad f(d_1) = 0, \\ \psi(0) &= c_2 \geq 0, \quad \psi(d_2) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

where $d_1, d_2 < +\infty$.

The existence of a self-similar weak solution to problem (7)-(8) for one equation, in the case $\gamma(t) = 0, n = l = 0, p = 2$ was studied in [5] and conditions for the existence of c.s. solutions were obtained. In the [4] was studied the principal terms of the asymptotic behavior of solutions of self and self-approximation equations, the behavior of the front (free boundary), depending on the setting, the condition of the global solvability of the Cauchy problem for one equation.

We will transform the system (7) to convenient for investigating form using replacement

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \bar{f}(\xi) y_1(\eta), \\ \psi(\xi) &= \bar{\psi}(\xi) y_2(\eta), \quad \eta = -\ln \left(c - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

and $\bar{f}(\xi) = A_1 \left(c - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)_+, \bar{\psi}(\xi) = A_2 \left(c - b\xi^{\frac{p}{p-1}} \right)_+, c > 0, A_i > 0, i = 1, 2$.

Here we have following theorem

Theorem Let $m_i = 3, b_i + q_i = 1, i = 1, 2$. Then the finite solution of the system (7) at $\xi \rightarrow c^{\frac{p-1}{p}}$ have asymptotes

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \bar{f}(\xi) y_1^0 (1 + o(1)), \\ \psi(\xi) &= \bar{\psi}(\xi) y_2^0 (1 + o(1)), \end{aligned} \tag{10}$$

where $0 < y_i^0 < +\infty (i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \left[a_1^{\frac{b_2-q_1}{q_1}} a_2 s^{q_1} c^{\gamma g_1} \gamma^{-(p-1)g_1} A_1^{k_1(1-b_2)-q_2} A_2^{b_2 \left(\frac{q_2}{q_1} - 1 \right) + (m_2+p-3)} \right]^{\frac{1}{k_1(b_2-1)+q_2}}, \\ y_2^0 &= \left[a_2^{\frac{b_1-q_2}{q_2}} a_1 s^{q_2} c^{\gamma g_2} \gamma^{-(p-1)g_2} A_2^{k_2(1-b_1)-q_1} A_1^{b_1 \left(\frac{q_1}{q_2} - 1 \right) + (m_1+p-3)} \right]^{\frac{1}{k_2(b_1-1)+q_1}}, \end{aligned} \tag{11}$$

where $g_i = \frac{1+q_i-b_3-i}{q_i}$, $k_i = \frac{-b_i+(m_i+p-2)}{q_i}$, $\gamma = \frac{p-1}{p}$.

Proof. In order to prove Theorem we use transformation (9). Transformations (9) reduces self-similar system (7) to the following form

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} L_1(y_1, y_2) + \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-1} L_1(y_1, y_2) + A_1^{-(p+1)} \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} e^{-\eta}(y_1 - y'_1) + \\ & + A_1^{-p} \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} e^{-\eta}(y_1 - y'_1) + a_1 A_1^{-p} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} \frac{e^{-\eta}}{(a-e^{-\eta})} y_1 + \\ & + a_1 A_1^{-(p+1)+b_1} A_2^{q_1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} \frac{e^{-\eta}}{(c-e^{-\eta})} y_1^{b_1} y_2^{q_1} = 0, \\ & \frac{d}{d\eta} L_2(y_1, y_2) + \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-1} L_2(y_1, y_2) + A_2^{-(p+1)} \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} e^{-\eta}(y_1 - y'_1) + \\ & + A_2^{-p} \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} e^{-\eta}(y_2 - y'_2) + a_2 A_2^{-p} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} \frac{e^{-\eta}}{(a-e^{-\eta})} y_2 + \\ & + a_2 A_2^{-(p+1)+b_2} A_2^{q_2} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} \frac{e^{-\eta}}{(c-e^{-\eta})} y_2^{b_2} y_1^{q_2} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

where $L_1(y_1, y_2) = y_1^{m_1-1}(|y_1 - y'_1|)^{p-2}(y_1 - y'_1)$,

$L_2(y_1, y_2) = y_2^{m_2-1}(|y_2 - y'_2|)^{p-2}(y_2 - y'_2)$,

Such transformation (9) allows us to reduce studying of the asymptotes of solutions to system (7) as $\eta \rightarrow \infty$ to studying those solutions of system (12), which in some neighborhood of $+\infty$ satisfy the inequalities

$$y_i - \frac{dy_i}{d\eta} \neq 0, \quad y_i(\eta) > 0, \quad i = 1, 2.$$

The system (12) when $\eta \rightarrow \infty$ have following system of algebraic equations

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p-1} s y_1^{p+1} - a_1 A_1^{b_1-(p+1)} A_2^{q_1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} c^{-\frac{p-1}{p}} y_1^{b_1} y_2^{q_1} = 0, \\ & \frac{p}{p-1} s y_2^{p+1} - a_2 A_2^{b_2-(p+1)} A_1^{q_2} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-p} c^{-\frac{p-1}{p}} y_2^{b_2} y_1^{q_2} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

We have solved the system of algebraic equations and obtain

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \left[\frac{b_2-q_1}{a_1^{q_1}} a_2 s^{q_1} c^{\gamma g_1} \gamma^{-(p-1)g_1} A_1^{k_1(1-b_2)-q_2} A_2^{b_2\left(\frac{q_2}{q_1}-1\right)+(m_2+p-3)} \right]^{\frac{1}{k_1(b_2-1)+q_2}}, \\ y_2^0 &= \left[\frac{b_1-q_2}{a_2^{q_2}} a_1 s^{q_2} c^{\gamma g_2} \gamma^{-(p-1)g_2} A_2^{k_2(1-b_1)-q_1} A_1^{b_1\left(\frac{q_1}{q_2}-1\right)+(m_1+p-3)} \right]^{\frac{1}{k_2(b_1-1)+q_1}}. \end{aligned}$$

On the basis of qualitative research tasks developed a set of programs for reaction-diffusion systems with double nonlinearity and numerical calculations and visualization of the reaction-diffusion system describing (1). For the numerical solution of the problem have been applied by the racing method, the method of alternating directions in the multidimensional case. Iterative processes are based on Picard’s method, Newton and special method. Many experiments were carried out in different values of the parameters of the system. The results of computational experiments show that all of these iterative methods are effective for solving nonlinear problems and give non-linear effects, if selected as the initial approximation approximate self-similar solutions of the equation, constructed above method of nonlinear splitting method and standard equations [1,2,3]. As expected, the application of Newton’s method was with the smallest number of iterations than the methods of Picard and a special method, the correct choice of the initial approximation.

The results of numerical experiments are presented in visual form and with animation. In the multidimensional case for the approximation of the problem, the method of alternating directions.

Were held set of numerical experiments based on the asymptotic behavior of solutions obtained above.

References

1. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhajlov A.P.: Blow-up in quasilinear parabolic equations, Berlin, 4, Walter de Grueter, (1995).
2. Aripov M.: Method of the standard equation for the solution of the nonlinear value problem, Tashkent, Fan, 137 p, (1988).
3. Aripov M.: Asymptotic of the Solution of the Non-Newton Polytropical Filtration Equation, ZAMM, vol. 80, suppl. 3, 767-768 (2000).
4. Aripov M., Sadullaeva Sh.A.: To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 6,2, 157-167(2013) .
5. Aripov M., Sadullaeva Sh.A.: To solutions of one nondivergent type parabolic equation with double nonlinearity. Advances and Progress in Analysis, 12-18, (2010).
6. Dimova S.N., Kastchiev M.S., Koleva M.G., Vasileva D.P.: Numerical analysis of the blow-up regimes of combustion of two-component nonlinear heat-conducting medium. Journal of applied mathematics and mathematical physics 35, no.3, 303-319, (1995).
7. Kersner R., Reyes J., Tesei A.: One a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absorption advances. Diff. Equations 7(2002), 155-176.
8. Kombe I.: Double nonlinear parabolic equations with singular lower order term. Nonlinear Analysis 56, 185-199, (2004).

Multidimensional Analogues of Gelfand–Levitan, Marchenko and Krein Equations. Theory, Numerics and Applications

Sergey Kabanikhin^{1,2} * and Maxim Shishlenin^{3,2}

¹Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Acad. Lavrentjev av. 6, Novosibirsk, 630090, Russia

²Novosibirsk State University, Pirogova str., Novosibirsk, 630090, Russia

³Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyug av. 4, Novosibirsk, 630090, Russia
kabanikhin@sscc.ru, mshishlenin@ngs.ru

Abstract. *We consider the method of regularization of two dimensional (2D) inverse coefficient problems based on the projection method and the approach of I.M. Gelfand, B.M. Levitan, M.G. Krein and V.A. Marchenko. We propose a method of reconstruction of the potential, density and velocity in 2D inverse coefficient problems. The 2D analogies of the I.M. Gelfand, B.M. Levitan and M.G. Krein method are established. The 2D analog of the V.A. Marchenko equation is considered for the Kadomtsev-Petviashvili equation. This approach can be easily applied to corresponding multidimensional inverse problems. The results of numerical calculations are presented.*

Keywords: Gelfand-Levitan equation, Krein equation, Marchenko equation, inverse coefficient problem, inverse scattering problem

We consider the method of regularization of 2D inverse coefficient problems based on the projection method and the approach of I. M. Gelfand, B. M. Levitan, M. G. Krein and V.A. Marchenko.

In 1951 I. M. Gelfand and B. M. Levitan [8] established a method of reconstructing the Sturm–Liouville operator from a spectral function and gave the sufficient conditions for a given monotonic function to be a spectrum function of the operator. In 1951 and 1954 M. G. Krein [11,12] considered the physical statement of the inverse boundary value problem and proved solvability. In 1950 and 1952 V. A. Marchenko [13,14] applied the transformation operators for investigation of the inverse problems and proved that spectral function of the Sturm–Liouville operator defines the operator uniquely.

In 1967 C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura [7] developed the Inverse Scattering Transform method. The idea is to solve an initial-value problem for the Korteweg–de Vries (KdV) equation within a class of initial conditions. Later generalised to many other completely integrable equations such as the nonlinear Schrödinger equation, the Sine-Gordon equation etc. The availability of the travelling wave (and, in particular, solitary wave) solutions for the KdV equation does not constitute its integrability. The practical implication of complete integrability is the ability to integrate the KdV equation for a reasonably broad class of initial or boundary conditions. The Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation is the 2D analog of the KdV equation.

One of the advantages of our approach (for 1D inverse coefficient problems see also [27,6,26]) is that it allows one to avoid multiple solution of 2D direct problem (see also the boundary control method proposed by M. I. Belishev [2,3] and the globally convergent method proposed by

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-01-09230), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant 1760/GF, project NTP 04.03.02 "Creating methodological basis of geological-geophysical studies of focal zones UNE in igneous rocks".

M. V. Klivanov [4,5]). In [16] we proved that boundary control method and the method by M.G. Krein are equivalent in 1D case.

1 2D analogy of Gelfand-Levitan equation

Let us consider the sequence of direct problems ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky},$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}.$$

Inverse problem 1: find function $q(x, y)$ using additional information

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

The uniqueness of the inverse problem 1 can be proved using the technique in [28,29]

Let us consider the sequence of the auxiliary problems ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) [18,21]

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - q(x, y)w^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = e^{imy}\delta(t), \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (2)$$

It was proved in [18,21] that the solution to the problem (1), (2) has the form

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = & \frac{1}{4}e^{imy}\theta(x - |t|) \left[xm^2 + \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y)d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y)d\xi \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} [-\tilde{w}_{yy}^{(m)} + q(x, y)\tilde{w}^{(m)}](\xi, y, \tau)d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{1}{4}e^{imy} \left[xm^2 + \int_0^x q(\xi, y)d\xi \right]. \quad (3)$$

The inverse problem 1 can be reduced to the system of integral equations ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) of the first

$$\int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)}(t - s)\tilde{w}^{(m)}(x, y, s)ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t - x) + f^{(k)}(y, t + x)], \quad (4)$$

or the second kind

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)'}(t - s)\tilde{w}^{(m)}(x, y, s)ds = \\ = -\frac{1}{2} [f_t^{(k)}(y, t - x) + f_t^{(k)}(y, t + x)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Here $|t| < x, y \in \mathbb{R}$. The system of equations (4) and (5) are 2D analogy of the Gelfand-Levitan equation.

Note that according to (3) $q(x, y)$ can be calculated as follows

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x - 0).$$

2 2D analogy of M.G. Krein equation

Let us consider the sequence of direct problems ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u^{(k)}|_{t < 0} &\equiv 0, \quad u_x^{(k)}(+0, y, t) = e^{iky} \delta(t); \\ u^{(k)}|_{y=\pi} &= u^{(k)}|_{y=-\pi}. \end{aligned}$$

Inverse problem 2: find function $\rho(x, y)$ using additional information

$$u^{(k)}(+0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

The inverse problem 2 can be reduced to the 2D analogy of M.G. Krein equation [18,21] $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$2\Phi^k(x, t) + \sum_m \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^{(m)}(x, s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad |t| < x. \quad (6)$$

The inverse problem solution $\rho(x, y)$ can be calculated by the formula

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi^{(m)}(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}. \quad (7)$$

For finding inverse problem solution $\rho(x, y)$ in point $x_0 > 0$ we have to solve the system (6) with $x = x_0$ and calculate $\rho(x_0, y)$ by formula (7). For numerical calculations (see figures 1–4) we use N -approximation [17,22] of M.G. Krein equation [21] e.g. we cut the system (6) putting $\Phi^k(x, t) \equiv 0$ for all $N < |k|$ [23].

Discrete analogies of the Gelfand–Levitan equation were considered in [9,25,19,20].

3 2D analogy of M.G. Marchenko equation

The Kadomtsev–Petviashvili equation (the KP equation) is a nonlinear partial differential equation in two spatial and one temporal coordinate which describes the evolution of nonlinear, long waves of small amplitude with slow dependence on the transverse coordinate. There are two distinct versions of the KP equation, which can be written in normalized form as follows:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\sigma^2 u_{yy} = 0. \quad (8)$$

Here $u = u(x, y, t)$ is a scalar function, x and y are respectively the longitudinal and transverse spatial coordinates, and $\sigma^2 = \pm 1$.

The case $\sigma = 1$ is known as the KP II equation, and models, for instance, water waves with small surface tension. The case $\sigma = i$ is known as the KP I equation, and may be used to model waves in thin films with high surface tension. The equation is often written with different coefficients in front of the various terms, but the particular values are inessential, since they can be modified by appropriately rescaling the dependent and independent variables.

The KP equation is a universal integrable system in two spatial dimensions in the same way that the Korteweg–de Vries (the KdV) equation can be regarded as a universal integrable system in one spatial dimension, since many other integrable systems can be obtained as reductions. As

such, the KP equation has been extensively studied in the mathematical community in the last forty years. The KP equation is also one of the most universal models in nonlinear wave theory, which arises as a reduction of system with quadratic nonlinearity which admit weakly dispersive waves, in a paraxial wave approximation. The equation naturally emerges as a distinguished limit in the asymptotic description of such systems in which only the leading order terms are retained and an asymptotic balance between weak dispersion, quadratic nonlinearity and diffraction is assumed. The different role played by the two spatial variables accounts for the asymmetric way in which they appear in the equation.

The KP equation originates from a 1970 paper by B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili [24]. They derived the equation as a model to study the evolution of long ion-acoustic waves of small amplitude propagating in plasmas under the effect of long transverse perturbations. In the absence of transverse dynamics, this problem is described by the KdV equation. The KP equation was soon widely accepted as a natural extension of the classical KdV equation to two spatial dimensions, and was later derived as a model for surface and internal water waves [1], and in nonlinear optics [15], as well as in other physical settings.

As shown in [10], the KP equation

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 3\sigma^2 w_y = 0, \quad (9)$$

$$w_x = u_y, \quad (10)$$

on the half-plane $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ with the boundary condition

$$u_x + \sigma w|_{y=0} = 0, \quad (11)$$

is compatible with such characteristic signs of integrability as higher symmetries and the Bäcklund transformation.

The problem can be reduced to the following Gelfand–Levitan–Marchenko equation

$$K(x, z, y, t) + F(x, z, y, t) + \int_{-\infty}^x K(x, \xi, y, t)F(\xi, z, y, t)d\xi = 0, \quad (12)$$

where the kernel $F(x, z, y, t)$ solves the system of partial-differential equations

$$\sigma F_y - F_{xx} + F_{zz} = 0,$$

$$F_t + 4(F_{xxx} + F_{zzz}) = 0.$$

Therefore, the solution of nonlinear equation can be found by formula

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, y, t).$$

4 Reconstruction of the velocity $c(x, y)$

Inverse problem 3: find the velocity $c(x, y)$ from the sequence of relations ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$c^{-2}(x, y)u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = e^{iky} \delta(x).$$

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}(+0, y, t) = 0.$$

Let $\tau(x, y)$ be a solution of Cauchy problem for the eikonal equation

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}; \tag{13}$$

$$\tau|_{x=0} = 0, \quad \tau_x|_{x=0} = c^{-1}(0, y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Let us introduce new variables $z = \tau(x, y)$, $y = y$ and new functions

$$v^{(k)}(z, y, t) = u^{(k)}(x, y, t), \quad b(z, y) = c(x, y). \tag{15}$$

Since the velocity is supposed to be strictly positive this change of variables is not degenerate at least in some interval $x \in (0, h)$.

Let us consider the sequence of the auxiliary problems ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) [18,?]:

$$w_{tt}^{(m)} = w_{zz}^{(m)} + b^2 w_{yy}^{(m)} + q w_{yz}^{(m)} + p w_z^{(m)}, \quad z > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{16}$$

$$w^{(m)}(0, y, t) = e^{imy} \delta(t), \quad w_z^{(m)}(0, y, t) = 0. \tag{17}$$

Here

$$q(z, y) = 2b^2 \tau_y, \quad p(z, y) = b^2(z, y)(\tau_{xx} + \tau_{zz}). \tag{18}$$

We suppose that $c(0, y) = b(0, y)$ is known and for simplicity $b(0, y) \equiv 1$ for $y \in \mathbb{R}$.

In the neighborhood of the plane $t = z$ the solution of the direct problem (16), (17) has the form [18,?]:

$$w^{(m)}(z, y, t) = S^{(m)}(t, y)\delta(z - t) + Q^{(m)}(t, y)\theta(z - t) + \tilde{w}^{(m)}(z, y, t). \tag{19}$$

Here $\tilde{w}^{(m)}$ is continuous function and functions $S^{(m)}$ and $Q^{(m)}$ solve the following problems:

$$2S_t^{(m)} + qS_y^{(m)} + pS^{(m)} = 0, \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}; \tag{20}$$

$$S^{(m)}|_{t=0} = \frac{1}{2}e^{imy}. \tag{21}$$

$$2Q_{tt}^{(m)} = S_{tt}^{(m)} - [qQ_y^{(m)} + b^2 S_{yy}^{(m)} + pQ^{(m)}], \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}; \tag{22}$$

$$Q^{(m)}|_{t=0} = 0. \tag{23}$$

The 2D analogy of M.G. Krein equation follows from (19) ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\sum_m S^{(m)}(z, y) f_m^{(k)'}(t - z) + \tilde{w}^{(k)}(z, y, t) + \sum_m \int_{-z}^z f_m^{(k)'}(t - s) \tilde{w}^{(m)}(z, y, s) ds = 0, \quad |t| < z. \tag{24}$$

So for solving the inverse problem 3 we can solve the system (20)–(24), using the projection method and then find $c(x, y)$ from the following iterative algorithm.

First, we introduce N -approximation of the system (20)–(24), e.g. let $\tilde{w}^{(m)}$, $S^{(m)}$ and $Q^{(m)}$ be equal to 0 for all $|m| > N$. Let us suppose that $c_n(x, y)$ is known. Then we calculate $\tau_n(x, y)$ from (13), (14), $b_n(z, y)$ from (15) and $q_n(z, y)$ and $p_n(z, y)$ from (18). Function $S_n^{(m)}(t, y)$ is calculated from (20), (21). Then solving the 2D analogy of M.G. Krein equation (24) we find $\tilde{w}_n^{(m)}(z, y, t)$ for $|m| \leq N$. It follows from (19) that $Q_n^{(m)}(t, y) = \tilde{w}_n^{(m)}(t + 0, y, t)$. Then from equations (20) and (22) we find function $b_{n+1}(z, y)$ and after that new value $c_{n+1}(x, y) = b_{n+1}(z, y)$ is calculated.

In numerical experiments (see figures 1–4) 2D inverse problem 2 is approximated by the finite system of one dimensional inverse acoustic problems [21,22,23]. The inverse problem 2 is solved in the domain $x \in (0, 1)$, $y \in (-\pi, \pi)$ and $t \in (0, 2)$. The number N is equal to 5 for figure 2 and the number N is equal to 10 for figures 3 and 4. The noisy data is taken as

$$f^\varepsilon(t) = f(t) + \varepsilon\alpha(t)(f_{\max} - f_{\min}).$$

Here ε is the level of noise, $\alpha(t)$ is white noise for fixed t , f_{\max} and f_{\min} are maximum and minimum values of exact data. The dimension of the space grid is equal to 100×100 .

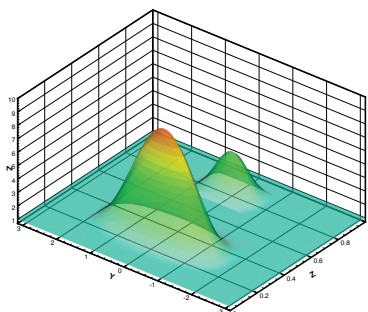


Fig. 1. The exact solution of the inverse problem 2.

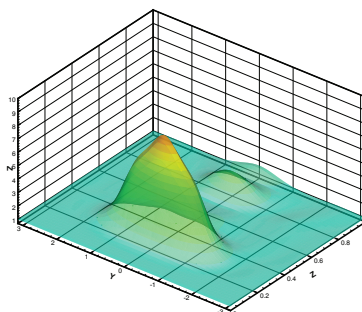


Fig. 2. The approximate solution of the inverse problem 2, $N = 5$, $\varepsilon = 0$.

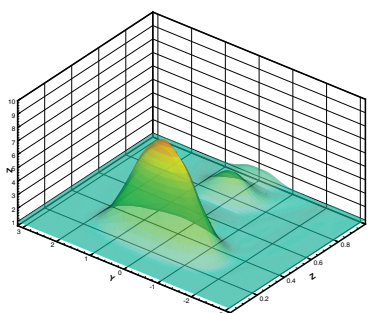


Fig. 3. The approximate solution of the inverse problem 2, $N = 10$, $\varepsilon = 0$.

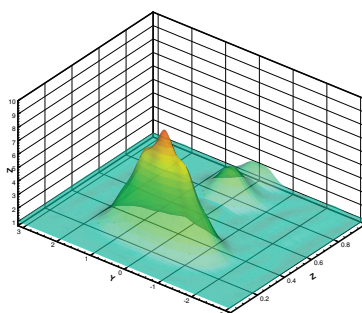


Fig. 4. The approximate solution of the inverse problem 2, $N = 10$, $\varepsilon = 0.05$.

Acknowledgments

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-01-09230), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant MES 1760/GF: project NTP 04.03.02 “Creating methodological basis of geological-geophysical studies of focal zones UNE in igneous rocks”.

References

1. Ablowitz, M.J., Segur, H.: On the evolution of packets of water waves. *J. Fluid Mech.* 92, 691–715 (1979)
2. Belishev, M.I.: Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method). *Inverse Problems.* 13 (5) R1–R45 (1997).
3. Belishev, M.I.: Recent progress in the boundary control method. *Inverse Problems.* 23 (5), R1–R67 (2007).
4. Beilina, L., Klibanov, M.V.: A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem. *SIAM J. Sci. Comp.* 31, 478–509 (2008).
5. Beilina, L., Klibanov, M.V., Kokurin, M.Yu.: Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem. *J. of Mathematical Sciences.* 167, 279–325 (2010).
6. Burridge, R.: The Gelfand-Levitan, the Marchenko and the Gopinath-Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems. *Wave Motion.* 2, 305–323 (1980).
7. Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M.: Method for Solving the Korteweg-deVries Equation. *Physical Review Letters.* 19(19), 1095–1097 (1967).
8. Gelfand, I.M., Levitan, B.M.: On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 15, 309–360 (1951) (in Russian).
9. Gladwell, G.M.L., Willms, N.B.: A discrete Gelfand-Levitan method for band-matrix inverse eigenvalue problems. *Inverse Problems.* 5, 165–179 (1989).
10. Gudkova, E.V., Habibullin, I.T.: Kadomtsev-B²-Petviashvili Equation on the HalfPlane. *Teoret. Mat. Fiz.* 140(2), 230–240 (2004).
11. Krein, M.G.: Solution of the inverse Sturm-Liouville problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 76, 21–24 (1951) (in Russian).
12. Krein, M.G.: On a method of effective solution of an inverse boundary problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 94, 987–990 (1954) (in Russian).
13. Marchenko, V.A.: Several questions of the theory of the differential operator of the second order. *Doklady Akademii Nauk.* 72 457–460 (1950) (in Russian).
14. Marchenko, V.A.: Several questions about the theory of one dimensional linear differential operator of the second order I. *Proceedings of Moscow Mathematical Society.* 1, 327–420 (1952) (in Russian).
15. Pelinovsky, D.E., Stepanyants, Yu.A., Kivshar, Yu.A.: Self-focusing of plane dark solitons in nonlinear defocusing media. *Phys. Rev.* 51, 5016–5026 (1995).
16. Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A.: Boundary control and Gel’fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem. *J. Inv. Ill-Posed Problems.* 12 (2), 125–144 (2004).
17. Kabanikhin, S.I.: Regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations based on a projection method. *Doklady Akademii Nauk.* 292 (3), 534–537 (1987)
18. Kabanikhin, S.I.: On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations. *Sov. Math. Dokl.* 40(3), 579–583 (1990).
19. Kabanikhin, S.I., Bakanov, G.B.: Discrete analogy of Gelfand-Levitan method *Doklady Akademii Nauk.* 356 (2) 157–160 (1997).
20. Kabanikhin, S.I., Bakanov, G.B.: A discrete analog of the Gelfand-Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation. *Siberian Mathematical Journal.* 40 (2), 262–280 (1999)
21. Kabanikhin, S.I., Satybaev, A.D., Shishlenin, M.A.: *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems VSP, The Netherlands* (2005).
22. Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A.: Quasi-solution in inverse coefficient problems. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems.* 16 (7), 705–713 (2008).
23. Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A.: Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel’fand-Levitan-Krein equation. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems.* 18 (9), 979–995 (2011).
24. Kadomtsev, B.B., Petviashvili, V.I.: On the stability of solitary waves in weakly dispersive media. *Sov. Phys. Dokl.* 15, 539–541 (1970).
25. Natterer, F.: A discrete Gelfand-Levitan theory. Technical report, Institut fuer Numerische und instrumentelle Mathematik Universitaet Muenster Germany (1994).
26. Santosa, F.: Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand-Levitan method. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 70, 229–244 (1982).
27. Symes, W.W.: Inverse boundary value problems and a theorem of Gel’fand and Levitan. *J. Math. Anal. Appl.* 71 378–402 (1979).
28. Sylvester, J., Uhlmann, G.: A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.* 125, 153–169 (1987).
29. Rakesh: An inverse problem for the wave equation in the half plane. *Inverse Problems.* 9, 433–441 (1993).

Mathematical Modelling of Radiating Processes in the Solids Irradiated by Heavy Ions

Sh.E. Jeleunova*, T.A.Shmygaleva, A.I.Kupchishin, E.V.Shmygalev, A.A.Kupchishin, L.Sh.Cherikbayeva, I.D.Masyrova, and B.B.Alrakymov

Al-Farabi Kazakh National University,
Al-Farabi 71, 050040 Almaty, Kazakhstan
{Shmyg1953}@mail.ru

Abstract. In this work the modelling of the processes of radiation defect formation in solids irradiated by heavy ions within the cascade-probabilistic method (CPM), which is analytic. All the mathematical models describing these processes are received both from physical reasons, and from Kolmogorov-Chapman equations. Essence of CPM consists in reception and further use cascade-probabilistic functions (CPF), CPF makes sense of the fact that the particle generated on depth h' will reach depth h after N number of impacts. Mathematical models are received in such a way that in them are considered energy losses to ionization and excitation of the electron envelopes of the atoms of medium with interaction of heavy ions with solid.

Keywords: modeling, defect formation, cascade-probabilistic, ion, target, recurrence relation, approximation, concentration, vacancies cluster, spectrum of primarily knocked-on atoms.

Introduction

Charged particle along the path of its motion continuously loses its energy for the ionization and excitation (the energy losses of dE/dx for each type of particles depending on energy they are known and described by analytical expressions, in particular, by Bethe-Bloch formula). Collisions with the atoms, the nuclei occur discretely. After collisions, primary particles preserve direction of their motion. During the motion of the charged ions through the substance their run depends on the energy through the section interaction of $\lambda(E)=1/\sigma(E)*n$, where n - number of atoms in the cubic centimeter of medium. The mathematical model of cascade-probabilistic functions taking into account energy losses for the ions with the use of recurrence relations in accordance with this physical model is developed.

Further the analysis of CPF calculations is carried out in the dependence on the number of interactions and depth of penetration of particles and the new regularities are obtained, appearing with interaction of heavy ions with solids. The features of these functions are analyzed. It is shown that, in spite of apparent simplicity, their calculation on PC it is often difficult, it is necessary to have recourse to different mathematical devices, to use special methods, to select the real region of finding the result. The detailed analysis of behavior of these functions depending on energy of flying particles, atom number of a target, depth of generation and registration, number of interactions is carried out also.

The successfully selected approximated formulas for a number of the parameters contributed to obtaining of CPF in the analytical form, which made it possible considerably to more deeply understand general regularities of the processes. The received CP - functions were used for calculating of PKA spectra and concentration of vacancies clusters, formed during irradiation solids by heavy ions (1-1000 keV). New regularities are revealed during calculations, for the concentration of vacancies clusters it is also necessary to match the real region of finding the result. As show calculations, these results sufficiently well will agree with existing experimental data. Work was carried out in the context of CPF [1-6].

Passage of ions through substance is a complex task as at creation physical and mathematical models. The set of types of flying particles and targets of Periodic system of Mendeleev represents huge quantity of elements. Thus it is possible to consider various situations when the mass number of flying particles less than atomic number of a target, is commensurable with atomic number of a target and a case when the atomic weight of a flying particle is more or much more than atomic number of a target. Elements are classified by us on easy and heavy on the density of element.

Recurrence relations from which in cascade-probabilistic functions are deduced, turn out from Kolmogorov-Chapman equation for Markov process, which has a following form [7]:

$$p_{in}(\tau, t) = \sum_{\nu} p_{i\nu}(\tau, s) p_{\nu n}(s, t), \quad (1)$$

where $\tau < s < t$.

From (1) it is received

$$\psi_{in}(h', h, \alpha_0) = \sum_{\nu} \psi_{i\nu}(h', h'', \alpha_0) \psi_{\nu n}(h'', h, \alpha_0). \quad (2)$$

As process of interaction of ions with the solid is continuous on time and consequently, and on depth of penetration, the sum sign in expression (2) is replaced with integral. The following recurrence relation turns out:

$$\psi_n(h', h, E_0) = \int_{h'}^h \psi_{n-1}(h', h'', E_0) \psi_0(h'', h, E_0) * \sigma(h) dh'' . \quad (3)$$

As the integral isn't taken analytically as section Rezerford entering into sub-integral expression, has a complex form, the values calculated under formula Rezerford, are approximated by following expression [3]:

$$\sigma(h) = \sigma_0 \left(\frac{1}{\alpha(E_0 - kh)} - 1 \right), \quad (4)$$

then the recurrence relation will look as follows:

$$\begin{aligned} \psi_n(h', h, E_0) = \int_{h'}^h \psi_{n-1}(h', h'', E_0) \psi_0(h'', h, E_0) * \\ * \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\alpha(E_0 - kh'')} - 1 \right) dh'', \end{aligned} \quad (5)$$

where σ_0, α, E_0, k - coefficient of approximation, $\lambda_0 = 1/\sigma_0$.

From the given recurrence relation, we receive cascade-probabilistic functions in view of losses of energy as during interaction process of ions with the solid, there are losses of energy on ionization and excitation, which are necessary for considering turn out. The approximation expression includes energy that is constantly decreasing due to losses, run on the interaction also changes. Approximation is selected in such a way that the integral would be taken analytically, and so that the theoretical correlation ratio would be as close as possible to 1. Calculations were made in an interval of energy 100-1000 keV. Results of approximation are resulted in tables (1, 2) and in pictures 1, 2.

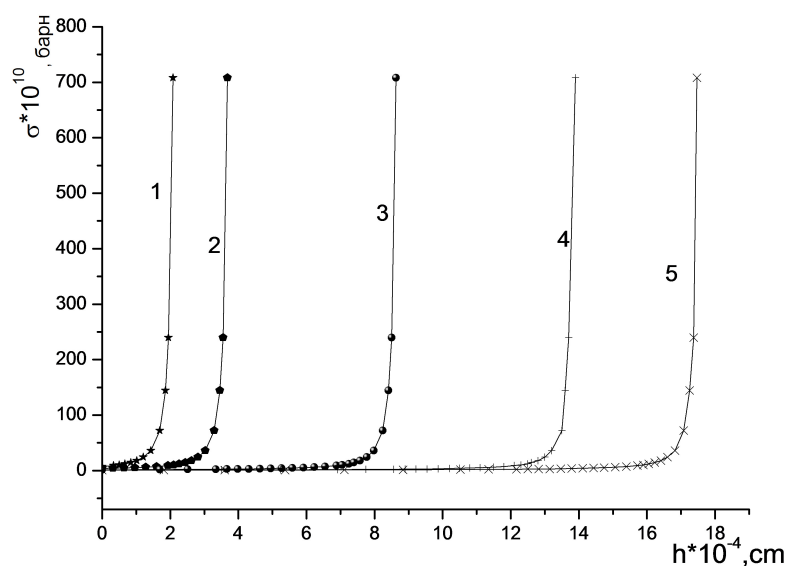
From charts and tables it is visible, that picked up approximation curves are described very well by rated data.

Table 1. Approximation parameters for gold in silicon

E_0	$\sigma_0 * 10^{10}$	a	E'_0	k	η
1000	3,3583	0,61385	0,91438	828,6	0,998
800	4,6131	0,86956	0,66608	735,34	0,994
500	6,0731	1,2172	0,41475	697,21	0,997
200	12,332	2,1647	0,18863	640,02	0,9996
100	16,961	2,8437	0,11084	626,72	0,9996

Table 2. Approximation parameters for gold in gold

E_0	$\sigma_0 * 10^{11}$	a	E'_0	k	η
1000	0,68122	0,71987	0,7813	24891	0,998
800	0,86517	0,99611	0,5655	21979	0,998
500	1,1304	2,4237	0,20356	11947	0,993
200	2,8258	3,5351	0,12891	14986	0,998
100	3,6475	1,2123	0,27707	53051	0,99992

**Fig. 1.** Approximation of section of cascade-probabilistic function for silver in silicon at $E_0 = 100(1), 200(2), 500(3), 800(4), 1000(5)$ keV. Points - the calculated data dependences of section on depth, a continuous line - approximation.

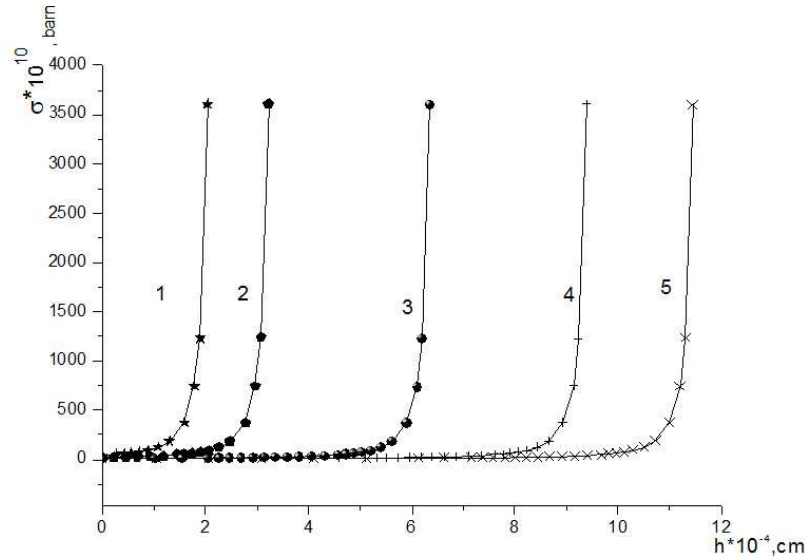


Fig. 2. Approximation of the modified section of cascade-probabilistic function for gold in silicon $E_0 = 100(1), 200(2), 500(3), 800(4), 1000(5)$ keV. Points - the calculated data dependences of section on depth, a continuous line - approximation.

From the recurrence relation (5) in cascade-probabilistic functions in view of losses of energy for ions in a following type are received [3]:

$$\psi_n(h', h, E_0) = \frac{1}{n! \lambda_0^n} \left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh} \right)^{-l} \exp \left(\frac{h - h'}{\lambda_0} \right) * \left[\frac{\ln \left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh} \right)}{ak} - (h - h') \right]^n. \quad (6)$$

However, to use this formula for calculations it is impossible, as at large values of number of impacts, or at small value 0 there is an overflow. The number of impacts for ions can reach some millions. Some algorithms are developed for calculation CPF.

In the given work to calculate the cascade-probabilistic functions depending on the number of interactions and the depth of penetration the following formula is used:

$$\psi_n(h', h, E_0) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\ln \left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh} \right) - (h - h')}{\lambda_0 i} \right) * \exp \left(\left(\frac{h - h'}{\lambda_0} \right) - \frac{1}{\lambda_0 ak} \ln \left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh} \right) \right), \quad (7)$$

where n - number of interactions, h', h - depths of generation and registration of the ion, λ_0, a, E_0, k - parameters of approximation. At a finding approximation parameters entering in (7), the following was used:

1. The section of atom-atom interactions was calculated by Rutherford's formula.
2. The depths of observations were located with the aid of the tables of the parameters of the spatial distribution of ion-implanted admixtures [8].
3. The calculated values of section were approximated by expression (4).

The results of CPF calculations depending on the number of interactions and depth of penetration of particles are presented in tables 3 - 6 and in figures 3, 4. The regularities arising at calculation CPF, spectra of the primarily knocked-on atoms and concentration of radiating defects are considered. In this case the influence of the depth of penetration, atomic number of a flying particle and target, initial energy of primary particle is considered. At CPF calculation in view of losses of energy for ions and concentration of radiating defects it is necessary to find actual area of a finding of result which behaves differently depending on various factors. For example, the area of CPF result calculated depending on number of interactions is narrowed and displaced to the left, from depth of penetration is narrowed and displaced to the right. It is especially necessary to note the case, when the density of the flying particle is great, and target it is small, then the selection of the boundaries of the region of result considerably is complicated. So at the end of the run of particle region strongly becomes narrow, sometimes to one hundredths of a percent, and curve can pass into the straight line. Therefore it is necessary to find area of result for flying heavy ions in easy and heavy elements and to reveal regularities of behavior of this area depending on initial energy of a primary particle, depth of penetration, atom number of the target.

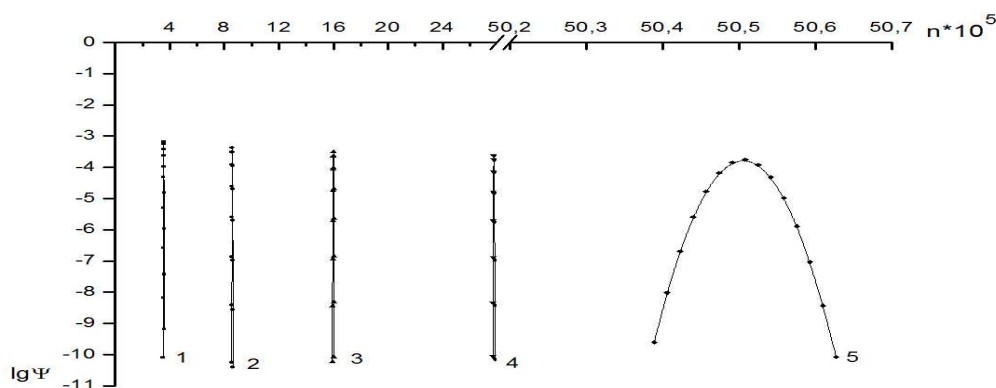


Fig. 3. Dependence of CPF on the number of interactions for gold in silicon with $h = 1, 2, 3, 4, 5 (\cdot 10^{-4})$; $E = 500$ keV (1-5).

Let's note some regularities of behavior of area of result at variation of number of interactions of particles:

1. With reduction of initial energy (a flying particle and a target the same) at the same depth the area of result is narrowed and displaced to the left.
2. Depending on depth of penetration behavior of area similar.
3. With an increase of atom number of the target depths of penetration decrease and reach $10^6 - 10^7$ cm., for example for gold in gold.
4. The narrowest area of result turns out at the big nuclear weight of a flying particle and small targets on the end of run and reaches the 100-th fractions of percent. In this case the count time strongly grows. For example, for gold in silicon with $E_0 = 1000$ MeV and $h = 0.001$ cm. the region of result becomes narrow to 0.017%.

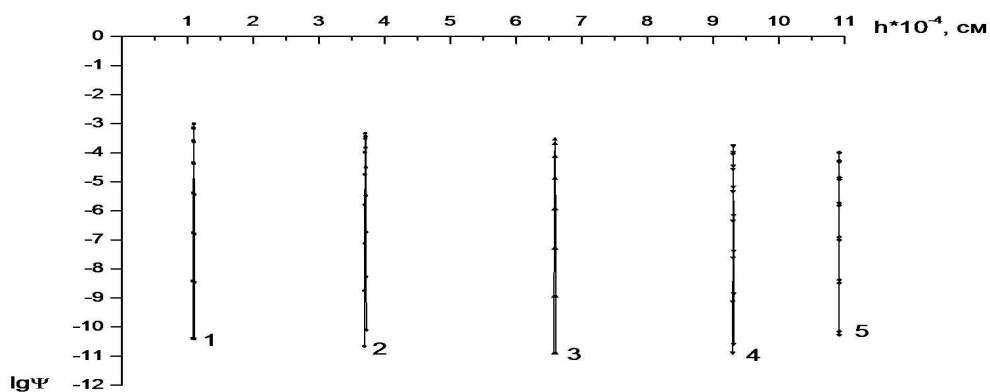


Fig. 4. Dependence of $\psi_n(h', h, E_0)$ on h for gold in silicon with $E_0=1000$ keV for $n = 161053; 728805; 1895427; 4551380; 13087291; (1-5)$.

Table 3. Dependence of the percentage of the shift of the left and right boundaries of the region of result on the number of interactions for gold in silicon: a) $E_0=1000$ keV; b) $E_0 = 500$ keV; c) $E_0 = 100$ keV

	$h * 10^4, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
a)	1	10.9	-8	300	2,9
	3	25.98	-24.78	650	1,2
	5	39.5	-38.85	900	0,65
	7	53.03	-52.66	1250	0,37
	9	68.99	-68.81	1700	0,18
	$h * 10^4, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
b)	1	16,18	-14,6	500	1,58
	2	29,15	-28,25	750	0,9
	3	41,63	-41,1	1000	0,53
	4	54,82	-54,52	1300	0,3
	5	70,94	-70,795	1700	0,145
	$h * 10^4, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
c)	1	5,35	-2,75	350	2,6
	3	12,82	-11,5	650	1,32
	5	20,69	-19,85	800	0,84
	7	28,81	-28,2	1000	0,61
	9	37,33	-36,9	1200	0,43

Table 4. Dependence the percentage the displacement the left and right boundaries of the region of result from the number of interactions for gold in gold: a) $E_0 = 1000$ keV; b) $E_0 = 500$ keV; c) $E_0 = 100$ keV

a)	$h * 10^6, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
	10	31,11	-27	180	4,11
	15	42,25	-39,8	250	2,45
	20	53,82	-52,3	320	1,52
	25	67,36	-66,55	420	0,81
	30	87,84	-87,65	650	0,19
b)	$h * 10^6, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
	10	48,3	-46,5	340	1,8
	12	57,76	-56,62	380	1,14
	14	68,95	-68,24	500	0,71
	16	84,5	-84,24	610	0,26
c)	$h * 10^7, \text{cm}$	$B_1, \%$	$B_2, \%$	N_n	$B_3, \%$
	10	16,4	-11,7	180	4,7
	15	22,6	-19,3	250	3,3
	20	29,2	-26,7	280	2,5
	25	36,1	-34,2	330	1,9
	30	43,55	-42,1	400	1,45
	35	51,6	-50,5	480	1,1

Table 5. Dependence the percentage of the shift of the left and right boundaries of the region of result from the depth of penetration for gold in silicon: a) $E_0=1000$ keV; b) $E_0 = 500$ keV; c) $E_0 = 100$ keV

a)	$h * 10^4, \text{cm}$	$h/\lambda, \text{cm}$	$C_1, \%$	$C_2, \%$	N_h	$C_3, \%$
	1	161053	-8,035	11	530	2,965
	3	728805	-22,965	24,15	1500	1,185
	5	1895427	-31,53	32,1	3300	0,57
	7	4551380	-32,804	33,01	10000	0,206
	9	13087291	-21,27	21,287	100000	0,017
b)	$h * 10^4, \text{cm}$	$h/\lambda, \text{cm}$	$C_1, \%$	$C_2, \%$	N_h	$C_3, \%$
	1	419385	-14,16	15,85	1000	1,69
	2	1204988	-25,5	26,35	2100	0,85
	3	2729393	-32,0515	32,48	4500	0,4285
	4	6129971	-31,495	31,64	13500	0,145
5	17339549	-18,4049	18,4125	230000	0,0076	
c)	$h * 10^4, \text{cm}$	$h/\lambda, \text{cm}$	$C_1, \%$	$C_2, \%$	N_h	$C_3, \%$
	1	200374	-2,82	5,6	550	2,78
	3	717637	-11,36	12,75	1200	1,39
	5	1451482	-18,865	19,765	1950	0,9
	7	2523517	-25,265	25,860	3100	0,595
9	4167361	-29,8925	30,26	5200	0,3675	

Table 6. Dependence of the percentage of the shift of the left and right boundaries of the region of result on the depth of penetration for gold in gold at $E_0 = 100$ keV

$h * 10^6, \text{cm}$	$h/\lambda, \text{cm}$	$C_1, \%$	$C_2, \%$	N_h	$C_3, \%$
1,0	57721	-11,45	16,5	330	5,05
1,5	102546	-18,29	21,67	500	3,38
2,0	164619	-24,08	26,5	750	2,42
2,5	253442	-28,5708	30,1	1200	1,5292
3,0	387068	-31,13	32,17	1750	1,04
3,5	604507	-30,722	31,25	3700	0,528

The regularities of behavior of area of result depending on depth of penetration are revealed:

1. Depending on number of interactions the area is displaced to the right and narrowed, the left and right borders of area decrease, on the end of run sharply increase. At small values of initial energy slightly increase or decrease.
2. Depending on initial energy of a particle the area also is displaced to the right and narrowed.
3. With an increase of number of interactions the step for calculation strongly increases.

The irradiation of metals by heavy ions, to which correspond the higher densities, the defects are formed: vacancies type dislocation loops. In this case [9] it is assumed that the interstitial atoms migrate from the formed defective zone and the zones of vacancies remained in the atom athermally and thermally are reconstructed and collapse into the vacancies loop. Let us note that collapsing defective zone into the amorphous in the semiconductors and vacancies loop in the metals reflects different effectiveness of the migration of point defects, and influence of the type of interatomic bonds. Thus, existing works and existing methods of calculation of concentration of the defects arising at an irradiation of metals by fast ions, or essentially overestimate experimental data on concentration and do not explain their observable sizes, or in the offered models there are free parameters which are not defined from any physical reasons.

Let's consider process of formation of defects and vacancies clusters within the limits of CP - models for this purpose: first, we shall calculate power spectrum of primarily knocked-on atoms $W(E_0, E_2, h)$ on various depths. Secondly, knowing the $W(E_0, E_2, h)$, we shall find concentration of cascade areas. For calculation of vacancies clusters concentration it is necessary to integrate spectrum PBA $W(E_0, E_2, h)$ on E_2 from E_c up to E_{2max} [10,11]:

$$C_k(E_0, h) = \int_{E_c}^{E_{2max}} W(E_0, E_2, h) dE_2, \quad (8)$$

$$E_{2max} = \frac{4m_1c^2m_2c^2}{(m_1c^2 + m_2c^2)^2} E_1. \quad (9)$$

Spectrum of PBA $W(E_0, E_2, h)$ is determined by formula [10]:

$$W(E_0, E_2, h) = \sum_{n=0}^{n_1} \int_{h-k\lambda_2}^h \psi_n(h') \exp\left(-\frac{h-h'}{\lambda_2}\right) \frac{\omega(E_1, E_2, h') dh'}{\lambda_1(h') \lambda_2}, \quad (10)$$

where n_1 - the maximal number of elastic impacts, $\psi_n(h')$ - cascade-probabilistic function in view of losses of energy for ions after n-th of interactions on depth of generation h' . For finding λ_2 we calculate σ_2 from Rutherford's formula. In the elementary action at the depth of h' the PBA spectrum is defined as the ratio of differential Rutherford section to the integral, i.e. [12]:

$$w(E_1, E_2) = \frac{d\sigma(E_1, E_2)/dE_2}{\sigma(E_1)}, \quad (11)$$

$$\frac{d\sigma(E_1, E_2, h)}{dE_2} = 4\pi a_0^2 E_r^2 z_1^2 z_2^2 \frac{1}{E_1 E_2} 10^{24}. \quad (12)$$

Finally, we receive the formula for calculation vacancies clusters [13]:

$$C_k(E_0, h) = \frac{E_d (E_{2max} - E_c)}{E_c (E_{2max} - E_d)} \sum_{n=n_0}^{n_1} \int_{h-k\lambda_2}^h \psi_n(h') \exp\left(-\frac{h-h'}{\lambda_2}\right) \frac{dh'}{\lambda_1(h') \lambda_2}. \quad (13)$$

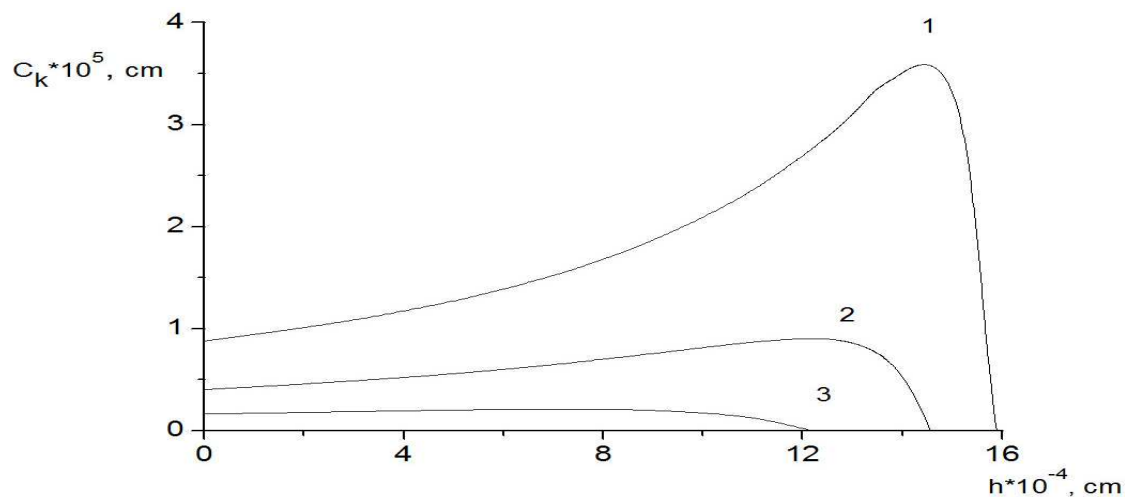


Fig. 5. Dependence of concentration of radiating defects on depth at an irradiation of silicon with ions of silver at $E_0 = 1000$ keV, $E_c = 50$ keV (1), 100 keV (2), 200 keV (3).

Table 7. Range borders of concentration definition of radiating defects for silver in silicon at $E_c = 50$ keV, $E_0 = 1000$ keV

$h * 10^4, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,1	88082,9	1000	174	417	4''
1,81	99324,6	900	60299	63742	15'
3,60	113195,6	800	130090	135256	46'
5,37	130454,8	700	210534	217106	1°33'09''
7,11	152649,5	600	304159	311851	2°37'
8,84	181910,5	500	416958	426047	4°11'
10,52	220917,3	400	553995	564515	6°25'58''
11,35	246186,7	350	636131	647055	7°39'
12,17	275726,9	300	730486	742372	9°33'
12,50	288048,2	280	773157	785169	10°13'
12,82	301953,9	260	817668	830230	11°16'
13,14	327040,8	240	865743	878584	12°13'
13,47	345536,9	220	919681	932919	13°55'
13,79	343932,4	200	976991	991171	14°20'
14,11	354807,8	180	1040229	1054285	15°31'
14,43	360602,6	160	1110714	1125270	16°28'
14,74	355618,9	140	1187615	1202706	20°35'
15,07	330194,8	120	1281471	1297282	1, 5 d
15,39	254778,6	100	1388250	1404749	1, 7 d
15,72	61259,9	80	1521343	1538931	1, 8 d
15,89	0	70	1602632	1620512	2 d

Table 8. Range borders of concentration definition of radiating defects for silver in silicon at $E_c = 100$ keV, $E_0 = 1000$ keV

$h * 10^4, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,1	40402,9	1000	174	417	4''
1,81	45061,29	900	60299	63742	15'
3,60	50629,54	800	130090	135256	46'
5,37	57246,47	700	210534	217106	1°33'
7,11	65202,7	600	304159	311851	2°36'
8,84	74573	500	416958	426047	4°11'
10,52	84417,19	400	553995	564515	6°26'01''
11,35	88771,47	350	636131	647055	7°39'
12,17	90830,92	300	730486	742372	9°33'
12,50	90065,35	280	773157	785169	10°13'
12,82	88254,7	260	817668	830230	11°16'
13,14	84265,7	240	865743	878584	12°13'
13,47	77424,67	220	919681	932919	13°55'
13,79	65868,23	200	976991	991171	14°20'
14,11	46839,1	180	1040229	1054285	16°43'
14,43	15891,79	160	1110714	1125270	18°56'
14,74	0	140	1187615	1202706	20°35'

Table 9. Range borders of concentration definition of radiating defects for gold in silver at $E_c = 100$ keV and $E_0 = 200$ keV

$h * 10^5, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,1	2185733,1	200	15644	18053	6'
0,2	2058358,7	180	33412	36880	14'
0,3	180627	160	52883	57218	29'
0,5	1488195,1	140	97458	103303	1°29'
0,7	723628	120	150932	158182	2°09'
0,9	-927446,4	100	215684	224336	3°26'

Table 10. Range borders of concentration definition of radiating defects for copper in gold at $E_c = 200$ keV and $E_0 = 1000$ keV

$h * 10^5, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,01	21580,5	1000	0	66	2''
0,6	22672,1	900	893	1507	10''
1,73	25345,3	800	2875	3908	1'
2,58	27323,0	700	4778	6085	1'
3,44	29141,5	600	7074	8647	2'
4,28	29802,4	500	9803	11642	3'
5,11	26816,5	400	13189	15312	5'
5,52	21741,9	350	15228	17505	7'
5,92	11135,3	300	17546	19988	7'
6,08	4234,8	280	18590	21102	9'
6,24	-5052	260	19715	22301	9'

Table 11. Range borders of concentration definition of radiating defects for gold in silver at $E_c = 50$ keV and $E_0 = 200$ keV

$h * 10^5, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,1	7007867,7	200	15644	18053	7'
0,2	7302275,4	180	33412	36880	29'
0,3	7511692,1	160	52883	57218	46'
0,5	8284898,7	140	97458	103303	1° 44'
0,7	8873991,1	120	150932	158182	3°
0,9	8996191,7	100	215684	224336	5°
1,1	7783588,7	80	295270	305387	5° 18'
1,2	6039618,3	70	342258	352550	7° 01'
1,3	2777112,7	60	395295	407000	10° 06'
1,4	-3336586,8	50	455708	468109	9° 52'

Table 12. Range borders of concentration definition of radiating defects for silver in silicon at $E_c = 50$ keV and $E_0 = 800$ keV

$h * 10^4, \text{cm}$	C_k, cm	E_0, keV	n_0	n_1	τ
0,01	107583,76	800	235	509	5''1
1,77	125089,72	700	75156	79064	20'38
3,51	147554,77	600	164969	170681	1° 04' 19''
5,24	177397,84	500	274346	281695	3° 37' 08''
6,92	217597,40	400	408428	417628	4° 15' 09''
7,75	242577,72	350	489277	498983	5° 18' 36''
8,57	273425,12	300	582509	592957	6° 19' 44''
8,9	286192,69	280	624780	635764	7° 39' 10''
9,22	299747,34	260	668937	680305	8° 21' 40''
9,54	313552,30	240	716695	728346	9° 10' 18''
9,87	329625,63	220	770351	782452	10° 12' 10''
10,19	342313,26	200	827439	840156	11° 31'
10,51	354543,58	180	890512	903800	12° 56' 10''

Results of calculations are presented in figures 5 and in tables 7-12.

Behavior of concentration of vacancies clusters the following:

At $E = 50$ keV in the profiles appears the maximum, which indicates of localization of cascade regions at the small depth. With an increase of atom number of a target for the same flying particles value of function in a point of a maximum slightly increases, values of depths decrease, that is in heavier target vacancies congestions is formed more and in near-surface area. With an increase of initial energy of a particle the area of damage are displaced in depth of a material. At identical and for heavier particles on unit of a way of movement of the ion, it is formed more areas. With energies of flying particle at $E_0 = 100$ keV the maximum of function at a surface of a target, and its value is not enough and quickly vanishes, very small damaged area which lays within the limits of 10-100 nanometers consequently is formed. At carrying out of calculations there are the difficulties consisting in finding of result area: initial and final value of number of interactions n_0, n_1 . For the heavy flying particles and the heavy targets the count time is great and reaches several days.

The finding of result area of concentration of vacancies clusters at an ionic irradiation has allowed revealing the following regularities:

1. Depending on depth of penetration initial and final values of number of interactions increase, the interval of area of result (n_0, n_1) also increases and displaced to the right.
2. With reduction of initial energy of a primary particle the interval of result area is displaced to the right, values of concentration of radiating defects increase, values of depths of penetration decrease.
3. With an increase of atom number of a target the interval of result area significantly is displaced to the right and increases.
4. At the big atom weight of the flying particle and small targets the count time very strongly increases and reaches several hours and even days.
5. The values of concentration sharply grow with the large atomic weight of the flying particle and target, and increases the count time, in other respects the behavior of the region of result analogous.
6. At various values of threshold energy of border of result area remain former.
7. With an increase of threshold energy the values of concentration decrease, values of depths of penetration decreases.

Conclusion

Thus, the process of interaction of heavy ions with solid in the work is considered. Easy and heavy elements have been taken as the target. On the offered algorithms are carried out the calculations of cascade-probabilistic functions, spectrums of primarily knocked-on atoms, concentration of radiating defects. The results of calculations are presented in the form of graphs and tables. New regularities of CPF behavior, PKA spectrums, and concentration of vacancies cluster are received.

Received data attest, that concentration of cascade areas is very sensitive function to variations of initial energy of the flying particle, threshold energy on formation of the cascade, to atom weight of the target, to approximation parameters.

Experts on the radiating physics of the solid, positron physics, astrophysics, applied mathematics, can use the received models, algorithms and results of calculations.

References

1. Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A., etc. Modeling on the PC and experimental researches of radiating processes in iron and firm alloys. - Almaty KazNAU, PTC, Open Company «KAMA», p. 263 (2010)

2. Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A., etc. Radiating effects in titanic alloys and composites. Monograph. Almaty: Almaty KazNAU, Open Company «KAMA», Al-FarabiKazNU SRI of FTP. p.228 (2010)
3. Boos E.G., Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Shmygalev E.V., Shmygaleva T.A. Cascade-probabilistic method, the solution of radiation-physics tasks, equations of Boltzmann. Connection with the Markov chains. Monograph. Almaty.: Abay KazNPU, al-FarabiKazNU NII (Scientific Research Institute) NKHT and M. p. 388 (2015)
4. Kupchishin A.I., Komarov F.F, Shmygaleva T.A., Togambayeva A.K. Modeling of cascade areas in constructional materials // Materials science & technology conference and exhibition. (MS&T '08). David L.Lawrence Convention Center. Pittsburgh, Pennsylvania. October, 5-9, pp. 2183-2190 (2008)
5. Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A., Komarov F.F, Togambayeva A.K. The Computation Modeling of the Cascade Areas in Solids // 2008 IEEE Nuclear Science Symposium & Medical Imaging Conference & 16th Room Temperature Semiconductor Detector Workshop. International Congress Center. Dresden, Germany 19-25 October. p.223
6. Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A., Togambayeva A.K Mathematical modeling of cascade areas in constructional materials // Proceedings of The International Conference on Modelling and Simulation MS'08 Jordan. PETRA (Jordan), 18-20 November, 2008. p.115-119.
7. Kolmogorov A.N. The basic concepts of the probability theory, M.: Science, p.119 (1974)
8. Komarov F.F., Kumakhov M.A. and other. Tables of the parameters of the spatial distribution of the ion-implanted admixtures. Minsk: publishing house V.I. Lenin BGU, p.352 (1980)
9. Komarov F. F. Ionic implantation into the metals. - M, metallurgy, p. 216(1990)
10. Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Komarov F.F., Shmygaleva T.A., Togambaeva a. K. Computer simulation of radiation-physics processes in the materials, irradiated by light ions and their connection with the Markov processes // the transactions IV of international scientific conference “thermal radiation effects and processes in the inorganic materials. - Tomsk: Publ. TPU, pp. 405-408 (2004)
11. Kupchishin A.I., Kupchishin A.A., Shmygaleva T.A., Togambaeva a. K. Generation of radiation defects in the materials of those irradiated by light ions // nuclear and radiation physics: the materials of 4-th international conference, on September 15 to 17, 2003 ; the volume of the II. - Almaty: INP NNC of RK, pp. 134-139 (2004)
12. Boos E. G., Kupchishin A.I. Solution of physical problems by cascade- probabilistic method. - Alma Ata: Science,T.1., p.112 (1987)
13. Kupchishin A.A., Kupchishin A.I., Shmygaleva T.A. Application of cascade-probability technigue to processes of ion passage through matter. // Proc. Int. Conf. Application of accelerator in Research and Industry. Denton. Texas. USA,p.112 (1996)

Complex Software for Numerical Simulation of Convective Flow of Viscous Incompressible Fluid in a Curvilinear Coordinate System

N.M. Temirbekov¹, Y.A. Malgazhadov², S.O. Tokanova¹

¹D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

²S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
telec_saya@mail.ru

Abstract. In this paper, the development of a complex software for numerical simulation of convective flow of viscous incompressible fluid in a doubly connected areas in a curvilinear coordinate system is considered. For the discretization of the physical domain, the technology of construction of curvilinear structure difference grids using the transfinite interpolation method, the equidistribution method, and the method of Thompson are presented. In order to test the software, the calculations for various configurations of the cavity and temperature conditions at the border are conducted.

Keywords: incompressible fluid, curvilinear coordinate system, convective flow, numerical simulation.

1 Introduction

In recent years, it is often required to solve problems in complex areas with complex geometry. For modeling in complex areas, in the first place it is required to discretize the physical domain, that is, to conduct the step of modeling the physical geometry using a set of cells grids. It should be noted that the use of nonuniform grids can cause the appearance of non-physical sources of mass and momentum of impulse, as well as may be accompanied by the loss of important properties inherent approximated differential equations. Equation models recorded in curvilinear coordinates are more complicated than the original equations, in particular, they contain variable coefficients, additional terms, non-zero right-hand sides, etc. Therefore, the question of approximating equations on curvilinear grids is urgent and requires close attention. In addition, the diverse requirements imposed on the difference grid make curvilinear grid a complex mathematical problem. In this regard, the development of theoretical concepts and methodological approaches to the use of new information technologies in the hydrodynamic studies that takes into account the specific features of the subject area, development, adaptation of tools and testing them in the process of modeling the natural and man-made objects that are important for the national economy, are very relevant. In this paper, the development of a complex of software for numerical simulation of convective flow of viscous incompressible fluid in a doubly connected areas in a curvilinear coordinate system is considered. Discretization of the physical domain is represented by the technology of creating curvilinear difference structure grids using the methods of transfinite interpolation, equidistribution, and the method of Godunov-Thompson [1-3]. For modeling the convective flow, an incompressible fluid equation is used in the vorticity ω , stream function ψ and temperature θ under appropriate initial and boundary conditions [3] in curvilinear coordinate systems.

2 Statement of the problem and the computational algorithm

General transformations of the viscous incompressible fluid equation

In the construction of finite-difference schemes, it is convenient to write the equations of

fluid dynamics in a compact vector form. For example, the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid in a Cartesian coordinate system can be written as follows:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \vec{f} \quad (1)$$

Here, the vectors $U, E, F, E_v, F_v, \vec{f}$ are defined as follows:

$$U[0, u, v, \theta], \quad E[u, u^2 + \pi, uv, u\theta], \quad F[v, uv, v^2 + \pi, v\theta], \quad (2)$$

$$E_v = \mu_x \left[0, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad F_v = \mu_y \left[0, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]. \quad (3)$$

Boundary conditions:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \theta = \theta^0; \quad t = 0,$$

$$u(0, y, t) = u(X, y, t), \quad v(0, y, t) = v(X, y, t), \quad \theta(0, y, t) = \theta(X, y, t); \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq Y,$$

$$u(X, y, t) = u(0, y, t), \quad v(X, y, t) = v(0, y, t), \quad \theta(X, y, t) = \theta(0, y, t); \quad x = X, \quad 0 \leq y \leq Y,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad -\frac{x_\eta}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{x_\xi}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (\theta = \varphi_1); \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq X,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \theta = \varphi_2 \left(-\frac{x_\eta}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{x_\xi}{J} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \right); \quad y = Y, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Let us consider the coordinate transformation of the general form, which represents the (x, y) physical plane into the (ξ, η) computing plane and providing opportunity to solve problems in a uniform grid

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (4)$$

Applying the chain rule, we obtain the following expressions:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad (5)$$

To find the metric coefficients $\xi_x, \eta_x, \xi_y, \eta_y$, we write expressions for the differentials

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, \quad d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy. \quad (6)$$

By comparing the corresponding elements of two matrices with the above equations, we obtain the following metric coefficients

$$\xi_x = \frac{1}{J} \eta_y, \quad \eta_x = -\frac{1}{J} \eta_\xi, \quad \xi_y = -\frac{1}{J} \eta_\eta, \quad \eta_y = -\frac{1}{J} \xi_\xi. \quad (7)$$

where J - Jacobian of the transformation.

We apply the coordinate transformation to the general form of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid written in vector form to obtain the following equation converted:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \vec{f}$$

Applying the chain rule, we obtain the following expressions:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi_x \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial E_v}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial F_v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \vec{f}. \quad (8)$$

We multiply the transformed equation in the Jacobian, group the similar terms and from the equation (8) we get:

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + J \xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + J \eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} + J \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} + J \eta_y \frac{\partial F}{\partial \eta} = J \xi_x \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + J \eta_x \frac{\partial E_v}{\partial \eta} + J \xi_y \frac{\partial F_v}{\partial \xi} + J \eta_y \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + J \vec{f},$$

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + J \left[\xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} \right] + J \left[\eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \eta} \right] = J \left[\xi_x \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial F_v}{\partial \xi} \right] + J \left[\eta_x \frac{\partial E_v}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial F_v}{\partial \eta} \right] + J \vec{f},$$

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x E + J \xi_y F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x E + J \eta_y F) - \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x E_v + J \xi_y F_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x E_v + J \eta_y F_v) - J \vec{f} - E \left[\frac{\partial J \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial J \eta_x}{\partial \eta} \right] - F \left[\frac{\partial J \xi_y}{\partial \xi} + \frac{\partial J \eta_y}{\partial \eta} \right] + E_v \left[\frac{\partial J \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial J \eta_x}{\partial \eta} \right] + F_v \left[\frac{\partial J \xi_y}{\partial \xi} + \frac{\partial J \eta_y}{\partial \eta} \right] = 0.$$

Considering the ratio of metric coefficients, last terms in the square brackets are zero because

$$E \left[\frac{\partial y_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial y_\xi}{\partial \eta} \right] = E((y_\eta)_\xi - (y_\xi)_\eta) = 0$$

$$F \left[-\frac{\partial \xi_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial x_\xi}{\partial \eta} \right] = F((x_\xi)_\eta - (x_\eta)_\xi) = 0.$$

Common transformed equation will have the following canonical form:

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x E + J \xi_y F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x E + J \eta_y F) - \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x E_v + J \xi_y F_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x E_v + J \eta_y F_v) - J \vec{f}.$$

Using the metric coefficients, we obtain

$$E_v = \mu_x \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_x}{J} \left[y_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta} \right], F_v = \mu_y \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_x}{J} \left[-x_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] \quad (9)$$

Substituting the metric coefficients in the general canonical form, we have

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E - x_\eta F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi E + x_\xi F) = \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E_v - x_\eta F_v) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi E_v + x_\xi F_v) + J \vec{f}.$$

Substitute the values of E_v and F_v from (9) in the general canonical form:

$$\begin{aligned} J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E - x_\eta F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi E + x_\xi F) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{y_\eta^2}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y_\eta y_\xi}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{x_\eta^2}{J} \mu_y \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{x_\eta x_\xi}{J} \mu_y \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\eta y_\xi}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y_\xi^2}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_\eta x_\xi}{J} \mu_y \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{x_\xi^2}{J} \mu_y \frac{\partial U}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

further group the similar terms

$$\begin{aligned} J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E - x_\eta F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi E + x_\xi F) &= \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{y_\eta^2 \mu_x + x_\eta^2 \mu_y}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{y_\eta y_\xi \mu_x + x_\eta x_\xi \mu_y}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{y_\eta y_\xi \mu_x + x_\eta x_\xi \mu_y}{J} \mu_x \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{x_\xi^2 \mu_y + y_\xi^2 \mu_x}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \vec{f}. \end{aligned}$$

As a result, we obtain the Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates of the form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta E - x_\eta F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi E + x_\xi F) &= \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(J \mu_x y_\eta^2 + J \mu_y x_\eta^2) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(J \mu_x y_\xi^2 + J \mu_y x_\xi^2) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(J \mu_x y_\xi y_\eta + J \mu_y x_\xi x_\eta) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(J \mu_x y_\xi y_\eta + J \mu_y x_\xi x_\eta) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (10)$$

The obtained Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid in general curvilinear coordinates are convenient for the numerical solution of the Navier-Stokes equations in domains with complex geometry using the method of curvilinear grids.

The final form of the equations of fluid dynamics in divergent form is as follows:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta u - x_\eta v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u + x_\xi v) = 0. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta u^2 - x_\eta uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u^2 + x_\xi uv) + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta \pi) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi \pi) &= \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta uv - x_\eta v^2) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi uv + x_\xi v^2) - \frac{\partial}{\partial \xi} (x_\eta \pi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\xi \pi) &= \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta u \theta - x_\eta v \theta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u \theta + x_\xi v \theta) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \quad (14)$$

where $a_{11} = J(y_\eta^2 \mu_x + x_\eta^2 \mu_y)$, $a_{22} = J(y_\xi^2 \mu_x + x_\xi^2 \mu_y)$, $a_{12} = J(y_\xi y_\eta \mu_x + x_\xi x_\eta \mu_y)$.

Expanding the brackets in the equation of continuity (11) and in the convection terms of the equations (12) - (14) and applying the chain rule, the equations (11) - (14) can be written as follows:

$$y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + x_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial t} + (y_\eta u - x_\eta v) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (-y_\xi u + x_\xi v) \frac{\partial u}{\partial \eta} + y_\eta \frac{\partial \pi}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \pi}{\partial \eta} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial t} + (y_\eta u - x_\eta v) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (-y_\xi u + x_\xi v) \frac{\partial v}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial \pi}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \pi}{\partial \eta} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial \theta}{\partial t} + (y_\eta u - x_\eta v) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + (-y_\xi u + x_\xi v) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{11} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{22} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (18)$$

Such an approach of the transformation of equations will help to avoid computing second derivatives of the metric coefficients and the emergence of non-linear terms. And besides strictly divergent form of the equations is useful in the development of difference schemes.

For the numerical modeling of convective flows in curvilinear doubly connected domain, we consider the formulation of the problem in curvilinear coordinate systems of the form

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta u - x_\eta v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u + x_\xi v) = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} (y_\eta (u^2 + \pi) - x_\eta uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u^2 + x_\xi uv) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(J\mu_x y_\eta^2 + J\mu_y x_\eta^2) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(J\mu_x y_\xi^2 + J\mu_y x_\xi^2) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] - \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J\mu_x y_\xi y_\eta + J\mu_y x_\xi x_\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J\mu_x y_\xi y_\eta + J\mu_y x_\xi x_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] + \frac{\vec{f}}{J}. \end{aligned} \quad (20)$$

In numerical constructing of curvilinear grids in doubly connected domains using the equidistribution method and the method of Godunov-Thompson, as well as the numerical implementation of incompressible fluid equations, an implicit scheme and the method of fractional steps are used. In the direction of the external and internal borders, the cyclic sweep is used, and in the direction of the normal the scalar sweep is used.

One of the most common traditional methods of constructing curvilinear grids from the considered class of methods is the method of equidistribution, that is the class in which the grid are obtained by mapping the computational domain to the physical domain. The idea of the equidistribution method is to find a non-degenerate mapping carrying the fixed (uniform rectangular) grid on the computational domain to the adaptive mesh refinement on the physical domain which satisfies the principle of equidistribution:

$$wJ = const$$

where J is Jacobian of this transformation, w is the function of the grid density.

The value of the Jacobian is proportional to the measure of the grid cell. The term of measure refers to the length of the cell in a one dimensional domain, area in two-dimensional domain, and volume in the three-dimensional case. Therefore, the meaning of the ratio is that the larger the value of the density function at the grid cell, the smaller measure of this cell. When using the equidistribution method, it is required to find a direct mapping from the computational domain to the physical domain by solving a complex non-linear equation with variable coefficients in the computational domain of a simple shape, square. Now we have to look for the reverse transformation by solving simple equations in the physical domain whose boundaries are generally curvilinear. Curvilinear boundary complicates the numerical solution of the problem. Therefore, the direct conversion is preferably provided that the inverse transform is the solution of equations. This approach was proposed in the works of S.K. Godunov and J.F. Thompson and colleagues [3], so the method of constructing curvilinear grids called the Godunov-Thompson method (GT-method).

For the discretization of the physical domain, the technology of construction of difference curvilinear structure grids using the method of transfinite interpolation is presented. Transfinite interpolation is implemented in two stages. In the first stage, values of grid nodes from the left and right borders are interpolated. In the second stage, grid nodes from lower and upper boundaries of the domain are interpolated.

There are several algorithms for constructing curvilinear grids and results of the application of these algorithms for the domains of simple form. Unfortunately, the quality of the obtained mesh can be judged only visually. When using curvilinear grids in the calculation of mathematical physics problems, there are some objective characteristics of grids:

- Orthogonality,
- Locally uniformly,
- Undrawn cells, etc.

With these features, one can evaluate the quality of the grid and its suitability for the calculations. Quantitative information on the grid given by quality criteria may be useful for preliminary assessment of grids allowing certainly reject unsuitable grids even before solving the main problem. Thus, there is a need for automatic determination of the characteristics of the grid. Some approaches for the analysis of the quality of grids are given in [1].

In order to select the most appropriate grids for the main problem, the quality of difference grids are considered on the following evaluation criteria:

- Convexity of the cells;
- Orthogonality of coordinate grid lines;
- Elongation of the cells;
- Adaptation of the grid to a predetermined control function, proposed in [1,4].

3 Simulation results

The calculations for various configurations of the cavity and temperature conditions at the border are conducted. To obtain the graphs of numerical calculations, we use the graphical editor Tecplot.

In this paper, the numerical algorithm is used for the doubly connected domain with curvilinear boundaries.

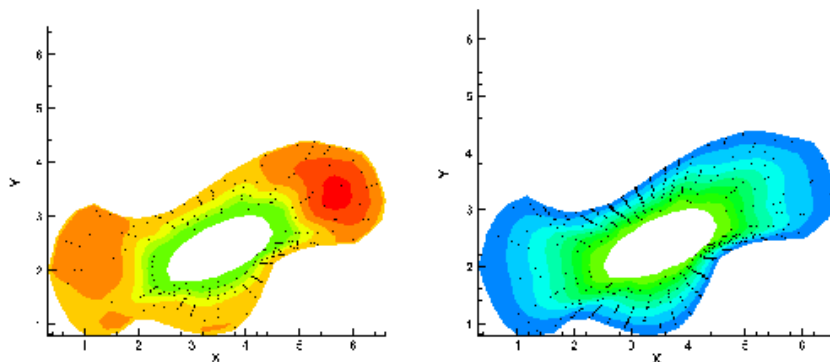


Fig. 1. The changing of the vector ψ

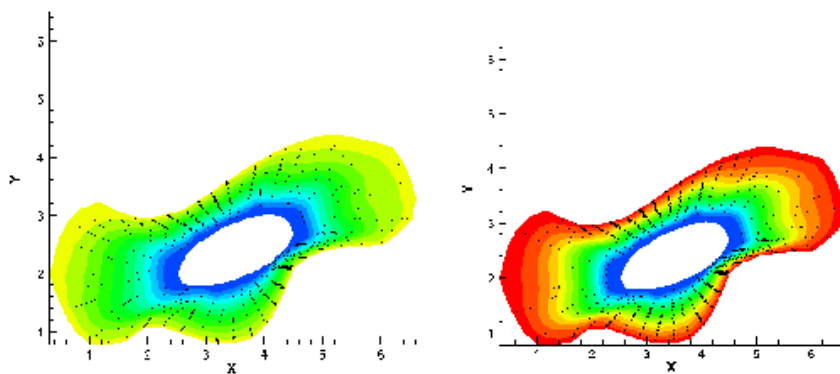


Fig. 2. The changing of the vector ψ at the iteration of 5x5000

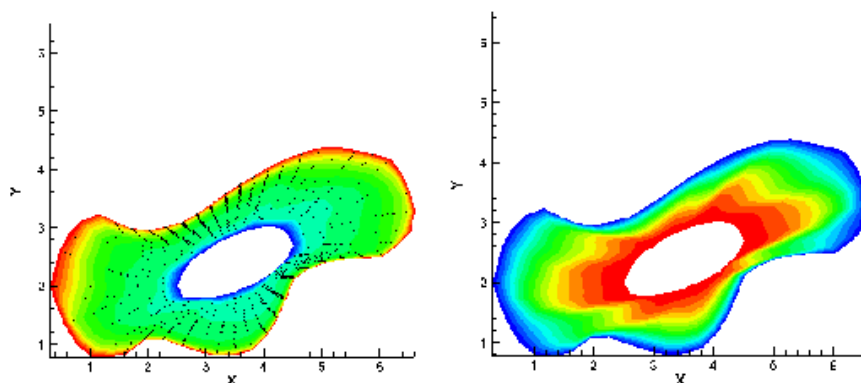


Fig. 3. Changes in temperature at the iteration of 50x20000

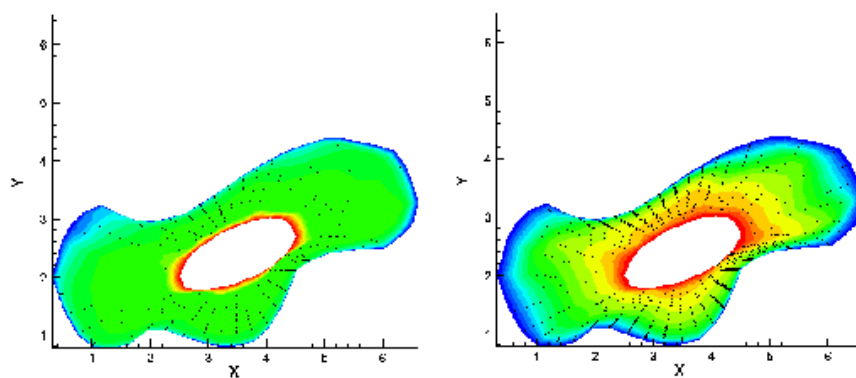


Fig. 4. Changes in temperature at the iteration of 5x5000

4 Conclusion

Modern requirements to the reliability of the numerical results and the reliability of methodical software requires careful testing and verification of the developed software. Testing of the developed methods, algorithms and software complex for the problems is performed on the development of a viscous incompressible fluid flow [5]. On the basis of the proposed methods, methods for constructing curvilinear grids of this class for the doubly-connected domains are developed. A complex of software for the automated construction of curvilinear grids is developed, as well as the quality criteria of the grid is considered. Experimental studies of the proposed methods are conducted. As a result of testing, it is revealed that the quality of the resulting grid meets the generally accepted criteria.

References

1. Shokin Yu.I., Danayev N.T, Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Lectures on difference schemes on movable grids. Алматы, 2008. Part 2. 184 p.
2. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation, foundations and applications. 1985, New York, etc.: Elsevier.
3. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics / Moscow: Nauka, 1976
4. Sirochenko V.P. Numerical simulation of convective flows of viscous fluid in multiply connected domains / Proceedings of International conference RDAMM 2001. Special Edition, Vol .6, Part 2, pp. 554-562.
5. Prokopov G.P. On the comparison of algorithms and programs of constructing regular two-dimensional difference grids. M. 1989. (Preprint № 18. AS USSR. Keldysh IPM, 27 p.)

The Existence of a Generalized Solution Model of Inhomogeneous Fluid in a Magnetic Field

Layilya Tukenova, Aigul Skakova

T. Ryskulov New Economic University, Almaty, Kazakhstan
Tuken_lei06@mail.ru, jum_aigul77@mail.ru

Abstract. We consider the generalized solutions of the non-homogeneous fluid in a magnetic field. Proved a theorem for a generalized solution of an inhomogeneous liquid in a magnetic field .In this article we examine the method of fictitious areas for the non-linear hyperbolic equations. The estimation of rate of convercence decisions is received. In some cases the unimproved estimation of convergence rate of the decision is received.

Keywords: permeability, fluid flow rate, conductivity, boundary value, unimproved estimation.

1 Introduction

The mathematical study of the correctness of boundary problems for incompressible viscous fluid began with work Lere Zh. Various aspects of the theory of the Navier-Stokes equations are detailed in the monograph of Ladyzhenskaya A.O. Studying the correctness of the model is dedicated to the work of an inhomogeneous fluid Ladyzhenskaya O.A. and Solonnikova V.A. Then, this method was developed by Lions J.L., Temam R. and Smagulov S.S. Correctness of magnetic gas dynamics for the one-dimensional case well studied in the work of Orunhanov M.K. and Smagulov S.S.

2 Problem formulation

We consider the flow of a viscous incompressible fluid in an inhomogeneous magnetic field, motion is described by the following non-linear system of equations [1]:

$$\rho(v_t + (v\nabla)v - \mu(H\nabla)) = v\nabla v - \nabla \left(p + \mu \frac{|H|^2}{2} \right) + \rho f, \quad (1)$$

$$\rho_t + (v\nabla)\rho = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (3)$$

$$-\mu H_t = \operatorname{rot} E, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} H = \sigma(E + \mu[v, H]) + j_0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} H = 0. \quad (6)$$

where

$v(x, t)$ – speed of fluid flow;

$H(x, t)$, $E(x, t)$ – magnetic vectors and Voltage;
 $p(x, t)$ – pressure;
 $f(x, t)$ – external hydrodynamic forces;
 $j_0(x, t)$ – given current;
 μ – magnetic permeability;
 σ – conductivity;
 $\rho(x, t)$ – density of the liquid;
 ν – fluid viscosity.

Note that from (4) and (5) follows the equation

$$-\mu H_t - \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} H + \mu \operatorname{rot}[v, H] + \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} j_0 = 0. \quad (7)$$

Subsequently, suppose

$$(j_0 \tau)|_s = 0. \quad (8)$$

Let the liquid is in the limited area $\Omega \cap R^3$ with border S and on the border of the condition sticking

$$v|_s = 0. \quad (9)$$

At the border, is an ideal conductor, must be carried out:

$$Hn \equiv H_n = 0, \quad E_\tau = E - nE = 0. \quad (10)$$

Here,

$$(\operatorname{rot} H)_\tau|_s = 0, \quad \text{when } (j_0 \tau)|_s = 0.$$

Assume that the initial conditions:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad H|_{t=0} = H_0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x). \quad (11)$$

Let us define some notations are used:

$\overset{0}{J}(\Omega)$, $\overset{1}{J}(\Omega)$ – circuiting infinite differentiable finite solenoidal vector functions in the norms of $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ respectively;

$\overset{0}{H}(\Omega)$ – subspace $L_2(\Omega)$, which is the closure of continuously differentiable solenoidal vector functions normally $L_2(\Omega)$, and such that

$$Hn|_s = H_n|_s = 0, \quad (12)$$

$\overset{0}{H}_{1n}(\Omega)$ – subspace $W_2^1(\Omega)$, which is the closure of continuously differentiable solenoidal vector functions normally $W_2^1(\Omega)$, such that

$$Hn|_s \equiv H_n|_s = 0.$$

$\overset{0}{H}_{1\tau}(\Omega)$ – subspace $W_2^1(\Omega)$, which is the closure of continuously differentiable solenoidal vector functions normally $W_2^1(\Omega)$, such that

$$H_\tau|_s = H - Hn|_s = 0. \quad (13)$$

We give the following

Definition 1. A generalized solution of problem (1) – (3), (6) – (11) is the set of functions $\{v(x, t), \rho(x, t), H(x, t)\}$:

$$v(x, t) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{J}(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{J}^1(\Omega))$$

$$\rho(x, t) \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)), \quad 0 < m \leq \rho(x, t) \leq M < \infty,$$

$$H(x, t) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{H}(\Omega)) \cap L_2(0, T; \overset{0}{H}_{1n}(\Omega)),$$

that satisfies the integral identity

$$\int_0^\tau [(-\rho v, \varphi_t + (v \nabla) \varphi)_\Omega - \mu((H \nabla) H, \varphi)_\Omega + v(\nabla v, \nabla \varphi)_\Omega - (\rho f, \varphi)_\Omega] dt - \int_\Omega \rho_0(x) v_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \tag{14}$$

$$- \int_0^T (\rho, \eta_t + (v \nabla) \eta)_\Omega dt - \int_\Omega \rho_0(x) \eta(x, 0) dx = 0, \tag{15}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\mu H \psi_t + \frac{1}{\sigma} \text{rot} H \cdot \text{rot} \psi - \mu [v, H] \text{rot} \psi - j_0 \text{rot} \psi \right) dx dt - \mu \int_\Omega H_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \tag{16}$$

for any $\eta, \varphi, \psi \in W_2^1(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$, satisfying the conditions $\varphi(x, T) = 0$, $\psi(x, T) = 0$, $\eta(x, T) = 0$, $\varphi \in \overset{0}{J}^1(\Omega)$, $\psi \in \overset{0}{H}_{1n}(\Omega)$, $\eta \in W_2^1(Q)$ for all $t \in [0, T]$.

Theorem 1. *Let*

$$f(x, t) \in L_2(0, T; L_{6/5}(\Omega)), \quad j_0(x, t) \in L_2(0, T, L_2(\Omega)), \quad \Omega \subset R^3,$$

$$0 \leq m \leq \rho_0(x) \leq M < \infty, \quad \|\rho_0(x)\|_{L_\infty(Q_T)} < \infty,$$

$v_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$, $H_0(x) \in \overset{0}{H}(\Omega)$, $(j_0, \tau)|_s = 0$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)_\rho$, $\text{div} j'_0$, τ_1, τ_2 – tangent vectors at the border.

Then there exists at least one generalized solution of (1) – (3), (6) – (11).

For proof, first we obtain some a priori estimates.

From equation (2) follows:

$$0 < m \leq \rho(x, t) \leq M < \infty. \tag{17}$$

In (14) and (16)

$$\varphi(x, t) = v(x, t), \psi(x, t) = H(x, t),$$

And using (2), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho |v|^2) dx dt + v \|\nabla v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}^2 = \\ & = \mu \int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) H v dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho f v dx dt + C, \\ & \frac{\mu}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (|H|^2) dx dt + \frac{1}{\sigma} \|H\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))}^2 = \\ & = \mu \int_0^T \int_{\Omega} [v, H] \operatorname{rot} H dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} j_0 \operatorname{rot} H dx dt + C, \end{aligned}$$

$C = \text{const.}$

Next, we estimate some terms, applying the Holder and Jung inequality:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho f v dx dt & \leq CM \|f\|_{L_2(0,T;L_{6/5})} \|v\|_{L_2(0,T;J^0(\Omega))} \leq \frac{v^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|v\|_{L_2(0,T;J^0(\Omega))} + C, \\ \int_0^T \int_{\Omega} j_0 \operatorname{rot} H dx dt & \leq \|j_0\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \|H\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \frac{1}{2\sigma} \|H\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + C. \end{aligned}$$

Then the sum of the original integral equation and obtain

$$\begin{aligned} & \|v(t)\|_{L_{\infty}(0,T;J^0(\Omega))} + \|v(t)\|_{L_{\infty}(0,T;J^1(\Omega))} + \\ & + \|H(t)\|_{L_{\infty}(0,T;H^0(\Omega))} + \|H(t)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C < \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

We have the following

Lemma 1. For a generalized solution of the problem (1) – (3), (6) – (11) a fair assessment:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\|v(t+\tau) - v(t)\|^2 + \|H(t+\delta) - H(t)\|^2) dt \leq C\delta^{1/2}, \\ & 0 < \delta < T - \delta. \end{aligned} \tag{19}$$

Proof. Fix the value of δ and τ , $0 < t \leq T - \delta$, and we consider the equation (8) in the interval $\tau \in (t, t + \delta)$.

Multiply (8) on $\psi \in H^1(\Omega)$ scalar:

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} (H, \psi)_{\Omega} - \frac{1}{\sigma} (\operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \psi)_{\Omega} + \mu ([v, H], \operatorname{rot} \psi)_{\Omega} + \frac{1}{\sigma} (j_0, \operatorname{rot} \psi)_{\Omega} = 0.$$

Further, integrating over τ in $(t + \delta)$

$$\begin{aligned}
 & -\mu(H(t + \delta) - H(t), \psi)_{\Omega} - \frac{1}{\sigma} \int_t^{t+\delta} (rotH, rot\psi)_{\Omega} d\tau + \\
 & + \mu \int_t^{t+\tau} ([v, H], rot\psi)_{\Omega} d\tau + \frac{1}{\sigma} \int_t^{t+\tau} (j_0, rot\psi)_{\Omega} d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Now take $\psi = H(t + \delta) - H(t)$ and find out that

$$\begin{aligned}
 & -\mu \|H(t + \delta) - H(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\sigma} \int_t^{t+\delta} (rotH(\tau), rotH(t + \delta) - rotH(t))_{\Omega} d\tau + \\
 & + \mu \int_t^{t+\tau} ([v(\tau), H(\tau)], rotH(t + \tau) - H(t))_{\Omega} d\tau + \\
 & + \frac{1}{\sigma} \int_t^{t+\tau} (j_0, rotH(t + \delta) - H(t)_{\Omega}) d\tau = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Now, (27) integrable $t \in (0, T - \delta)$, and estimate some terms:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega} \int_t^{t+\delta} rotH(\tau)(rotH(t + \delta) - rotH(t)) d\tau dx dt = \\
 & = \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega} \int_t^{t+\delta} rotH(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t+\delta} rotH(\tau) d\tau d\tau dx dt = \\
 & = \int_0^{T-\delta} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\int_t^{t+\delta} rotH(\tau) d\tau \right)^2 dx dt = \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^{\delta} rotH(\tau) d\tau \right)^2 dx - \int_{\Omega} \left(\int_{T-\delta}^T rotH(\tau) d\tau \right)^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

Here, using the Holder inequality, we have

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\int_0^{\delta} rotH(\tau) d\tau \right)^2 dx \leq \delta \int_{\Omega} \int_0^{\delta} |rotH(\tau)|^2 d\tau dx \leq \\
 & \leq \delta \int_0^T \int_{\Omega} |rotH(\tau)|^2 dx d\tau \leq C\delta, \\
 & \int_{\Omega} \left(\int_{T-\delta}^T rotH(\tau) d\tau \right)^2 dx \leq \delta \int_{\Omega} \int_{T-\delta}^T |rotH(\tau)|^2 d\tau dx \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \delta \int_{\Omega} \int_0^T |\operatorname{rot} H(\tau)|^2 d\tau dx \leq C\delta.$$

To have the following integral

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} j_0 \operatorname{rot}(H(t+\delta) - H(t)) dx d\tau dt \right| = \\ & = \left| \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} j_0 \operatorname{rot} \frac{d}{dt} \left(\int_t^{t+\delta} H(\tau) d\tau \right) dx d\tau dt \right| = \\ & = \left| \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\int_t^{t+\delta} \operatorname{rot} H(\tau) d\tau \right) \int_t^{t+\delta} j_0(\tau) d\tau dx dt \right| \leq \\ & \leq C \|j_0(x, t)\|_{L_2(0, T; L_2)} \left(\int_{\Omega} \left(\int_{T-\delta}^T \operatorname{rot} H dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq C\sqrt{\delta} \left(\int_{\Omega} \int_{T-\delta}^T |\operatorname{rot} H dt|^2 dt dx \right)^{1/2} \leq C\sqrt{\delta} \|H\|_{L_2(0, T; H^1_0(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Now turn to the equation (1). Multiply it by $\Phi \in J^1_0(\Omega)$ scalar $L_2(\Omega)$ and obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho(\tau)v(\tau), \Phi)_{\Omega} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} v(\tau), \Phi \right)_{\Omega} - ((v\nabla)\rho v, \Phi)_{\Omega} - ((\rho(\tau)v(\tau)\nabla)\Phi, v(\tau))_{\Omega} + \\ & + \mu((H(\tau)\nabla\Phi, H(\tau))_{\Omega} + v(v_x(\tau), \Phi_x)_{\Omega}) = (\rho(\tau)f(\tau), \Phi)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Using (2) we have

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v, \Phi)_{\Omega} - ((\rho v\nabla)\Phi, v)_{\Omega} + \mu(H\nabla\Phi, H)_{\Omega} + v(H_x, \Phi_x)_{\Omega} = (\rho f, \Phi)_{\Omega}. \tag{21}$$

Next, we use the expression

$$\rho(t+\delta)v(t+\delta) - \rho(t)v(t) = \rho(t+\delta)(v(t+\delta) - v(t)) + (\rho(t+\delta) - \rho(t))vt. \tag{22}$$

From (2), integrating $\tau \in [t, t+\delta]$, we find

$$\rho(t+\delta) - \rho(t) = - \int_t^{t+\delta} (v * \nabla)\rho d\tau. \tag{23}$$

Now we integrate (28) over $\tau \in [t, t+\delta]$ and let $\Phi = v(t+\delta) - v(t)$, we have

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho(t+\delta)}[v(t+\delta) - v(t)]\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
& + ((\rho(t+\delta) - \rho(t)) - v(t), v(t+\delta) - v(t))_{\Omega} + \\
& + \mu \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} ((\rho(\tau)v(\tau)\nabla)[v(t+\delta) - v(t)]v(\tau)) dx d\tau + \\
& + \mu \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} ((H(\tau)\nabla)[v(t+\delta) - v(t)]H(\tau)) dx d\tau + \\
& + v \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (v_x(\tau)[v_x(t+\delta) + v_x(t)]) dx d\tau = \\
& = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} ((\rho(\tau)f(\tau))[v(t+\delta) - v(t)]) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{24}$$

Next we will consider some integral terms (24). Firstly, using (23) we have

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho(t+\delta) - \rho(t))v(t)(v(t+\delta) - v(t)) dx = \\
& = \int_{\Omega} \int_t^{t+\delta} (v(\tau)\nabla)\rho(\tau)v(t)(v(t+\delta) - v(t)) d\tau dx.
\end{aligned}$$

Integrate it with respect to t from 0 to $T - \delta$ and estimate

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (v(\tau)\nabla)v(t)(v(t+\delta) - v(t))\rho(\tau) dx d\tau dt \leq \\
& \leq M \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|v(t)||v_x(t)|(|v(t+\delta)| - |v(t)|)) dx d\tau dt \leq \\
& \leq M \int_0^{T-\delta} \|v_x(t)\|_{L_2} \|v(t+\delta)\|_{L_4} \int_t^{t+\delta} \|v(\tau)\|_{L_4} d\tau dt \leq \\
& CM \int_0^{T-\delta} (\|v_x(t)\|_{L_2} \|v_x(t+\delta)\|_{L_4} \|v(\tau)\|_{L_2(0,T;L_4)}) \sqrt{(v)} dt \leq \\
& \leq C\sqrt{\delta} \|v_x(t)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

Similarly, evaluated and integral

$$\mu \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (\rho(\tau)v(\tau)\nabla)(v(t+\delta) - v(t))v(\tau) dx d\tau dt \leq C\sqrt{\delta}.$$

Next, consider the following integral in (24), pre-integrated with respect to t from 0 to $-\delta$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} v_x(\tau)[v_x(t+\delta) - v_x(t)] dx d\tau dt = \\
 &= \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega} \int_t^{t+\delta} v_x(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t+\delta} v_x(\tau) d\tau dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{T-\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^{t+\delta} v_x(\tau) d\tau \right) dt dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_{T-\delta}^T v_x dt - \int_0^{\delta} v_x dt \right) dx \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\int_{T-\delta}^T |v_x|^2 dt \right)^{1/2} - \left(\int_0^{\delta} |v_x|^2 dt \right)^{1/2} \right] \sqrt{\delta} dx \leq \\
 &\leq C\sqrt{\delta} \|v_x\|_{L_2(0,T;J_2(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}.
 \end{aligned}$$

Now we estimate the integral

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T-\delta} \int_t^{\delta} \int_{\Omega} p(\tau) f(\tau)[v(t+\delta) - v(t)] dx d\tau dt \leq M \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \|f\|_{L_{6/5}(\Omega)} \times \\
 & \times [\|v(t+\delta)\|_{L_6} + \|v(t)\|_{L_6}] d\tau dt \leq CM \int_0^{T-\delta} \|v(t)\|_{L_6} \int_t^{t+\delta} \|f\|_{L_{6/5}(\Omega)} d\tau dt \leq \\
 & \leq CM \int_0^{T-\delta} \|v\|_{L_6} \sqrt{\delta} \left(\int_t^{t+\delta} \|f\|_{L_{6/5}(\Omega)} d\tau \right) dt \leq \\
 & \leq C\sqrt{\delta} \|f\|_{L_2(0,T;L_{6/5}(\Omega))} \|v\|_{L_2(0,T;J^1_1(\Omega))} \leq C\sqrt{\delta}.
 \end{aligned}$$

Now, with all the resulting integral inequalities developed (24) and (27). As a result, we obtain

$$\int_0^{T-\delta} \|\sqrt{p(t+\delta)}(v(t+\delta) - v(t))\|^2 + \mu \|H(t+\delta) - H(t)\|^2 dt \leq C\sqrt{\delta},$$

that is

$$\int_0^T (\|v(t+\delta) - v(t)\|^2 + \|H(t+\delta) - H(t)\|^2) dt \leq C\sqrt{\delta}, \quad 0 < \delta < T - \delta.$$

Lemma 1 is proved.

Now turn to the proof of Theorem 1. To do this, use the method of Galerkin. The solution of (1) – (3), (6) – (11) will be sought in the form

$$v^N(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^N(t) \omega_j, \quad H^N(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j^N(t) l_j, \tag{25}$$

where $\{\alpha_j^N(t)\}_{j=1}^N, \{\beta_j^N(t)\}_{j=1}^N$ – is found by solving a system of ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} (p^n)(v_t^N(t) + ((v^N \nabla)v^N), \omega_j)_\Omega - \mu((H^N \nabla)H^N, \omega_j)_\Omega + v(\nabla v^N, \nabla \omega_j)_\Omega = \\ = (p^N f^N(t), \omega_j)_\Omega, \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \mu(H_t^N(t), l_j)_\Omega + \frac{1}{\sigma}(\text{rot}H^N, \text{rot}l_j)_\Omega - \mu([v^N, H^N], \text{rot}l_j)_\Omega - \\ - (j_0 \text{rot}l_j)_\Omega = 0, \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned} \tag{27}$$

$p^n(t)$ – these are the solutions of differential equations of the first order:

$$p_t^N(t) + (v^N(t) \cdot \nabla)p^N(t) = 0. \tag{28}$$

The problem (26) – (28) is solved with the initial conditions

$$v^N(t)|_{t=0} = v_0^N(x), \quad H^N(t)|_{t=0} = H_0^N(x), \quad p^N|_{t=0} = p_0^N(x). \tag{29}$$

$$\begin{aligned} v_0^N(x) &\rightarrow v_0(x) \text{ in } \overset{0}{J}(\Omega), \\ H_0^N(x) &\rightarrow H_0(x) \text{ in } \overset{0}{H}(\Omega), \\ p_0^N(x) &\rightarrow p_0(x) \text{ in } C(\Omega), \text{ when } N \rightarrow \infty, \\ p_0^N(x) &\in C^2(\Omega). \end{aligned} \tag{30}$$

$$v_0^N(t) = \sum_{j=1}^N (v_0(x), \omega_j)_\Omega \omega_j, \quad H_0^N(t) = \sum_{j=1}^N (H_0(x), l_j)_\Omega l_j$$

this implies the

$$a_j(t)|_{t=0} = (v_0(x), \omega_j)_\Omega, \quad \beta_j(t)|_{t=0} = (H_0(x), l_j)_\Omega.$$

Reduce the problem (25) – (29) to an operator equation and on the basis of the theorem of Schauder prove its determination. In the space $C[0, T]$ we take a limited closed space

$$K = \{\psi(t) \mid \psi(t) \in C[0, T], \|\psi\| \leq \overline{C}\},$$

$$a_j^N(0) = (v_0(x), \omega_j),$$

$$\beta_j^N(0) = (u_0(x), l_j),$$

where

$$\psi(t) = (a_1^N(t), a_2^N(t), \dots, a_N^N(t), \beta_1^N(t), \beta_2^N(t), \dots, \beta_N^N(t)),$$

$$\|\psi(t)\| = \max_t \left(\sum_{i=1}^N ([a_i^N(t)]^2 + [\beta_i^N(t)]^2) \right)^{1/2}.$$

\overline{C} – inequality

$$\|v(t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 + \|H(t)\|_{L_\infty(0, T; \overset{0}{H}(\Omega))}^2 \leq \overline{C},$$

which, in turn, determined from (18).

Take some element of K :

$$\psi^0 = (a_{1,0}^N, a_{2,0}^N, \dots, a_{N,0}^N, \beta_{1,0}^N, \dots, \beta_{N,0}^N).$$

We form vectors

$$u^0 = \sum_{j=1}^N \alpha_{j,0}^N(t)\omega_j, \quad G^0 = \sum_{j=1}^N \beta_{j,0}^N(t)l_j$$

and on the set $u^0(x, t)$ and $G^0(x, t)$ we find $r(x, t)$ of the following task

$$\begin{aligned} r_t + (u_0 \nabla)r &= 0, \\ r|_{t=0} &= \rho_0^N(x). \end{aligned} \tag{31}$$

Problem (31) is uniquely solvable. Indeed, let $y(\tau, t, x)$ is the solution of the famous problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \tau} &= u^0, \\ y|_{t=\tau} &= x. \end{aligned} \tag{32}$$

Then the solution of problem (32) in the form

$$r = p_0^N (y(\tau, t, x)t)|_{\tau=0}, \tag{33}$$

From this we have:

$$0 < m \leq r(x, t) \leq M < \infty, \tag{34}$$

when $0 < m \leq p_0(x) \leq M < \infty$.

Then $u^0(t)$ and $G^0(t)$ we substitute in (26) and (27) and find

$$u^1(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_{j,1}^N(t)\omega_j \quad \text{and} \quad G^1(x, t) = \sum_{j=1}^N \beta_{j,1}^N(t)l_j,$$

from a system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} (ru_t^1 + (ru^0 \nabla)u^1, \omega_j)_\Omega - \mu((G^0 \nabla)G^1, \omega_j) + v(u_x^1, \omega_{jx})_\Omega, \quad j = \overline{1, N}, \\ \mu(G_t^1, l_j)_\Omega - \frac{1}{\sigma}(rot G^1, rot l_j)_\Omega - \mu([u^1, G^0], rot l_j)_\Omega - (j_0, rot l_j)_\Omega, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{35}$$

The solvability of (35) follows from the theory of ordinary differential equations.

That is, uniquely defines the vector

$$\psi^1 = (\alpha_{1,1}^N, \alpha_{2,1}^N, \dots, \alpha_{N,1}^N, \beta_{1,1}^N, \beta_{2,1}^N, \dots, \beta_{N,1}^N).$$

Multiplying the first and the second identity in (35) on $\alpha_{j,1}^N$ and $\beta_{j,1}^N$ respectively and summing over $j = \overline{1, N}$, obtain the estimate

$$\|u^1\|_{L_\infty(0,T;J(\Omega))} + \|G^1\|_{L_\infty(0,T;H(\Omega))} \leq \bar{c},$$

e.i. $\psi^1 \in K$.

Thus, we are structured operator $A : K \rightarrow K$. The fixed point of \tilde{A} along with the proper function of $r(t)$ defines the solution of the problem (26) and (27). The continuity of \tilde{A} . It follows from a general theorem of stability of solutions of ordinary differential equations for the coefficient from right-hand side. So, Schauder's theorem there is a fixed element $\psi \in K : A\psi = \psi$, that is, from (25) – (29) is uniquely v^N, ρ^N, H^N . For them, we have the estimates:

$$\begin{aligned} \|v^N(t)\|_{L_\infty(0,T;J(\Omega))} + \|v^N(t)\|_{L_\infty(0,T;J^1(\Omega))} &\leq C < \infty, \\ \|H^N(t)\|_{L_\infty(0,T;H(\Omega))} + \|H^N(t)\|_{L_\infty(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C < \infty, \\ 0 < m < \rho^N(t) &\leq M < \infty. \end{aligned} \tag{36}$$

Further, for the approximate solutions v^N, ρ^N, H^N , as in Lemma 1, we can prove rating:

$$\|v^N(t + \delta) - v^N(t)\|_{L_2(0,T-\delta;L_2(\Omega))} + \|H^N(t + \delta) - H^N(t)\|_{L_2(0,T-\delta;L_2)} \leq C\delta^{1/4}.$$

Here the constants C do not depend on N . Therefore, from the sequences $\{v^N\}, \{H^{N^N}\}, \{\rho^N\}$ can select a subsequence for which the following relations:

$$\begin{aligned} v^N &\rightarrow v^* \text{ weakly in } L_\infty(0, T; \overset{0}{J}(\Omega)), \\ v^N &\rightarrow v \text{ weakly in } L_2(0, T; \overset{0}{J^1}(\Omega)), \\ v^N &\rightarrow v \text{ strongly in } L_2(0, T; L_2(\Omega)), \\ p^N &\rightarrow p \text{ weakly in } L_\infty(Q_r), \\ H^N &\rightarrow H^* \text{ weakly in } L_\infty(0, T; \overset{0}{H}(\Omega)), \\ H^N &\rightarrow H \text{ weakly in } L_2(0, T; \overset{0}{H^1}(\Omega)), \\ H^N &\rightarrow H \text{ strongly in } L_2(0, T; \overset{0}{H}(\Omega)). \end{aligned} \tag{37}$$

Then, taking the limit as $N \rightarrow \infty$ in the identities (26) – (28), we find that the limit function $v(x, t), H(x, t), p(x, t)$ is a generalized solution of (1) – (3), (6) – (11). Indeed, for the functions ρ^N, v^N, H^N will show the limit in terms of the integral multiple (14).

At first

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega p^N v^N \varphi_t dx dt &= \int_0^T \int_\Omega (p^N - p) v \varphi_t dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega p^N (v^N - v) \varphi_t dx dt + \int_0^T \int_\Omega p v \varphi_t dx dt, \end{aligned}$$

where

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega (p^N - p) v \varphi_t dx dt = 0,$$

by

$$p^N \rightarrow p \text{ weakly in } L_\infty(Q_T)$$

and

$$\int_0^T \int_\Omega v \varphi_t dx dt \leq \int_0^T \|v\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_t\|_{L_2(\Omega)} dt \leq \|v\|_{L_2(0,T;\overset{0}{J}(\Omega))} \|\varphi_t\|_{L_2(Q_T)} \leq C,$$

Also

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega p^N (v^N - v) \varphi_t dx dt &\leq M \lim_{N \rightarrow \infty} \|v^N - v\| \|\varphi_t\| dt \leq \\ &\leq M \lim_{N \rightarrow \infty} \|v^N - v\|_{L_2(0,T;\overset{0}{J}(\Omega))} \|\varphi_t\|_{L_2(Q_T)} = 0, \end{aligned}$$

by

$$v^N \rightarrow v, \quad v^N \rightarrow v \text{ strongly in } L_2(Q_T).$$

That is, there is a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} p^N v^N \varphi_t dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} p v \varphi_t dx dt.$$

Next, consider another integral

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) H^N \varphi dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla)(H^N \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) \varphi H^N dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) \varphi H^N dx dt. \end{aligned}$$

Now we show that

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in W_2^1(0, T; J^1(\Omega)), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) \varphi H^N dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) \varphi H dx dt. \end{aligned}$$

To do this, expand the integral

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) \varphi H^N dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} ((H^N - H) \nabla) \varphi H^N dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) \varphi (H^N - H) dx dt + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) \varphi H dx dt, \end{aligned}$$

and evaluate the following integrals

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} ((H^N - H) \nabla) \varphi H^N dx dt \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \|H^N - H\|_{L_4} \|H^N\|_{L_4} \|\nabla \varphi\|_{L_2} dt \leq \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \|H^N - H\|_{L_2(0, T; L_4)} \|H^N\|_{L_4(0, T; L_4)} \|\varphi\|_{W_2^1(0, T; J^1(\Omega))} = 0, \end{aligned}$$

by $H^N \rightarrow H$ strongly in $L_2(0, T; L_4(\Omega))$, which follows from the embedding theorems

$$\int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) \varphi (H^N - H) dx dt = 0,$$

by $H^N \rightarrow H$ weakly in $L_2(0, T; \overset{0}{H}(\Omega))$,

$$\|H \nabla \varphi\|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} \leq \|H\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \|\nabla \varphi\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \leq C,$$

for all $\varphi \in W_2^1(0, T; \overset{0}{J}(\Omega)) \cap W_2^2(\Omega)$.

So,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (H^N \nabla) \varphi H^N dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (H \nabla) \varphi H dx dt.$$

Now we study the following integral

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v^N, \nabla \varphi) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v^N - \nabla v, \nabla \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla \varphi) dx dt,$$

where

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v^N - \nabla v, \nabla \varphi) dx dt = 0,$$

by $v^N \rightarrow v$ weakly in $L_2(0, T; \overset{0}{H}^1(\Omega))$ and $\nabla \varphi \in L_2(0, T; \overset{0}{J}(\Omega))$.

Limit transition in the rest of member (6) is not much difficult. Now we show the limit in several Member States of the identity (27). For example,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} [v^N H^N] rot \psi dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} [v^N - v, H^N] rot \psi dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} [v, H^N - H] rot \psi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} [v, H] rot \psi dx dt. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} [v, H^N - H] rot \psi dx dt \leq \\ &\leq C \|v^N - v\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \|H^N\|_{L_2(0, T; L_4)} \|\psi_x\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

when $N \rightarrow \infty$.

Similarly,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} [v, H^N - H] rot \psi dx dt = 0,$$

then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (rot(H^N - H), rot \psi) dx dt = 0,$$

by $H^N \rightarrow H$ weakly in $L_2(0, T; \overset{0}{H}^1(\Omega))$ and $rot \psi \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Also go to the limit of the rest of Member States (27). So, we have fully justified limit in the corresponding integral identities. Then the limit functions v, H, ρ – generalized solution of (1) – (3), (6) – (11). Theorem 1 is proved.

References

1. Roush P. Computational hydrodynamics. M.: Mir, (1980).
2. O.A. Ladyzhenskaya. The mathematical theory of viscous incompressible flow, Nauka, Moscow (1970).
3. C.S. Smagulov, M.C. Orynhanov An approximate method for solving the equations of hydrodynamics in a multi-connected domains. -DAN , (1981).
4. Smagulov S., Sirochenko V. N., Orunkhanov M. K. (2001). The numerical research of the liquid flow in regular areas, Kazakh National University named after Al-Farabi, Inc. Almaty, Kazakhstan.
5. Kononov A. N. The method of fictitious areas in filtration problems of two-phase liquid in accordance with the capillary forces, The numerical methods of mechanics, Vol. 3 No. 5. (1972).
6. Vabishevich P. N. The method of fictitious areas in problems of mathematical physics, Moscow State University, Inc. Moscow. (1991).
7. Lyons G. L. The methods of non-linear limited problem solutions, The world, Inc. Moscow. (1972).
8. Antoncev S. N., Kazhikov A.V., Monakhov V.N. The bordered problems nonhomogeneous liquid mechanics, NGU special courses, Inc. Novosibirsk. (1975).
9. Mikhailov V. P. Differential equations of derivatives, Science, Inc. Moscow. (1976).
10. He, J. H. Variational iteration method for delay differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, Vol. 2, pp. 235-236. (1997).
11. He, J. H. A new approach to nonlinear partial differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. Vol 2, pp. 230-235. (1997).
12. He, J. H. Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 167, pp. 69-73. (1998).
13. He, J. H. Variational approach to the sixth-order boundary value problems, Appl. Math. Comput., Vol. 143, pp. 537-538. (2003).
14. He, J. H. Variational principle for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients, Chaos Solutions Fractals, Vol. 19, pp. 847-851. (2004).
15. Ma, S. H., Fang, J. P. and Zheng, C. L. New Exact solutions for the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa system. Chaos, Solutions & Fractals, in press. (2007).
16. Wazwaz, A. M. New solutions of distinct physical structures to high-dimensional nonlinear evolution equations, Applied Mathematics and Computation, in press. (2007).
17. Wu, X. H. and He, J. H. Exp-function method and its application to nonlinear equations, Chaos, Solutions & Fractals, doi:10.1016/j.chaos.2007.01.024. (2007).
18. Xu, G. The solution solutions, dominos of the Kadomtsev-Petviashvili and Jimbo-Miwa equations in (3 + 1)-dimensions, Chaos, Solutions and Fractals, 30, PP. 71-76. (2006).
19. Yu, S. J., Toda, K., Sasa, N. and Fukuyama, T. N soliton solutions to the Bogoyavlenskii-Schiff equation and quest for the soliton solution in (3+1) dimensions. J. Phys. A: Math. Gen., 31, pp. 3337-3347. (1998).
20. Zhang, S. Application of Exp-function method to high-dimensional nonlinear evolution equation, Chaos, solution & fractals, doi:10.1016/j.chaos.2006.11.014. (2006).

Analytical Solution of the Problem About Bending of Annular Plates Subject to the Action of the Lateral Load

A.N. Tyurekhozjajev¹, G.K. Kalzhanova², A.G. Ibrayev³

¹ K.I. Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan

² Ilyas Zhansugurov Zhetysu State University, Taldykorgan, Kazakhstan

³ L.N.Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
{tyurekhodja, kgk67, ibrayev. askar}@mail.ru

Abstract. The paper considers the problem of compound bending of non-uniform round flexible plate subjected to lateral load under temperature changes through the thickness of the plate with the influence of tension on bending. The problem is reduced to the study of an unrelated system of differential equations, analytical solution of which has not been possible using existing mathematical apparatus. The paper managed to decompose the related system of equations into two unrelated equations and to find a solution using the method of partial discretization of differential equations. Results are represented as formulae and graphs.

Keywords: Thin round plate, compound bending, lateral load, radial force, deflection of the median plane of the plate, system of linear differential equations with variable coefficients, method of partial discretization of differential equations.

In the mechanics of deformable solid bodies are of particular interest the problems associated with bends of flexible plates and of various flexible shells working in a inhomogeneous temperature field. Such problems commonly encountered in applied problems of construction, petroleum engineering, mechanical engineering, water and air transport.

In mathematical consideration of such problems one have to deal with systems of linear differential equations with variable coefficients and nonlinear terms, obtaining analytical solutions of which presents considerable mathematical difficulties. Analytical solutions of such problems can be obtained using the method of partial discretization, developed by Professor A.N. Tyurekhodzhaev based on the theory of generalized functions.

Consider the problem of thermoelasticity of inhomogeneous circular plates under axisymmetric temperature field allowing for the changes in the elastic properties of the plate material by its thickness. Complex bending of inhomogeneous flexible circular plate, exposed to the action of the lateral load, under the temperature change across the thickness of the plate is described by a system of connected differential equations [1]:

$$a_{11}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z = 0, \quad (1)$$

$$a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{33}r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} = - \int q_z r dr + C,$$

where

$$a_{11} = kD_N, \quad a_{13} = k(D_N D_\nu - D_{N\nu} D), \quad (2)$$

$$a_{33} = Da_{14} + D_\nu a_{13} - D_M, \quad a_{14} = k(D_N D - D_{N\nu} D_\nu),$$

$$k = \frac{1}{D_N^2 - D_{N\nu}^2}, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr},$$

$$D_N = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} dz, \quad D_{N\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2} dz, \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} z dz,$$

$$D_\nu = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2} z dz, \quad D_M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2} z^2 dz, \quad D_{M\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2} z^2 dz.$$

Here F is the stress function, u_z is the deflection of the middle surface of the plate, h is the thickness of the plate, E is the modulus of elasticity, ν is the Poisson ratio, q_z is the external distributed lateral load per unit area of the middle surface, C is the constant of integration.

Solving these equations for $\frac{d}{dr}\nabla^2 F$ and $\frac{d}{dr}\nabla^2 u_z$ and considering the expression (2), we obtain

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 F = \frac{D_{N\nu}D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + \frac{D_{N\nu}D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2} \left(\int q_z r dr - C \right),$$

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \left(\int q_z r dr - C \right).$$
(3)

Consider the problem of thermoelasticity of inhomogeneous circular plates under axisymmetric temperature field allowing for the influence of tension on the bending and the changes in the elastic properties of the plate material by its thickness.

It is generally accepted [1] that the system of equations (1) in the case of considering the influence of tension on the bending is not reduced to unconnected equations. In fact, the system of resolving equations (1) can be reduced to a system of differential equations with nonlinear terms, each of which includes only one resolving function:

$$\frac{d^3 u_z}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u_z}{dr^2} - \left(\frac{BC_1}{2} + \frac{1+BC_2}{r^2} \right) \frac{du_z}{dr} - \frac{A}{r} \left(\frac{du_z}{dr} \right)^2 = \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right),$$
(4)

$$\frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{BC_1}{2} - \frac{1-BC_2}{r^2} \right) \frac{dF}{dr} - \frac{B}{r} \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 = \frac{A}{r} \left(\int q_z r dr - C \right),$$
(5)

where

$$A = \frac{D_{N\nu}D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2}, \quad B = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2}$$

And the functions F and u_z are related by

$$F = \frac{A}{B} u_z + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln r + C_0.$$
(6)

The third order differential equations (4) to (5) relative to the normal force N_r , acting in the cylindrical section, and the normal turning angle ϑ_r , defined given an axisymmetric field by the relation

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \vartheta_r = -\frac{du_z}{dr},$$

are rewritten in the following form

$$\frac{d^2\vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta_r}{dr} - \left(\frac{BC_1}{2} + \frac{1+BC_2}{r^2} \right) \vartheta_r + \frac{A}{r} \vartheta_r^2 = -\frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (7)$$

$$\frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dN_r}{dr} + \left(\frac{BC_1}{2} - \frac{BC_2}{r^2} \right) N_r - BN_r^2 = \frac{A}{r^2} \left(\int q_z r dr - C \right). \quad (8)$$

Radial force and deflection angle are related by

$$N_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{A}{B} \cdot \frac{\vartheta_r}{r}. \quad (9)$$

The exact solution of such equations using existing mathematical tools is not possible. Applying the method of partial discretization of differential equations, we determine the solution of these equations.

It should be noted that in this case it is sufficient to solve one of the equations (7)-(8). For instance, one can determine the turning angle of the normal, and then find the radial force by the formula (26).

Applying the method of partial discretization to the differential equation (7), we derive the following expression for the general solution of this equation

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \\ & + \frac{BC_1}{8} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\vartheta_r(r_k) H(r - r_k) - \vartheta_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\ & + \frac{BC_2}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k^2} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} H(r - r_{k+1}) \right] + \\ & + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\ & - \frac{BC_1}{8r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \vartheta_r(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1}^2 \vartheta_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\ & - \frac{BC_2}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\vartheta_r(r_k) H(r - r_k) - \vartheta_r(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\ & - \frac{B}{2} r \int \frac{1}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr + \frac{B}{2r} \int r \left(\int q_z r dr - C \right) dr, \quad (10) \end{aligned}$$

where $H(z)$ is the Heaviside unit function. Substituting the expression (10) into the formula (26), we derive

$$\begin{aligned} N_r(r) = & \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{A}{B} \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{BC_1}{8} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [\vartheta_r(r_k) H(r - r_k) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\vartheta_r(r_{k+1})H(r-r_{k+1})] + \frac{BC_2}{4} \left[\frac{\vartheta_r(r_k)}{r_k^2} H(r-r_k) - \frac{\vartheta_r(r_{k+1})}{r_{k+1}^2} H(r-r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{A}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r-r_{k+1})] - \\
& - \frac{BC_1}{8r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k^2 \vartheta_r(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1}^2 \vartheta_r(r_{k+1}) H(r-r_{k+1})] - \\
& - \frac{BC_2}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\vartheta_r(r_k) H(r-r_k) - \vartheta_r(r_{k+1}) H(r-r_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{B}{2} \int \frac{1}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr + \frac{B}{2r^2} \int r \left(\int q_z r dr - C \right) dr \Big\} \tag{11}
\end{aligned}$$

Consider the annular plate of constant thickness, the outer contour of which is rigidly clamped and inner one can shift in the axial direction of the plate, but it does not turn. The contours of the plate are free of radial forces. Then the constants are determined from the following boundary conditions

$$N_r|_{r=a} = 0, \quad N_r|_{r=b} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=a} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=b} = 0. \tag{12}$$

According to (12) the constants C_1 and C_2 will be equal to zero. С учетом значений Given values of C_1 and C_2 the differential equation (7) becomes

$$\frac{d^2 \vartheta_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta_r}{dr} - \frac{\vartheta_r}{r^2} + \frac{A}{r} \vartheta_r^2 = -\frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) \tag{13}$$

Discretizing the last term on the left hand side of the equation (13), we derive its following general solution

$$\begin{aligned}
\vartheta_r(r) = & C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r-r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r-r_{k+1})] - \\
& - \frac{1}{2} r \int \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr + \frac{1}{2r} \int B \left(\int q_z r dr - C \right) r dr. \tag{14}
\end{aligned}$$

Consequently, for the deflection $u_z(r)$ will be

$$\begin{aligned}
u_z(r) = & -\frac{C_3 r^2}{2} + C_4 \ln r + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r-r_k) - \right. \\
& \left. - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r-r_{k+1}) \right] + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r-r_k) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -r_{k+1} \ln r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
 & + \frac{1}{2} \int r \left[\int \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr \right] dr - \\
 & \frac{1}{2} \int \frac{1}{r} \left[\int B \left(\int q_z r dr - C \right) r dr \right] dr + C_5. \tag{15}
 \end{aligned}$$

The constant C_5 is determined from the condition of rigid support of the plate's outer contour

$$u_z|_{r=b} = 0. \tag{16}$$

Relation (26), taking into account the values of the constants C_1, C_2 will take the form

$$N_r = -\frac{A}{B} \cdot \frac{\vartheta_r}{r} \tag{17}$$

Substituting the expression (14) into (17) we obtain

$$\begin{aligned}
 N_r(r) = & -\frac{A}{B} \left\{ C_3 + \frac{C_4}{r^2} - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \right. \\
 & + \frac{A}{4r^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right) dr + \frac{1}{2r^2} \int B \left(\int q_z r dr - C \right) r dr \right\} \tag{18}
 \end{aligned}$$

The constant C is determined from

$$rQ_r - rN_r \vartheta_r = - \int q_z r dr + C, \tag{19}$$

where Q_r is the lateral force. Let the load be evenly distributed along the circumference with radius r_0 with intensity q_0

$$q_z = q_0 \delta(r - r_0)$$

Then the constant would be equal to zero.

Taking into account the boundary conditions (12), the deflection angle of the plate can be written as

$$\begin{aligned}
 \vartheta_r(r) = & -\frac{Bq_0r_0}{2} r \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) + \frac{Bq_0r_0}{4r} (r^2 - r_0^2) H(r - r_0) - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \times \\
 & \times \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \right. \\
 & \left. - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0r_0b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_0r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \\
 & - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] \tag{20}
 \end{aligned}$$

And the analytic expression of the turning angle at points r_k is determined as follows

$$\vartheta_r(r_k) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k) G}}{\frac{A}{2}(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k} \right) f(r_k)},$$

where

$$\begin{aligned}
 G = & \left(\frac{Bq_0 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4b} - \frac{Bq_0 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} \right) f(r_k) - \frac{Bq_0 r_0 (r_k^2 - r_0^2)}{4r_k} H(r_k - r_0) + \\
 & + \frac{Bq_0 r_0 r_k}{2} \ln \frac{r_k}{r_0} H(r_k - r_0) + \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_1) \vartheta_r^2(r_1) - \\
 & - \frac{A}{4} (r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{r_k} - \frac{r_k}{r_1} \right) \vartheta_r^2(r_1) + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f(r_k) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j) - \\
 & - \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j), \quad f(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)}.
 \end{aligned}$$

The deflection of the middle surface of the plate is equal to

$$\begin{aligned}
 u_z = & - \frac{Bq_0 r_0}{4} (r^2 - r_0^2) H(r - r_0) + \frac{Bq_0 r_0}{4} (r^2 + r_0^2) \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \\
 & - \frac{b}{(b^2 - a^2)} \left(a^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2} \right) \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \right. \\
 & - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \\
 & + \frac{Bq_0 r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} + \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - \\
 & - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - \\
 & - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{A}{4} \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - \\
& - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \\
& - \frac{A}{8} b^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \\
& + \frac{Bq_0 r_0 (b^2 - r_0^2)}{4} - \frac{Bq_0 r_0 (b^2 + r_0^2)}{4} \ln \frac{b}{r_0} \tag{21}
\end{aligned}$$

Radial force in the case of the plate, exposed to the lateral load, distributed evenly along the circumference with radius r_0 with intensity q_0 , is expressed by the formula

$$\begin{aligned}
N_r(r) &= \frac{Aq_0 r_0}{2} \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \frac{Aq_0 r_0 (r^2 - r_0^2)}{4r^2} H(r - r_0) + \\
& + \frac{A}{B} \frac{b(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \right. \\
& - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_0 r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} - \\
& - \frac{A^2}{4Br^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\
& + \frac{A^2}{4B} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] \tag{22}
\end{aligned}$$

Performing numerical calculations of the turning angle and deflection of annular plate of constant thickness, exposed to the lateral load evenly distributed along the circumference r_0 , given the elasticity modulus and coefficient of varying by the plate thickness according to the linear law given the certain values of the parameters, we plot down the curves. Figures 1 and 2 show the curves for changes in the turning angle of the normal and deflection for different cases of the lateral load distribution [1].

The considered method allows to find a solution to the equations (4) – (5) for virtually any laws of change both in the elastic modulus and the Poisson ratio.

References

1. Kovalenko A.D. Fundamentals of thermoelasticity. Kiev: "Naukova Dumka", (1970) [in Russian]
2. Tyurekhodzhaev A.N., Kalzhanova G.K. The problem of axisymmetric nonlinear bending of inhomogeneous flexible circular plate in the inhomogeneous temperature field. "Reports of the National Academy of Sciences of Kazakhstan". №3. pp.23-33. (in Russian) (2005)

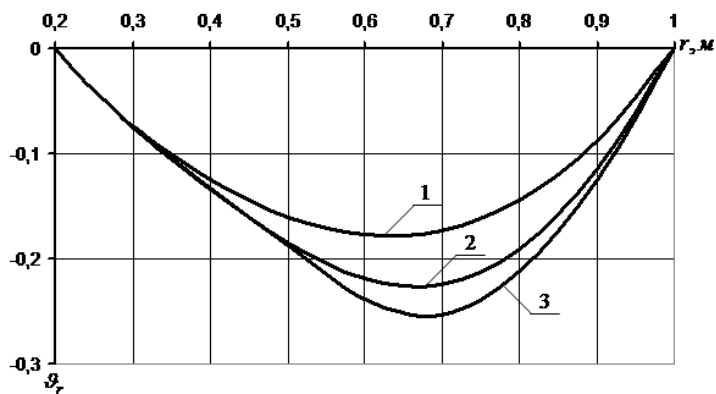


Fig. 1. The curves of changes in the angle of turning for the plate with an orifice, subject to the lateral load distributed: 1 – evenly over the plate surface; 2 – evenly over the area of the annular with radius and width ; 3 – evenly along the circumference of radius r_0 ($c < r_0 < d$).

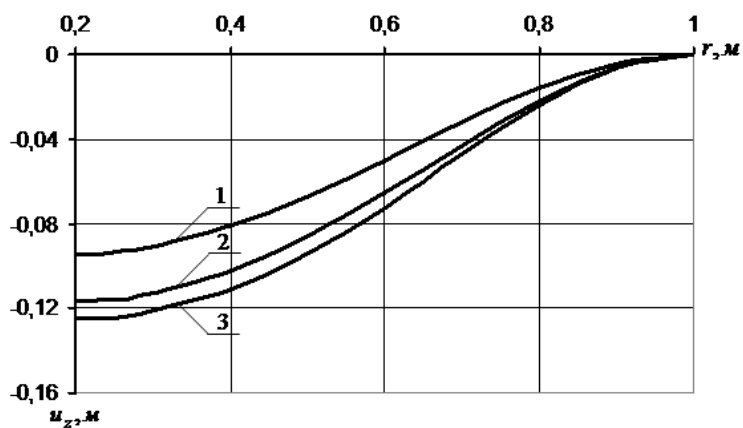


Fig. 2. The curves of changes in the deflection for the plate with an orifice, subject to the lateral load distributed: 1 – evenly over the plate surface; 2 – evenly over the area of the annular with radius and width; 3 – evenly along the circumference of radius r_0 ($c < r_0 < d$).

Algorithms of Determination by the Trajectory of Robots in the Conditions of Interval Uncertainty of the Data

Ziyavidin Yuldashev, Alimjan Ibragimov, and Shomurod Shominasov

National University of Uzbekistan,
Vuzgorodok, 100057 Tashkent, Uzbekistan
ziyaut@mail.ru

Abstract. In work the problem of bilateral approximation of possible trajectories of robot in the conditions of interval uncertainty of the data is considered. The problem is reduced to construction of interval splines, for cases of linear and cubic interval splines algorithms of their construction and results of numerical experiments are described, the corresponding graphic interpretations are presented.

Keywords: Mathematical modeling, robot, set of possible trajectories, condition of progressiveness of movement, interval values, generalized intervals, interval splines, error function.

1 Formulation of the Problem

Let's examine the problem of definition of trajectory of certain mechanism or robot moved from starting point $M_0(x_0, y_0)$ to the final point $M_n(x_n, y_n)$. In reality there can happen a whole set of the factors leading to a deviation of robot from the planned or optimal trajectory, especially if the robot is used on insufficiently known district with low possibility of direct supervision or adjustment of its path. In certain cases the possibility of presence of man or his supervision over of the process of robot functioning is totally excluded. The mathematical modeling and controlling in this case assumes the necessity of definition of all set of possible trajectories, namely all functions of condition or all decisions of modeling equations and directions since the coordinates of starting and final points can be known with errors, and robot, having begun movement from any point in the vicinity $M_0(x_0, y_0)$, can get in the result to any point from vicinity of point $M_n(x_n, y_n)$.

Let's assume that the robot due to the reasons which influence accuracy of definition of its coordinates can be arranged in some fixed vicinity of point M_0 and get into only a certain vicinity of point M_n . In work [1] it is supposed that points M_0 and M_n are in parallelotopes, which in two-dimensional case are ordinary rectangles. Thus there is an infinite set of lines connecting initial and final points of possible trajectories of the robot. It is appropriate to assume that desired trajectories are schedules of functions of a certain class. Further the problem on definition of some continuous line (a robot trajectory) is set which connects points $M_0 \in \tilde{M}_0$ and $M_n \in \tilde{M}_n$ where \tilde{M}_0, \tilde{M}_n are limited neighborhoods of initial and final points of trajectory. The options of trajectories thus can be very diverse, beginning from a primitive broken line without self-crossings, with the typical slope angles of segments to the axis of abscissa, ending with some sufficed arbitrary curve with self-crossings.

Let the first derivative of function $y = f(x)$ in any point $x_0 < x < x_n$ is positive, i.e. $f'(x > 0)$, $\forall x \in (x_0, x_n)$, what corresponds to the condition of progressiveness of movement and absence of self-crossings of curve of the function $y = f(x)$. Further by some criterion which will be specified further, on an interval $[x_0, x_n]$, we will choose $n - 1$ point: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. The splitting chosen this way we will designate as Δ . It can be abscissas of barriers or points in

which the robot should to stay a certain time in rest, execute some instruction, command and etc. If the choice of these points is not stipulated in advance, it is possible to assume that

$$x_i = \frac{x_n + x_0}{2} + \frac{x_n - x_0}{2} \cdot \cos \frac{\pi(2i + 1)}{2n}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (1)$$

since at the construction of approximation for the method of interpolation the way of interpolation on knots of Chebyshev's polynomial is optimal in sense of minimality of deviation of function error from zero, for any approached hypothetical function (trajectory) $y = f(x)$ [2].

If values are set $r_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) then it is possible to assume that points $M_i(x_i, y_i)$ are centers of circles with radiuses r_i in which the robot can be located due to influence of hindrances or casual forces.

Let in points x_i intervals $\mathbf{d}_i = [\underline{d}_i, \bar{d}_i]$ are set such that $\omega(\mathbf{d}_i) = \bar{d}_i - \underline{d}_i = 2 * r_i$ [3]. Here and everywhere below we for designation of interval sizes and objects will use format “**bold**” without any preliminary stipulations, and also assume existence of acquaintance with basics of interval analysis [3,4]. Then set of points $\mathbf{M}_\Delta(x_i, \mathbf{d}_i) \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{IR}$ be considered as the inputs of problem of interval interpolation, *problem* type **IIN1** [5], for certain interval value function $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ [6]. Thus values of r_i are unequivocally defined by admissions of locations of the robot or values of errors, and \mathbf{d}_i can be considered as the generalized intervals [3], such as $\mathbf{d}_i = y_i + [-r_i, r_i]$. In this case, as distinct from [1], in geometrical aspect it is a matter not about parallelotopes and roundtopes, such circumference that $\forall x \in (x_0, x_n)$ the section $f_2(a) - f_1(a)$ represents diameter of circumference within which a robot can be situated. The problem of interval interpolation of type **IIN1** is studied in [7] where interval variants for a number "classical" interpolation formulas of Lagrange, Newton, Ermit are presented. In this case interval analogies of interpolation polynoms can be accepted as natural interval expansions since interpolation conditions will be satisfied without transformations due to properties of generalized interval arithmetics [3].

2 Construction of trajectory of the robot

At search of trajectory of the robot, satisfying to the conditions of interpolation on the points $\mathbf{M}_\Delta(x_i, \mathbf{d}_i)$, the interval variant of linear spline can be considered as the most natural decision of a problem since geometrically it contains sets of every possible trajectories which are polygonal line on which the corresponding robot can move. Since the cubic splines in real case, namely at the consideration of only dot values possess certain advantages including minimized kinetic energy of object making a trajectory on the given line [8], the interval analogue of the cubic spline constructed on the basis of resulted in [2] arguments is considered as well. At that coincidence of designations should not be treated as copying as all of the objects and statements are understood in interval sense.

Definition: Let's name *I-spline* of multiple m function which is an interval polynomial of degree m on each of segments $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$):

$$\mathbf{S}_\Delta^m(\mathbf{f}, x) = \mathbf{P}_{im}(x) = \mathbf{a}_{i0} + \mathbf{a}_{i1}x + \dots + \mathbf{a}_{im}x^m, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2)$$

and satisfying to the conditions of continuity of derivatives to an $m - 1$ multiple in points x_1, x_2, \dots, x_{n-1} :

$$\mathbf{P}_{im}^{(k)}(x_i) = \mathbf{P}_{i+1,m}^{(k)}(x_i), \quad (3)$$

at $k = 0, 1, \dots, m - 1$; $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Everywhere below derivatives from *I-spline* and approached by it hypothetical interval value function $y = \mathbf{f}(x)$ accepting in the points x_i values $\mathbf{d}_i = [\underline{d}_i, \overline{d}_i]$ are understood in sense “formal derivative” from [9], and integrals in sense of [10]. Thus in expressions operations over interval sizes are understood in the generalized sense, in the assumption that in practice the mechanism of reboots can be used allowing to implement calculations within the limits of rules of suitable interval arithmetics [3,4] with application of the special software, as for example from [11,12]. It should be noted that conditions (3) are understood in interval sense [3], and components of system matrix for definition of coefficients $\mathbf{S}_{\Delta}^m(\mathbf{f}, x)$ also will be interval.

For construction of $\mathbf{S}_{\Delta}^m(\mathbf{f}, x)$ it is necessary to define $n(m+1)$ of unknown coefficients \mathbf{a}_{im} . Parities (3) form system from $m(n-1)$ equations. Other equations for coefficients are resulting from condition of affinity to the approached function and from some additional conditions.

Let $m=1$. It means that the robot from point to point moves on straight line, or to be more exact on one of polygonal line included into $\mathbf{S}_{\Delta}^m(\mathbf{f}, x)$ spline. Then the total number of free parameters equals $2n$. Though in reality each interval is set by bottom and top limits and it is necessary for us to define $4n$ of real numbers, we, nevertheless, believe that it is necessary to define $2n$ interval coefficients since algorithms will be constructed within the limits of the chosen structure of interval numbers.

So, the question of construction of $\mathbf{S}_{\Delta}^1(\mathbf{f}, x)$ spline coinciding with $\mathbf{f}(x)$ in points x_0, x_1, \dots, x_n is stated.

From conditions of interpolation the system of the equations will turn out as

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{i1}(x_{i-1}) = \mathbf{f}(x_{i-1}), & i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{P}_{i1}(x_i) = \mathbf{f}(x_i), & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4)$$

which breaks up to the system of equations relative to coefficients of separate polynomials

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{i1}(x_{i-1}) = \mathbf{a}_{n0} + \mathbf{a}_{n1}x_{n-1} = \mathbf{f}(x_{i-1}) = \mathbf{d}_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{P}_{i1}(x_i) = \mathbf{a}_{n0} + \mathbf{a}_{n1}x_n = \mathbf{f}(x_i) = \mathbf{d}_i, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

From here, considering operations with intervals within the framework of generalized interval arithmetics [4] where in particular $\mathbf{a} - \mathbf{a} = [0, 0]$, we find that

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{i1} = \frac{\mathbf{f}(x_i) - \mathbf{f}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{a}_{i0} = \mathbf{f}(x_{i-1}) - \mathbf{a}_{i1}x_{i-1} = \mathbf{d}_i - \mathbf{a}_{i1}x_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

The constructed polynomial $\mathbf{P}_{i1}(x)$ is interval interpolation polynomial of the first degree with interpolation knots x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, in which $\mathbf{P}_{i1}(x_i) = \mathbf{d}_i$.

Let $m=3$. Also as in purely real case, the linear spline $\mathbf{S}_{\Delta}^1(\mathbf{f}, x)$ constructed above, possesses extreme properties: any real contraction $R_s(\mathbf{S}_{\Delta}^1(\mathbf{f}, x)) = q(x)$ realizes the bottom limit $\inf_{q \in Q_1} I_1(q)$, where Q_1 is a set of continuous functions $q(x)$, satisfying to the conditions

$$q(x_i) = \mathbf{f}(x_i) \in \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad I_1(q) = \int_{x_0}^{x_n} (q')^2 dx < \infty. \quad (7)$$

By analogy to a real case, the approaching function we will be sought in space of functions bigger smoothnesses, namely we will consider set Q_2 of functions $q(x)$ from the continuous first derivative, satisfying to the conditions

$$q(x_i) = \mathbf{f}(x_i) \in \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad I_2(q) = \int_{x_0}^{x_n} (q'')^2 dx < \infty. \quad (8)$$

Let's search for the function $q_2 \in Q_2$ realizing $\inf_{q \in Q_1} I_1(q)$. Euler's formal equation for corresponding functional $S^{(4)}(x) = 0$, i.e.

$$q_2(x) = P_{i3}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

on intervals $[x_{i-1}, x_i]$. The number of parameters a_{ik} , subject to definition equals $4n$, but only when number of conditions equals $3n - 1$:

2n conditions

$$P_{i3}(x_i) = P_{i+1,3}(x_i) = d_i \tag{9}$$

and $n - 1$ condition of continuity of first derivative

$$P'_{i3}(x_i) = P'_{i+1,3}(x_i) \tag{10}$$

in points x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . The missing conditions are obtained as natural boundary conditions in points x_i .

Let's assume that minimizing function $q_2(x)$ exists and it is polynomial of the third degree on intervals $[x_{i-1}, x_i]$. Let $\eta(x)$ be infinitely differentiated in sense of formal derivative function, such that,

$$\eta(x_0) = \dots = \eta(x_n) = 0. \tag{11}$$

Since within the frameworks accepted above agreements, considerations from [1], by definition lacking $n + 1$ conditions can be repeated taking into account (11), then following interval conditions exist

$$P''_{i3}(x_0) = P''_{n3}(x_n) = 0, \tag{12}$$

$$P''_{n3}(x_i) - P''_{n+1,3}(x_i) = 0, \tag{13}$$

where $i = 1, 2, \dots, n - 1$; close the system for construction $P_{i3}(x)$, being a cubic parabola on each of intervals $[x_{i-1}, x_i]$.

Now we will consider the problem on resolvability and about the practical decision of system of equations ((9), (10), (12), (13)). For convenience we will enter into consideration values $M_i = q''_2(x_i)$. Since function $q''_2(x_i)$ is linear on each interval $[x_{i-1}, x_i]$, then

$$q''_2(x) = \frac{M_{i-1}(x_i - x)}{h_i} + \frac{M_i(x - x_{i-1})}{h_i} \quad \text{on} \quad [x_{i-1}, x_i], \tag{14}$$

where it is allowed $h_i = x_i - x_{i-1}$. From relation (14) and conditions

$$q_2(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad q_2(x_i) = f(x_i),$$

we can get that

$$q_2(x) = P_{i3}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \times \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad \text{on} \quad [x_{i-1}, x_i]. \tag{15}$$

Conditions

$$P'_{i3}(x_n) = P'_{i+1,3}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

form equation

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}. \tag{16}$$

Besides that we have conditions

$$P'_{13}(x_0) = 0, \quad P'_{n3}(x_n) = 0,$$

other wise $M_0 = 0, M_n = 0$. After substitution $M_0 = 0, M_n = 0$, correspondingly, into first and last equation (15) we will receive the system

$$CM = b \tag{17}$$

$n - 1$ -th equation with $n - 1$ -th unknown:

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_{n-1})^\top, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^\top.$$

Elements of c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n - 1$) matrix, according to (16), are set by relations

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{h_i}{6} & j = i - 1, \\ \frac{h_i + h_{i+1}}{3} & j = i, \\ \frac{h_{i+1}}{6} & j = i + 1, \\ 0 & |i - j| > 1, \end{cases}$$

and b_i elements of b column by relations

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_i} = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_{i+1}} - \frac{d_i - d_{i-1}}{h_i}.$$

The system (17) can be resolved by the "method of interval marching"[13] by $O(n)$ interval arithmetic operations. After finding M_j by formula (15) we will define polynomials $P_{i3}(x)$, and function $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_2(\mathbf{x}) + [\mathbf{r}(\mathbf{x}), \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{x})]$ allows to determine in any point $x \in [x_{i-1}, x_i]$ location of robot, namely: $r = \frac{|\Phi(\mathbf{x})|}{2}$ - the radius of circumference within which it will be situated. At that

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} |[r(x), \bar{r}(x)]| \leq \frac{3}{\min_{1 \leq i \leq n-1} h_i} \max_{1 \leq i \leq n-1} |d_i|,$$

what estimated the maximum expandability of the strip $\mathbf{q}_2(x)$ within each local interval of a grid Δ at $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

3 Numerical experiments

Numerical experiments were implemented in the local package named provisionally "Robot" since at the solution of the assigned task by the means of the package [12] the necessity for dynamic visualization of the trajectories emerging depending on the interval initial data has arisen. Besides that the necessity for full set of interval arithmetics [11] included into [12] has disappeared.

In *figure 1* the interface on definition of dispersion of interval values with usage of chosen interval arithmetics is presented: by Moore, Markov and Kahan.

In *figure 2* the diagram of cubic *I-spline* (red strip) when the tabular data, in points of interval $[0, 10]$ are by a randomization method is presented. Within this strip there is a possible trajectory of the robot when for function $y = f(x)$ in points x_i dot values are chosen $y_i = \text{mid}(d_i) = \frac{d_i + \bar{d}_i}{2}$ and the real cubic spline is constructed.

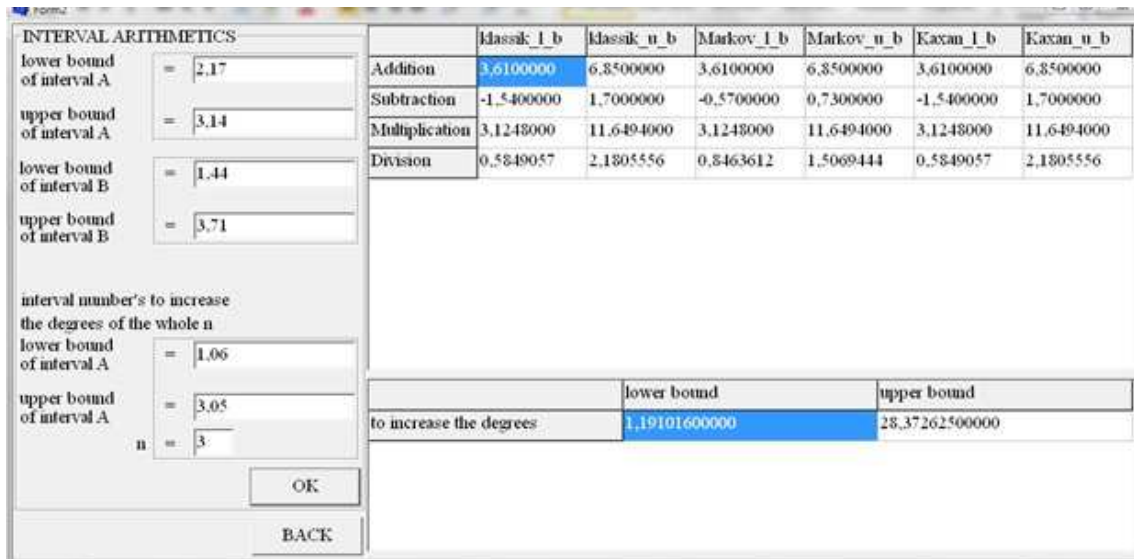


Fig. 1.

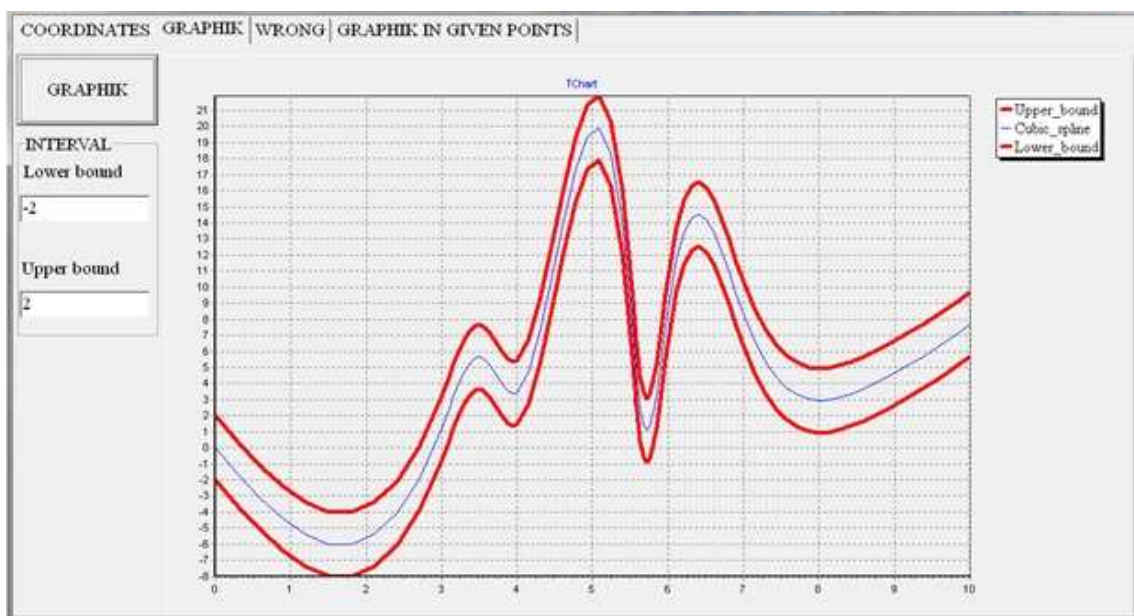


Fig. 2.

During experiments in the capacity of possible trajectory the certain functions were chosen and approbation of method on so-called "the point solution" was conducted. In *figure 3* graphs are illustrated when function

$$y = 10^{-1}x \cos x + \exp(-x)$$

was chosen. Within the strip in this case the hypothetical curve and corresponding cubic spline are indicated and quantity of control points $n = 24$, in the assumption of possible observations taken with interval of one hour within 24 hours.

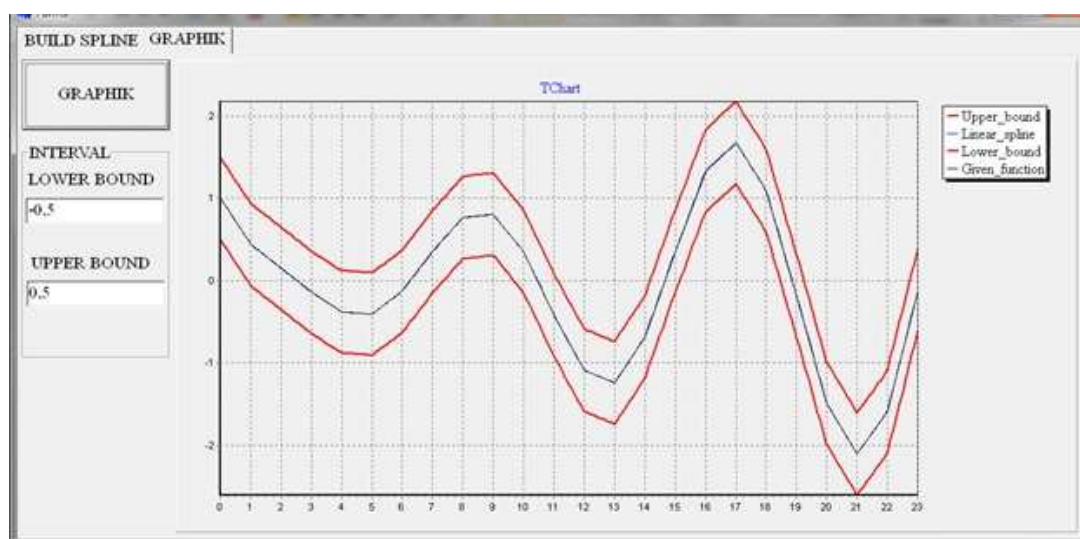


Fig. 3.

References

1. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. Springer-Verlag London Limited, (2001)
2. Bahvalov N.S. Numerical methods. - Moskva: Science, (1973)
3. Kalmykov S.A., Shokin Yu.I. and Yuldashev Z.KH. Methods of interval analysis. Novosibirsk: Nauka, (1986)
4. Shary S.P. Finite-dimensional interval analysis. Publishing house "XYZ" (2010)
5. Yuldashev Z.Kh., Ibragimov A.A., Tadjibaev Sh.Kh. Interval polynomial interpolation for bounded-error data, 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerical Computations, Novosibirsk, pp. 190-191, (2012)
6. Shokin Yu.I., Yuldashev Z.Kh. Representability of interval value functions with real limited functions. - Collection. "Numerical methods of continuum mechanics vol.4, №5, pp. 134-146, (1973)
7. Dobronets B.S., Shokin Yu.I., Yuldashev Z.Kh. Task of interpolation of the interval analysis. AN UzSSR. "Questions of calculus mathematics Vol. 31, (1975)
8. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. The methods of spline functions. - Moskva : Science, (1980)
9. Schroder G. Differentiation of interval functions. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 36, pp. 485-490, (1972)
10. Moore R.E. Interval Analysis. - Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, (1966)
11. Yuldashev Z.Kh., Ibragimov A.A., Kalhanov P.J. The package of interval algorithms for wide usage. Registered in state register of programs for PC of the Republic of Uzbekistan, Certificate of official registration of programs for PC N DGU 02201, Tashkent city, (2011)
12. Yuldashev Z.Kh., Ibragimov A.A., Kalhanov P.J. The complex of programs for calculation of values of interval algebraically admissible expressions within the limits of various interval arithmetics. Registered in state register of programs for PC of the Republic of Uzbekistan, Certificate of official registration of programs for PC N DGU 02202, Tashkent city, (2011)
13. Yuldashev Z.Kh., Ibragimov A.A. About analysis of full error in the method of interval marching and problem of inversion of interval matrixes. Computational technologies. Novosibirsk, Russia. N 9(2), pp.235-240, (2004)

Численное моделирование процесса очистки промышленных стоков в отработанных горных выработках*

Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров

Кемеровский Государственный Университет, Кемерово, Россия
l.v.kemerova@mail.ru

Аннотация. Статья посвящается математической модели процесса очистки и захоронения промышленных и бытовых отходов в отработанных горных выработках затопленной угольной шахты. В настоящее время в Кузбассе для очистки шламовых стоков углеобогащательной фабрики «Комсомолец» используются отработанные горные выработки ш. «Кольчугинской». При всей идейной простоте и низкой стоимости применения такого подхода остается актуальной и важной проблема исследования и прогнозирования возможного развития процессов очистки. Т.к. обводненная выработка представляет собой «черный ящик», математическое моделирование и численные эксперименты становятся удобным инструментом для решения задачи прогнозирования. Целью исследования является построение и изучение математической модели течения и распространения взвешенных примесей. Рассматривается модель оседания примеси. Предусматривается возможность изменения области решения из-за слеживания осадка. Приводятся картины течения и распространения примеси. Модель позволяет прогнозировать «залповый выброс» взвешенных примесей из выработки.

Ключевые слова: Промышленные и бытовые стоки, захоронение, очистка, математическое моделирование, уравнения движения жидкости, уравнение переноса примеси.

Введение

Для Кузбасса загрязнение водных ресурсов промышленными и бытовыми сточными водами становится серьезной угрозой экологической безопасности [1]. Особо усугубляет эту проблему работа углеперерабатывающих предприятий. Так их жидкие стоки включают в себя, в основном, отходы флотации и отводимые с фабрик шламовые воды. Они представляют собой гидросмесь, в состав которой входят жидкая, твердая и газообразная фазы. Жидкая фаза составляет 95-98% по массе и состоит в основном из шахтной или речной воды, потребляемой фабрикой в процессе переработки угля. Газообразная фаза представлена воздухом, находящимся в ней в основном и растворенном состоянии. А твердая часть состоит из частиц минерального и органического происхождения, при этом содержание частиц крупностью до 50 мкм в ней достигает 80 - 95% [2]. Сточные воды угольных предприятий могут содержать: взвешенные частицы (угольная и породная пыль, частицы глины), соли тяжелых металлов, фенолы, аммиак, нитраты, нитриты, свободную серную кислоту, серу и другие вредные компоненты [3]. Внедрение на шахтах высокомеханизированных комплексов со сложной сетью гидросистем привело к увеличению расходов нефтепродуктов при ведении горных работ, часть из которых попадает в шахтную воду и дополнительно загрязняет ее [3].

Обычно комплекс мероприятий, проводимых для обезвреживания жидких промышленных стоков угольной промышленности, является трудоемким и затратным. Для очистки сточных вод угольных предприятий сегодня используются самые разнообразные технологии водоочистки, отличающиеся степенью очистки, сложностью используемого оборудования, энергетическими и денежными затратами [4] - [9]. Известно, что при работе очистных сооружений образуется значительное количество осадка с содержанием взвешенных

* Работа выполнена в рамках проектной части Государственного задания 1.630.2014/К.

веществ до 5 г/куб.дм. Чаще всего обработка осадка производится на иловых площадках, в прудах-отстойниках или илонакопителях, где совмещаются процессы его обеззараживания и складирования. Такие сооружения занимают значительные площади, а также являются потенциальными источниками загрязнения окружающей среды [10]. Однако на практике, эта технология получила широкое распространение как наиболее простая в обслуживании и конструктивном исполнении.

В Кузбассе используется и другой способ очистки промышленных стоков угольной промышленности с помощью отработанных горных выработок затопленных угольных шахт. Метод реализуется для очистки шламовых стоков углеобогащательной фабрики «Комсомолец» в отработанных выработках ш. «Кольчугинской». Жидкие промышленные стоки углеобогащательной фабрики закачиваются в выработанное пространство закрытой затопленной угольной шахты. Предполагается, что в шахте будет происходить их естественная очистка за счет отстаивания и разбавления фильтрующимися в выработанное пространство грунтовыми водами. Данная технология подразумевает не только очистку, но и складирование осажденных илов в выработанном пространстве [10]. Изучение этого альтернативного способа очистки представляет большой практический интерес для Кузбасса. В Кемеровской области в результате закрытия нерентабельных угледобывающих предприятий, заполнены техногенными подземными водами огромные по площади подземные пространства. Более того часто такие затопленные горные выработки находятся в черте городов и их потенциально можно использовать как очистные сооружения.

При всей идейной простоте и низкой стоимости его применения остается актуальной и важной проблема исследования и прогнозирования возможного развития протекающих внутри процессов очистки. Так наибольшую опасность представляет вероятность «залпового выброса» накопленных примесей, при котором может происходить кратковременное, но интенсивное увеличение концентрации и объема примесей в откачиваемой жидкости. Причиной возникновения данного явления могут стать изменения внутренней структуры выработки из-за обрушения верхней кровли или слеживание накопившегося осадка, сезонное изменение гидрологического режима в регионе, а как следствие увеличение объема фильтрующихся грунтовых вод и другие факторы. Для безопасного практического применения такого метода очистки сточных вод очень важно не допустить «залпового выброса» и своевременно вывести выработку, как очистное сооружение, из эксплуатации.

Обводненная выработка представляет собой «черный ящик», реальные измерения каких-либо параметров возможны лишь на входе и выходе. В связи с этим возникает необходимость в применении математического моделирования и численных экспериментов, как инструментов для прогнозирования вероятного развития протекания процессов, проходящих в затопленных горных выработках.

1 Математическая модель оседания примеси и изменения области решения из-за слеживания осадка

Шламовые гидросмеси относятся к неустойчивым, расслаивающимся системам, благодаря выпадению из них твердых частиц. Процесс сложен для аналитического описания, так как на скорость осаждения частиц полидисперсной смеси, какой являются шламы, влияют взаимодействие сил тяжести, сопротивления среды, гидродинамических факторов, различная скорость падения частиц разной крупности. При осаждении с течением времени в единице объема в верхней части гидросмеси число частиц уменьшается и изменяется соотношение между долей частиц различной крупности. Более крупные частицы осаждаются быстрее, и их содержание в верхних слоях уменьшается быстрее, чем мелких. Соответственно в

нижних слоях гидросмеси отмечается противоположная тенденция. Очень мелкие частицы могут оставаться в верхних слоях, поскольку силы их веса могут оказаться настолько малыми, что силы сопротивления среды и броуновское движение могут их уравновесить. Одновременно с осаждением твердой фазы образуется и уплотняется осадок [2].

Таким образом, в модели процесса очистки жидких промышленных стоков от взвешенных оседающих примесей в отработанных горных выработках будем учитывать три процесса: течение жидкости, распространение частиц примеси в найденном потоке и изменение области решения из-за накопления и слеживания осадка. В данной работе для моделирования течения жидкости будем использовать безразмерную систему уравнений Навье - Стокса. Для определения распространения примеси будем использовать уравнение переноса, которое является следствием закона сохранения непрерывных неоднородных сред [11]. За счет выбора граничных условий на нижней границе области решения будем моделировать массообмен между дном и близлежащими слоями жидкости, а также будем предусматривать возможность изменения области решения из-за слеживания осадка.

В литературе [12] - [15] широко представлены модели, позволяющие изучить процесс движения речных наносов. Обычно исследователи этой проблемы учитывают три взаимозависимых процесса: образование взвешенных наносов, их перенос потоком и массообмен между донными отложениями и прилежащими слоями жидкости. Для моделирования первого процесса используется диффузионная теория, для второго - уравнения переноса, а для оценки расходов донных наносов применяются эмпирические формулы [14]. Однако для моделирования очистки шламовых стоков эта методика не применима по ряду причин. Во-первых, для речного потока характерно непостоянство вертикальных и горизонтальных составляющих скоростей. Это приводит к тому, что движение частиц в потоке имеет прерывистый характер. Частицы могут двигаться скачками, перекачиваться, останавливаться и вновь вовлекаться в поток. Скорости же течения в отработанной горной выработке малы. Основной объем жидкости фильтруется через верхнюю кровлю, и течение не может перейти в турбулентный режим, который принципиально характерен для речных потоков. Более того, в отличие от открытых русел, в рассматриваемой задаче размеры зоны осаждения взвешенных загрязняющих частиц ограничены площадью самой выработки и распространением загрязнений «по ширине» можно пренебречь. Во-вторых, доля твердой фазы в поступающих в выработку промышленных стоках не превышает 5%, и состоит в основном из частиц крупностью до 50 мкм. Выпавшие в осадок такие примеси уплотняются, слеживаются со временем и перестают размываться течением. Поэтому для таких осадков не применимы эмпирические формулы для определения массообмена между дном и водным потоком, полученные для взвешенных примесей в руслах рек.

Будем предполагать, что в отработанную горную выработку подаются промышленные стоки, содержащие только нерастворенные примеси с известными концентрациями. Задача о течении и распространении растворенных примесей рассматривалась в работах [16] - [20]. Через верхнюю кровлю в выработку поступают «чистые» грунтовые воды. Частицы примеси таких размеров, что при принятой модели течения они на него не влияют, но оседают под действием силы тяжести и распространяются по выработке за счет диффузии и переноса вместе с потоком воды. Осевшие примеси могут накапливаться и «затвердевать» (слеживаться), если на протяжении некоторого времени не сносятся потоками воды.

Реальные размеры отработанной горной выработки и физические процессы очистки таковы, что при моделировании выбор размеров области решения повлияет только на время слеживания осадка, но не на характер и тенденции развития происходящих процессов. Поэтому, в данной работе не проводится масштабирование с реальными размерами ш. Кольчугинской, и рассматривается область решения меньшей протяженности. Отдельно стоит

отметить, что так как скорость движения жидкости в затопленной горной выработке мала, будем считать, что боковые стенки не оказывают существенного влияния на осаждение частиц примеси, поэтому будем рассматривать только двумерную модель (см. рис. 1).

Рассматривается область решения G , характерной для затопленной горной выработки формы [17] с границей $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$, где Γ_1, Γ_4 - входное и выходное отверстия, соответственно, высоты H_2, Γ_2, Γ_3 - нижняя и верхняя границы, длины $2L_1 + 2L_2 + L_3$.

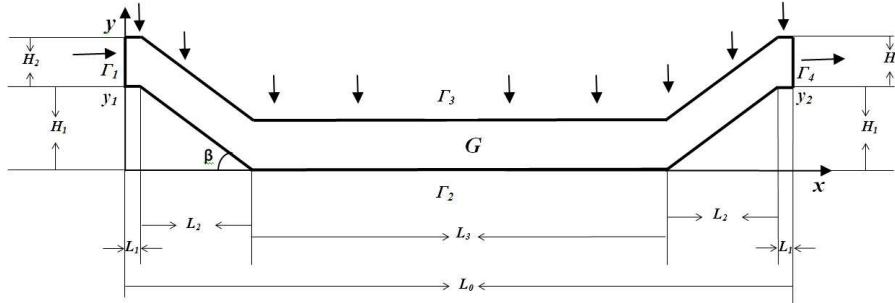


Рис. 1. Область решения для задачи об оседании примеси и слеживании осадка.

Считаем, что жидкость является однородной, вязкой и несжимаемой. Течение такой жидкости описывается безразмерной системой уравнений Навье - Стокса в переменных «функция тока - вихрь» [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \Delta \omega, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Для системы уравнений (1) необходимо поставить начальные и граничные условия, но физическая постановка задачи включает только условия на скорость. Так известно, с какой скоростью происходит закачка сточных вод и можно измерить, с какой скоростью жидкость откачивается из выработки. Исходя из измерений уровня грунтовых вод и скорости откачки, можно вычислить объем фильтруемых грунтовых вод. Тогда для физических переменных можно поставить следующую начально - краевую задачу:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0; \quad v|_{t=0} = 0; \\ \Gamma_1 : u &= u_0(t); \quad v = 0; \quad \Gamma_2 : u = 0; \quad v = 0; \\ \Gamma_3 : u &= 0; \quad v = v_0(t); \quad \Gamma_4 : u = u_1(t); \quad v = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (1) - (2) используются следующие обозначения: $\vec{U} = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ - вектор скорости, заданный своими компонентами u, v ; $u_0(t), u_1(t), v_0(t)$ - известные функции, определенные на границе области решения ∂G ; $Re = \frac{\tilde{u} L_0}{\nu}$ - число Рейнольдса; \tilde{u} - характерная скорость, вычисляется как максимальная скорость входного потока; L_0 - характерная длина; ν - кинематическая вязкость; Δ - оператор Лапласа.

Компоненты вектора скорости u, v связаны с вихрем ω и функцией тока ψ соотношениями:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}; \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Учитывая (2), зададим ω, ψ на Γ следующим образом:

$$\omega|_{t=0} = 0; \quad \omega|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\Gamma}; \quad \psi|_{t=0} = 0; \quad \psi|_{\Gamma} = \psi_1(t, x, y), \quad (4)$$

где $\psi_1(t, x, y)$ - известная функция, которая выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $\oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ [22], где n - направление внешней нормали.

Для моделирования распространения примеси используется безразмерное уравнение переноса [11], учитывающее воздействие силы тяжести и диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + (v - v_s) \frac{\partial C}{\partial y} = D \Delta C. \quad (5)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) &= C_0(x, y); \\ \Gamma_1 : C &= C_1(x, y); \quad \Gamma_2 : D_1 \frac{\partial C}{\partial y} + v_s C = C_D - C_{v_s}; \\ \Gamma_3 : C &= C_2(x, y); \quad \Gamma_4 : \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь C - концентрация оседающей примеси, $C_0(x, y)$, $C_1(x, y)$, $C_2(x, y)$ - известные функции, $v_s > 0$ - абсолютная величина скорости оседания частиц под действием силы тяжести, D - коэффициент диффузии, \tilde{v}_s - абсолютная величина скорости оседания частиц под действием силы тяжести у дна. На нижней границе области решения Γ_2 определяется поток примеси, равный разности расходов отрывающихся от дна частиц примеси $C_D(t, x, y)$ (отвечает за размыв осадка) и оседающих частиц $C_{v_s}(t, x, y)$ (определяет аккумуляцию примеси на дне).

Осевшая и слежавшаяся у дна примесь может со временем изменять его форму. Данный процесс мы будем моделировать следующим образом: если на протяжении времени T^* в области решения вблизи границы, концентрация осевшей примеси превышает пороговое значение C^* , то будем считать, что данная примесь перестает сноситься течением, и граница области решения переносится в соответствии с концентрацией C^* и временем T^* .

2 Математическая модель самоизлива жидкости из выработки

Со временем, выработанное пространство закрытых угольных шахт обводняется и для поддержания уровня грунтовых вод в регионе, приходится продолжать откачку жидкости из выработки, что связано с дополнительными расходами. Для решения этой проблемы было предложено бурить скважины в затопленную горную выработку, через которые под действием давления поступающих через верхнюю кровлю грунтовых вод будет происходить самоизлив жидкости. Однако вместе с потоком жидкости на поверхность могут поступать находящиеся внутри выработки взвешенные примеси. Высока вероятность, что это будут осевшие, но не слежавшиеся на дне примеси. Течение и распространение всплывших примесей при самоизливе жидкости из шахты исследовалось в [23], а в данной работе уделяется внимание размыву не слежавшегося осадка.

При математическом моделировании рассматриваемой задачи будем полагать, что через верхний свод постоянно поступают грунтовые воды, которые считаем чистыми. Предполагаем, что выработка полностью обводнена, а у дна накоплено какое-то количество слежавшегося или не слежавшегося осадка.

Используем модель области решения G , характерной для затопленной горной выработки прямоугольной формы с полостью вдоль верхней кровли и «сливной скважиной». Область решения определяется своей границей $\Gamma = \cup_{i=1}^{12} \Gamma_i$. Через границы $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ в область решения фильтруются грунтовые воды, через Γ_1 вытекают (см. рис. 2). За $\Gamma_i, i = 5, \dots, 12$ обозначаются непроницаемые границы.

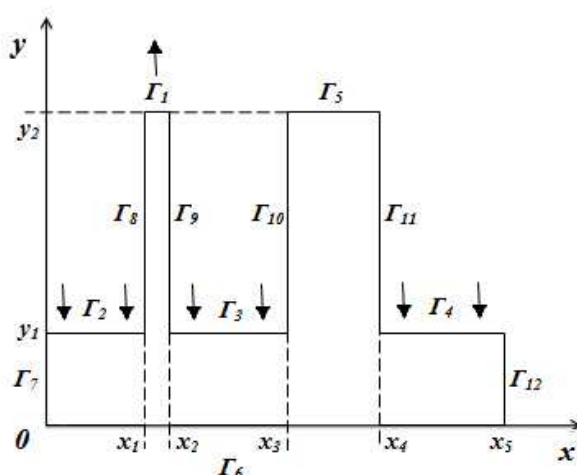


Рис. 2. Область решения для задачи о самоизливе жидкости из шахты.

На основании сравнения результатов численных расчетов распространения растворенных примесей с данными натурных измерений в [16] - [20] был сделан вывод о том, что для правильного моделирования их распространения необходимо использовать различные модели движения жидкости. В [23] для моделирования распространения всплывающих примесей использовать три модели течения жидкости. В данной работе ограничиваемся моделью идеальной стратифицированной жидкости, описываемой с помощью безразмерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \psi + k^2 \psi = \psi_1. \quad (7)$$

С соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = 0; \quad v|_{t=0} = 0; \\ \cup_{i=1}^4 \Gamma_i : u = 0; \quad v = v_i(t, x, y); \quad \cup_{i=5}^{12} \Gamma_i : u = 0; \quad v = 0; \\ \psi|_{t=0} = 0; \quad \psi|_{\Gamma} = \psi_1(t, x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

где $\psi(t, x, y)$ - функция тока, $\psi_1(t, x, y)$ - известная функция, в случае прямоугольной области решения можно взять $\psi_1 = k^2 y$; $k = \frac{a}{Fr^2}$, $a = \frac{\partial \rho}{\partial y}$, Fr - плотностное число Фруда. В данной модели $a = \frac{\partial \rho}{\partial y} \neq 0$, и тем самым $k \neq 0$, жидкость является стратифицированной, а ее течение - вихревым.

Для моделирования распространения примесей используется уравнение переноса (6) с граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) = C_0(x, y); \quad number \\ \Gamma_1 : \frac{\partial C}{\partial y} = 0; \quad \cup_{i=2}^4 \Gamma_i : C = 0; \quad \cup_{i=7}^{12} \Gamma_i : \frac{\partial C}{\partial n} = 0; \\ \Gamma_5 : \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_1 C; \quad \Gamma_6 : \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_2 C. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $C(t, x, y)$ - концентрация примеси, $C_0(x, y)$ - известная функция, v_s - абсолютная величина скорости оседания частиц под действием силы тяжести, D - коэффициент диффузии, $\alpha_1 < 0$ - коэффициент, определяющий интенсивность аккумуляции примеси у дна, $\alpha_2 \leq 0$ - коэффициент, определяющий интенсивность отрыва примеси от верхней кровли. Параметр α_2 будет не равен нулю, если вблизи верхней непроницаемой границы находятся еще не осевшие взвешенные частицы примеси, и будет равен нулю в обратном случае.

3 Методы решения и результаты расчетов

Поставленные дифференциальные задачи решаются методом сеток. Исходные дифференциальные краевые задачи аппроксимируются обычным образом на разностной, согласованной с границей, неравномерной сетке с шагом h_{x_i}, h_{y_j} по пространственным переменным и шагом τ по времени [24].

Уравнение переноса вихря и уравнение переноса примеси решаются неявной схемой стабилизирующих поправок с противопоточной аппроксимацией конвективных членов [25]. Разностное уравнение Пуассона для функции тока решается методом минимальных невязок неполной аппроксимации с параметром – матрицей с использованием покомпонентной и глобальной оптимизации итерационных параметров [26], [27].

Решение осуществляется в два этапа: сначала решается краевая задача (1) - (4) или (7), (8) и находятся компоненты вектора скорости, на втором этапе решается задача (5), (6) или (5), (9) и получаются картины распространения примеси в области решения.

При валидации построенной модели проводились серии расчетов по общепринятой методике: расчеты в более простых областях решения и сравнение с аналитическими решениями, если таковые существовали; расчеты с измельчением шага сетки и изменением каждого из параметров модели в отдельности. Проводилась проверка соответствия полученного решения построенной модели. В данной работе приводятся лишь некоторые результаты численных расчетов, полученные с помощью построенной математической модели. При этом, не будем проводить подробный анализ влияния всех параметров модели на полученные картины течения и распространения примеси. В каждом из приведенных результатов расчетов рассматривается лишь одна примесь, характеризующаяся своим набором параметров. Характерной длиной выбирается длина области решения по x , а характерной скоростью – скорость входного потока. Все параметры безразмерны.

Вначале рассмотрим результаты, полученные для задачи об оседании примеси и слеживании осадка. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ в области решения нет примесей, и через входную границу начинается подача загрязненной жидкости. Через верхнюю кровлю фильтруются «чистые» грунтовые воды, а на выходной границе проводится откачка жидкости.

Далее на рис. 3 - 5 будут представлены результаты при следующих значениях характеристик сетки и течения: размеры области решения $H_2 = 0,2$, $H_1 = L_2 = 0,4$, $L_3 = 2$, $L_1 = 0,05$; шаги пространственной сетки $h_x = h_y = 0,01$; шаг по времени $\tau = 0,01$; число Рейнольдса $Re = 1000$; скорость входного потока $u_0(t) = 0,0001$; концентрация примеси во входном потоке жидкости $C_1 = 0,2$; начальные условия для компонентов вектора скорости $u|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = 0$.

Задача о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости является эволюционной, потому приходится находить компоненты вектора скорости на каждом слое по времени. В области решения течение развивается при малых скоростях, и линии тока жидкости направлены вдоль канала, а вихревые структуры не образуются (см. рис. 3.1). Из-за слеживания осадка может измениться форма области решения, поэтому при каждом изменении границы течение жидкости пересчитывается (см. рис. 3.2).

На рис. 4 представлена динамика распространения и оседания примесей. Примесь распространяется вдоль линий тока, неравномерно по каналу $t = 10$. За счет диффузии происходит не только горизонтальное, но и вертикальное распространение. Под действием силы тяжести на всем протяжении канала вдоль нижней границы выпадает осадок. Однако большая концентрация примесей сосредотачивается преимущественно вдоль наклонных границ $t = 20$. Поток жидкости, подаваемый через верхнюю кровлю, дополнительно способствует

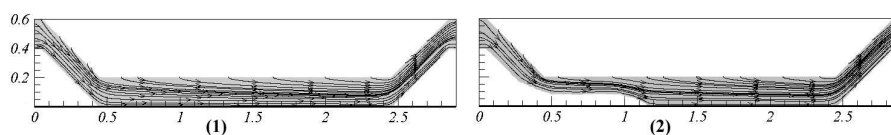


Рис. 3. Течение жидкости при скорости фильтрации грунтовых вод $v_0 = -4u_0H_2/L_3$.

(1) В первоначальной области решения при $t = 0$.

(2) В измененной области решения при $t = 10$.

вертикальному осаждению примеси. Уже на момент безразмерного времени $t = 20$ наблюдается частичное слеживание осадка вдоль нижней левой наклонной границы, к моменту же $t = 50$ канал значительно сужается. Более подробное исследование влияния входных параметров задачи на результирующие картины течения и распространения взвешенных примесей приводится в [28].

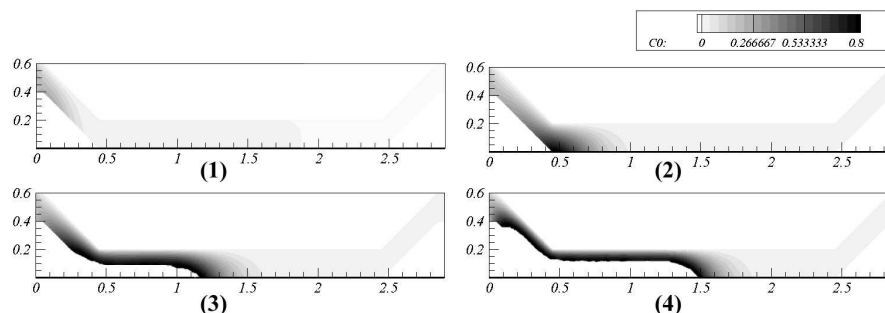


Рис. 4. Течение и распространение оседающей примеси при значениях параметров: диффузия $D = 0,001$; скорость оседания $v_s = \tilde{v}_s = 0,001$; массообмен от дна $C_D - C_{v_s} = 0,25$; пороговое значение концентрации $C^* = 0,6$; пороговое значение времени слеживания осадка $T^* = 1$ на моменты времени: (1) $t = 0,1$; (2) $t = 2$; (3) $t = 5$; (4) $t = 10$.

Основной характеристикой, показывающей насколько «эффективно» происходит процесс осаждения и накопления примеси является объем примесей, выходящих из области решения с потоком откачиваемой жидкости $C_{out} = \int_{\Gamma_4} uCdy$. Когда поток поступающих в область грунтовых вод $V_{in} = \int_{\Gamma_1} udy$ постоянен, количество выходящей примеси равномерно увеличивается до некоторого уровня (см. рис. 5.1.) Но в случае любых колебаний V_{in} , показатель C_{out} может существенно изменяться. При этом кратковременное уменьшение объема поступающей жидкости не приводит к опасным последствиям (см. рис. 5.2), количество «выброса» уменьшается соответствующим образом и с восстановлением прежнего объема потока равномерно увеличивается.

Самым опасным развитием процессов осаждения и накопления илов является возможность так называемого «залпового выброса». Т.е. резкого увеличения концентрации и количества примеси, выходящей из области решения. Такая картина может наблюдаться, если, например, произойдет даже кратковременное увеличение объема фильтруемых грунтовых вод (рис. 5.3). Как видно из рисунка, в интервале времени от $t = 10$ до $t = 11$ вместе с увеличением V_{in} в 4 раза происходит резкое увеличение количества примеси на выходе из области решения в 5 раз. До момента времени $t = 10$ происходит равномерное увеличение величины C_{out} , а после $t = 11$ ее показатели уменьшаются до значения, полученного для аналогичной задачи с постоянным объемом фильтрующихся грунтовых вод (см. рис. 5.1).

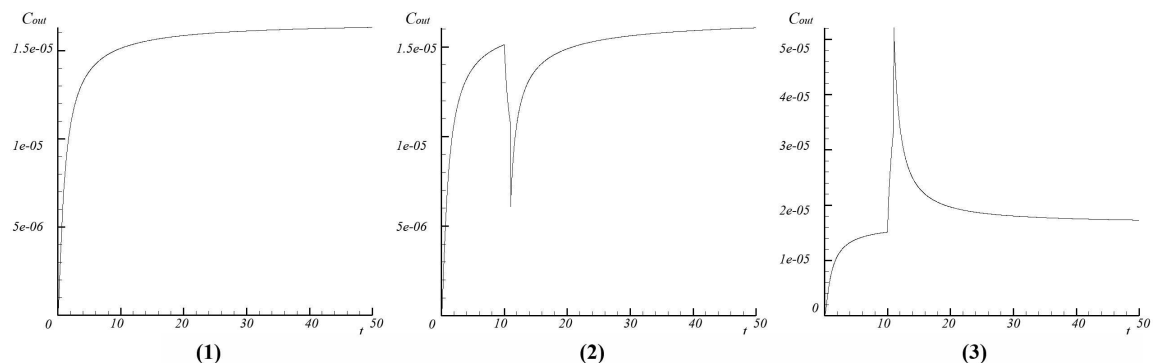


Рис. 5. График изменения количества примеси, выходящей из области решения.

(1) Поток грунтовых вод постоянен.

(2) Поток грунтовых вод уменьшается в 4 раза в интервале времени $t \in (10, 11)$.

(3) Модель «залпового выброса» поток грунтовых вод увеличивается в 4 раза в интервале времени $t \in (10, 11)$.

Далее рассмотрим результаты, полученные для задачи о естественном истечении жидкости из шахты (рис 6). Считаем, что в начальный момент времени в области нет течения, она полностью заполнена жидкостью, в которой равномерно распределена примесь с концентрацией $C = 0,1$ (рис. 6.1.). Вся примесь осаждается и на дне выпадает осадок, который частично слеживается. В области под полостью образуется «горка» (см. рис. 6.2 - 6.3.). Далее добавляется отверстие для самоизлива и через верхнюю границу начинается фильтрация «чистой» жидкости. Линии тока направлены вдоль канала от верхней границы к выходному отверстию, всю полость вдоль верхней кровли занимает вихрь (см рис. 6.4.). У дна линии тока обтекают слой слежавшегося осадка, а весь неслежавшийся верхний слой осевшей примеси размывается течением и вытекает через границу Γ_1 (см. рис. 6.3.). К моменту времени $t = 5$ «горка» примеси значительно сглаживается, внутри области решения остается лишь слежавшийся осадок (см. рис. 6.5. - 6.6.).

Заключение

В работе предложена общая математическая модель течения и распространения, оседания взвешенных примесей, с возможностью изменения формы области решения из-за накопления осадка и модель самоизлива жидкости из шахты. На основе предложенных моделей можно проводить анализ и изучение процесса очистки промышленных стоков в затопленных горных выработках и исследовать процесс самоизлива жидкости из шахты.

Первая модель позволяет прогнозировать, будет ли перекрыт канал тока жидкости и возможен ли «залповый выброс». Для его предотвращения необходимо контролировать качество очистки и обеспечивать автоматическое переключение подачи откачиваемой жидкости на другие очистные сооружения в случае необходимости.

Вторая модель позволяет исследовать влияние расположения скважины, ее размеров и глубины бурения на размыв накопленных внутри выработки примесей и выход их на поверхность при самоизливе жидкости из шахты.

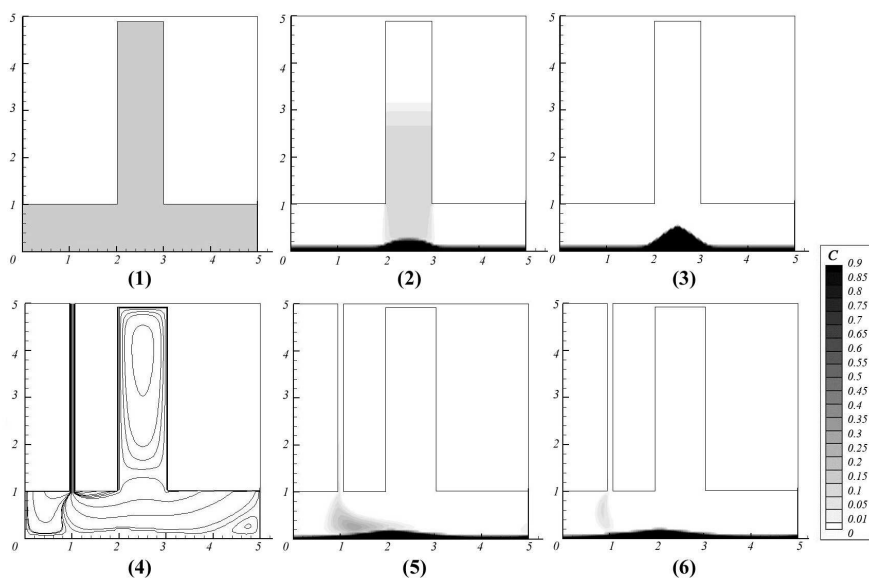


Рис. 6. Распространение неслежавшейся примесей при самоизливе идеальной стратифицированной жидкости со значениями параметров: диффузии $D = 0,001$; скорости оседания $v_s = 0,1$; $h_x = h_y = 0,05$; ширина трубы равна $0,1$; шаг сетки в трубе $h_{x_1} = 0,001$; скорость фильтрации через верхнюю границу равна $0,2$; коэффициент стратификации равен 1 . Где на (1) течение, (2) - (5) динамика размыва примеси на моменты времени (2) $t = 0$; (3) $t = 10$; (4) $t = 20$; (5) $t = 100$.

Список литературы

1. Лесин Ю.В., Скрынник Л.С. Охрана и рациональное использование водных ресурсов при разработке угольных месторождений Кузбасса. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2008. – 178 с.
2. Бутовецкий В.С. Охрана природы при обогащении углей: справочное пособие. – М.: Недра, 1991. – 231 с.
3. Ельчанинов Е.А., Беляев Е.В., Весков М.И. и др. Охрана окружающей среды при подземной разработке угольных месторождений – М.: Наука, 1995. – 240 с.
4. Чебакова И.Б. Очистка сточных вод: Учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2001. – 84 с.
5. Коростовенко В.В., Гронь В.А., Шахран С.Г., Капличенко Н.М., Галайко А.В. Применение электроимпульсного метода очистки сточных вод угольных месторождений// Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 10-1. – С. 164-169.
6. Демкин В.И., Навитный А.М., Гусев Н.Н., Свитцов А.А., Каплунов Ю.В. Комплексная переработка шахтных вод с использованием мембранно-сорбционных методов// Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 9 – С. 311-315.
7. Клейн М.С., Вахонина Т.Е. Повышение технологической и экологической эффективности очистки шламовых вод углеобогащения// Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2014. – № 3 (103). – С. 125-127.
8. Красавин А. П. У истоков отраслевой экологии. – Пермь. Изд-во «Золотой город», 2001. – 268 с.
9. Abdel-Raouf N., Al-Homaidan A.A., Ibraheem I.B.M. Microalgae and wastewater treatment (2012) Saudi Journal of Biological Sciences, No. 19, pp. 257-275.
10. Qu X., Alvarez P.J.J., Li Q. Applications of nanotechnology in water and wastewater treatment (2013) Water research No. 47 (12), pp. 3931-3946.
11. Белолипецкий В.М., Шокин Ю. И. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды. – Новосибирск: Инфолио-пресс, 1997. – 240 с.
12. Боровков В.С. Руслые процессы и динамика речных потоков на урбанизированных территориях. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 266 с.
13. Белолипецкий В. М., Генова С. Н. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле// Вычислительные технологии – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 9–25.
14. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 211 с.
15. Барышников Н.Б. Морфология, гидрология и гидравлика пойм. – Л. Гидрометеиздат, 1984. – 280 с.
16. Захаров Ю.Н., Чирюкина А.В. Итерационный метод определения течения стратифицированной жидкости в проточном водоеме// Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V всероссийской научной конференции. – 2006. – С. 511–512.
17. Захаров Ю.Н., Чирюкина А.В. Течение жидкости в подземных полостях с учетом фильтрации через стенки// Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии: сборник научных трудов. – 2007. – С. 305–309.
18. Захаров Ю.Н., Счастливцев Е.Л., Чирюкина А.В. Течение идеальной жидкости в закрытых водоемах// Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, спец. вып. 2.– С. 21–27.
19. Захаров Ю.Н., Потапов В.П., Счастливцев Е.Л., Чирюкина А.В. Моделирование распространения загрязняющих веществ в затопленных горных выработках// Вестник НГУ. – 2009. – Т. 7, вып. 4. – С. 66–72. – (Серия «Информационные технологии»).
20. Захаров Ю.Н., Потапов В.П., Счастливцев Е.Л., Чирюкина А.В. Моделирование распространения примесей в затопленных горных выработках: монография// Кемеровский государственный университет. – Кемерово, 2013. – 96 с.
21. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 670 с.
22. Роч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
23. Бондарева Л.В., Гурских М. А., Захаров Ю.Н. Об одной модели распространения всплывающей примеси в затопленных горных выработках// Вестник Кемеровского государственного университета. – 2014. – № 4(60). – С. 54-61.
24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
25. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
26. Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.
27. Захаров Ю.Н., Иванов К.С. О нестационарных решениях в задачах гидродинамики со стационарными краевыми условиями// Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 1, № 1. – С. 24-33.
28. Бондарева Л.В., Захаров Ю.Н. Моделирование процесса очистки промышленных стоков с помощью затопленных горных выработок// Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. – 2014. – № 1. – С. 22-127.

Применение компьютерной алгебры в решении Ньютоновой проблемы многих тел

Д.М. Диарова¹, Н.И. Земцова²

¹Атырауский институт нефти и газа, Атырау, Казахстан,

²ВЦ РАН им. А. А. Дородницына, Москва, Россия

ddiarova@mail.ru, zemni@yandex.ru

Аннотация. Описан алгоритм компьютерного моделирования динамики в ньютоновой ограниченной задаче многих тел на основе опыта использования системы компьютерной алгебры Mathematica.

Ключевые слова: динамические системы, дифференциальные уравнения, стационарные решения, устойчивость, компьютерная алгебра

1 Введение

Проблема интегрируемости дифференциальных уравнений аналитической и небесной механики сформулирована в известных трудах Ньютона, Лагранжа, Эйлера[1]. И с тех пор предпринимались и предпринимаются многочисленные попытки проинтегрировать эти уравнения в квадратурах. После доказательства Пуанкаре теорем о несуществовании первых интегралов гамильтоновых уравнений задачи трех тел в виде однозначных трансцендентных функций [2], была принята, можно сказать, новая трактовка проблемы интегрируемости систем дифференциальных уравнений гамильтоновой динамики: первоочередной задачей является нахождение любых частных решений (например, решений типа положений равновесия) и исследование их устойчивости в различных трактовках этого понятия.

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновой задаче n тел с массами m_1, m_2, \dots, m_n относительно тела P_0 с массой m_0 в декартовой системе координат P_0xyz имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(x_s - x_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2 y_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(y_s - y_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2 z_k}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{(z_s - z_k)}{\Delta_{ks}^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right), \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

При исследовании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений практически всегда возникает вопрос о существовании таких частных решений, которые обладают какой-либо симметрией, сохраняемой в процессе изменения независимой переменной.

А.Винтнер в монографии [3] показал, что дифференциальные уравнения (1) ньютоновой проблемы многих тел допускают решения, сохраняющие с течением времени углы в конфигурации и пропорциональное подобие между всеми взаимными расстояниями в ней. Такие решения принято называть *гомографическими решениями*. Примером таких конфигураций являются знаменитые частные решения дифференциальных уравнений ньютоновой

проблемы трех тел, найденные Эйлером и Лагранжем, так называемые в математической литературе коллинеарные решения Эйлера и треугольник Лагранжа [1].

В последние годы Е.А.Гребениковым [4] были предложены новые модели космической динамики, в которых гравитационное поле создается телами, образующими правильные многоугольники, вращающиеся вокруг центрального тела. Данные работы и возможности систем компьютерной алгебры (например, система Mathematica [5]), дали возможность найти множество новых гомографических решений.

Известно [6], что всякое гомографическое решение ньютоновой проблемы n тел порождает новую динамическую модель - ограниченную проблему $(n+1)$ тел, состоящую в исследовании всевозможных движений бесконечно малой массы в поле притяжения n гравитирующих масс.

Качественные исследования ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ тел состоят, в частности, в нахождении стационарных решений и проверке их на устойчивость в различных трактовках.

Для решения вышеизложенных задач был разработан алгоритм компьютерного моделирования в системе Mathematica и написан комплекс соответствующих программ. Данный алгоритм состоит из описанных ниже этапов.

2 Нахождение новых гомографических решений

Сюда, в первую очередь, следует отнести визуализацию моделей, геометрически изображаемых определенными фигурами в декартовой системе координат. Например, на рис.1 изображены конфигурации ньютоновой задачи 4-х, 7-ми и 9-ти тел. "Жирными" точками обозначены гравитирующие тела.

Программа в системе Mathematica, позволяющая построить рисунок исследуемой модели, состоит из следующих инструкций:

```
Figure[sp_] := Module[lines, points, gr1, gr2, t0,
(* sp - список координат тел в конфигурации: {xk, yk}*)
lines = Table[Append[sp[[i]], sp[[i, 1]]], {i, 1, Length[sp]}];
r1 = Flatten[sp, 1];
If[FreeQ[r1, 0, 0], t0 = {},
r1 = Drop[r1, Position[r1, {0,0}][[1]]];
t0 = {Text[P0], {0,0},{-2, -2}}];
gr1 = Graphics[Table[Text[ToString[Pk], StandardForm],
r1[[k]], -2.5 r1[[k]], {k, 1, Length[r1]}] Join t0,
BaseStyle -> {FontWeight -> Bold, FontSize -> 12}];
points = Append[{PointSize[0.027]},
Table[Point[Flatten[sp, 1][[i]],{i,1,Length[Flatten[sp, 1]}]]];
gr2 = Graphics[ {points, {Dashing[0.02], Thickness[0.0065],
Line[lines]}}];
Show[gr1, gr2, AspectRatio -> Automatic, Axes -> Automatic,
Ticks -> {{-1, 1}, {-1, 1}} ]
```

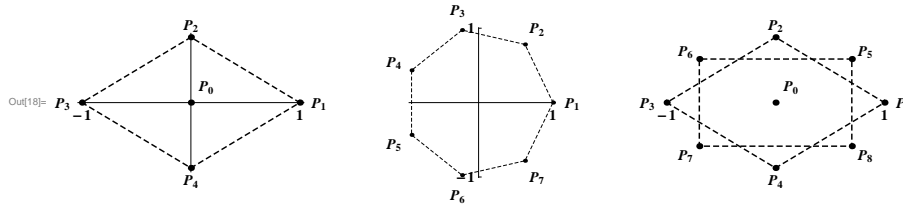


Рис. 1. Некоторые динамические модели ньютоновой задачи многих тел.

Далее исходим из необходимых и достаточных условий существования центральных конфигураций n тел [6]:

$$\begin{aligned} \omega^2 x_k &= \frac{m_0 x_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{3/2}} + \sum_{j=1, j \neq k}^n m_j \frac{x_k - x_j}{((x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2)^{3/2}}, \\ \omega^2 y_k &= \frac{m_0 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{3/2}} + \sum_{j=1, j \neq k}^n m_j \frac{y_k - y_j}{((x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2)^{3/2}}, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$ - координаты i -го тела, $m_i, i = \overline{0, n}$ - масса i -го тела, ω - угловая скорость вращения конфигурации.

Решая эту систему, для каждой конкретной модели получаем аналитические соотношения между динамическими (массы тел и угловая скорость вращения конфигурации) и геометрическими (размеры конфигурации) параметрами модели. Данные соотношения являются условием существования точного гомографического решения, изображаемого данной геометрической фигурой, для ньютоновой задачи. Далее вычисляем допустимые значения параметров модели, при которых конфигурация имеет физический смысл.

Например, для гомографического решения – ромба, изображенного на рис.1, условия существования решения следующие:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_3, \\ m_2 &= m_4 = \frac{4m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(\alpha^3 - 1) + m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \\ \omega &= \left(\frac{m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})} + \frac{m_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

3 Ограниченная ньютонова задача многих тел. Нахождение стационарных решений

Найденные точные решения дифференциальных уравнений общей ньютоновой задачи n тел позволяют нам сформулировать ограниченную ньютонову задачу $(n + 1)$ - тел [6,8,9].

Суть ограниченной ньютоновой задачи $(n + 1)$ тел состоит в изучении движения тела P с бесконечно малой массой в поле гравитации, создаваемом в пространстве P_0xyz взаимным притяжением тел $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, движущихся в пространстве с постоянной угловой скоростью ω и образующих некую определенную конфигурацию.

Ее математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений [6,8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m_0x}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{x-x_s}{\Delta_s^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m_0y}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{y-y_s}{\Delta_s^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m_0z}{r^3} + \sum_{s=1}^{12} m_s \left(\frac{z-z_s}{\Delta_s^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right), \\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ r_s = (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)^{1/2}, \\ \Delta_s = ((x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2)^{1/2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Задача нахождения стационарных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамическую модель ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ тел сводится к решению системы нелинейных иррациональных алгебраических уравнений [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \\ \quad - \sum_{i=1}^n m_i \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0, \\ g(x, y) = \omega^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \\ \quad - \sum_{i=1}^n m_i \frac{y - y_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Сложность данной системы уравнений делает невозможным нахождение ее решения в компактном аналитическом виде, поэтому разумно искать решения для конкретных значений параметров. Сочетание графических и численных методов дают общую наглядную картину наличия таких решений и точные (с допустимой "машинной точностью") численные значения координат стационарных точек. На рис.2 решение $f(x,y)=0$ изображено сплошной линией, а $g(x,y)=0$ - пунктирной линия. Точки пересечения этих линий – стационарные решения.

Инструкции системы Mathematica для построения данного графика при заданных параметрах динамической модели (массы тел и размеры конфигурации) имеют следующий вид:

$$wx[x_-, y_-] := \omega^2 * x - \frac{x m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$wy[x_-, y_-] := \omega^2 * y - \frac{y m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

```
spx=ContourPlot[wx,{x,1.5,-1.5},{y, 1.5,-1.5}, Contours ->{0},
ContourShading ->False, PlotPoints->pts,
DisplayFunction->Identity,
ContourStyle->{Thickness[0.006]}];
spy=ContourPlot[wy,{x,1.5,-1.5},{y,1.5,- 1.5},
Contours->{0},ContourShading->False, PlotPoints->50,
DisplayFunction->Identity,
```

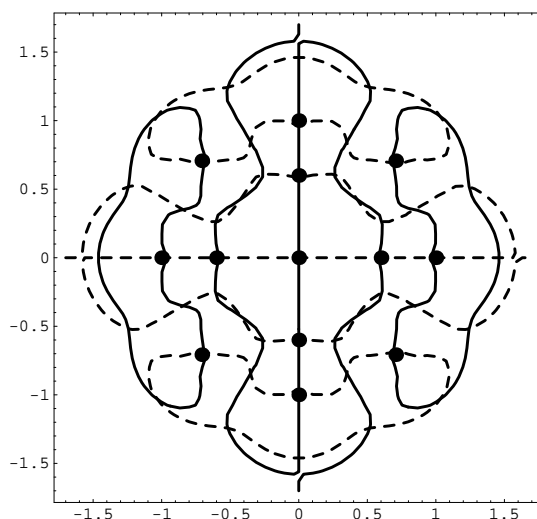


Рис. 2. Графическое решение системы (3) для двухкольцевой задачи 13-ти тел.

```
ContourStyle→{Dashing[{0.02,0.02}],Thickness[0.006]};
points = Graphics[ Join[PointSize[0.03], Point[{0, 0}],
Table[Point[{xi, yi}], {i, 1, n}]]];
Show[cpx,cpy,points,Axes→False,
DisplayFunction→$DisplayFunction]
```

Для нахождения численного значения стационарного решения для конкретных значений параметров модели используются следующие инструкции системы Mathematica (здесь x_0, y_0 – начальное приближение стационарной точки):

$$sx = \omega^2 * x - \frac{x m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$sy = \omega^2 * y - \frac{y m_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i) m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

```
sol=FindRoot[{sx==0,sy==0},{x,x0},{y,y0}, MaxIterations → 10000];
```

4 Исследование линейной устойчивости стационарных решений

Для исследования линейной устойчивости найденных стационарных решений, согласно методу Ляпунова [6,7], нужно выполнить процедуру линеаризации правых частей нормальной системы для системы дифференциальных уравнений (4), описывающей ограниченную задачу, в окрестности любой стационарной точки и вычислить собственные значения матрицы этой линеаризованной системы.

В результате линеаризации получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

где матрица A имеет вид [6]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2\omega \\ b & c & -2\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления элементов матрицы A и ее собственных значений для конкретной стационарной точки с координатами (x^*, y^*) используются следующие инструкции системы Mathematica:

$$f = \omega^2 * x - \frac{xm_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i)m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

$$g = \omega^2 * y - \frac{ym_0}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y - y_i)m_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}};$$

`a=D[f,x]/.{x->x*,y->y*};` `b=D[f,y]/.{x->x*,y->y*}`

`c=D[g,y]/.{x->x*,y->y*};`

`A={{0,0,1,0},{0,0,0,1},{a,b,0,2w},{b,c,-2w,0}};`

`ev=Eigenvalues[A];`

5 Исследование устойчивости стационарных решений по Ляпунову.

Известно, что исследование проблемы устойчивости в смысле Ляпунова положений равновесия гамильтоновых систем 4-го порядка возможно только на основании КАМ-теории [6] (теории существования условно-периодических решений многомерных гамильтоновых систем, созданной А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом и Ю.Мозером).

В ее рамках выполняются преобразования Пуанкаре-Биркгофа нормализации гамильтониана ограниченной задачи в окрестности стационарной точки и применяется теорема Арнольда-Мозера об устойчивости решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Эти достаточно громоздкие преобразования, выполненные в системе Mathematica, подробно описаны в работах [8,9,10].

При исследовании устойчивости по Ляпунову стационарных решений в случае наличия "частотных" резонансов мы использовали теоремы А.П. Маркеева, относящиеся именно к "резонансным" ситуациям и несколько «корректирующие» преобразования Пуанкаре-Биркгофа.

6 Численные исследования положений равновесия

Используя численные методы, реализованные в ССВ Mathematica, можно локально проинтегрировать дифференциальные уравнения ограниченной задачи $(n + 1)$ - тел, найденные решения записать в виде интерполяционных функций на определенных промежутках времени, а затем построить фазовые портреты исследуемых положений равновесия и оценить величину возмущений начальных координат.

На рис. 3 слева изображен график траектории точки с бесконечно малой массой с начальными малыми возмущениями от стационарного решения по координатам

(0.0001,0.0001) и по проекциям скоростей (0.0001,0.0001) для двухкольцевой ограниченной задачи $(3n+1)$ -тел ($n=4$)[10] при $0 < t < 1000$, а справа изображены отклонения этой траектории от положения равновесия.

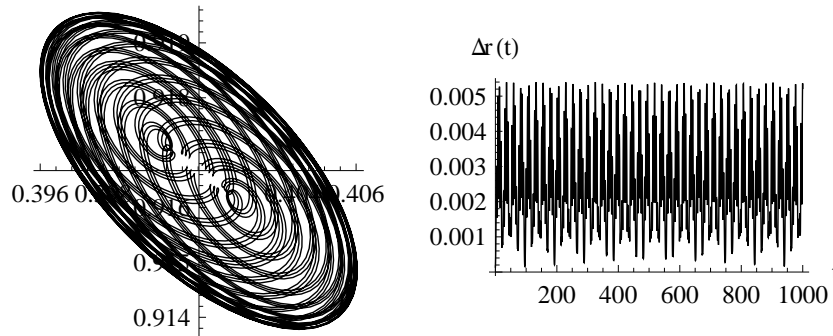


Рис. 3. Графики траектории точки и отклонения траектории точки.

Данные графики построены при помощи следующих инструкций системы Mathematica:

```


$$sx = \omega^2 * x[t] - \frac{x[t]m_0}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{(x[t] - x_i)m_i}{((x[t] - x_i)^2 + (y[t] - y_i)^2)^{3/2}};$$


$$sy = \omega^2 * y[t] - \frac{y[t]m_0}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{(y[t] - y_i)}{((x[t] - x_i)^2 + (y[t] - y_i)^2)^{3/2}};$$

sol=NDSolve; [{ x''[t]-2\omega y'[t] == sx, x[0] == x* + 0.0001,
x'[0] == 0.0001, y''[t] + 2\omega x[t] == s[y], y[0] == y* + 0.0001,
y'[0] == 0.0001 }, {x, y}, {t, 0, 1000}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol],{t,0,1000}, AxesOrigin->{x*,y*},
AspectRatio -> 1]
Plot[Evaluate[((x[t] - x*)^2 + (y[t] - y*)^2)^{1/2} /. r1], {t, 0, 1000},
AxesLabel->{"t " "\Delta r(t)"}]

```

7 Анимация графической информации

Существенную помощь в понимании механизма движения могут оказать "визуалистические" и анимационные возможности системы Mathematica, позволяющие наблюдать движение бесконечно малой массы в динамике, как функцию времени. Процедуры для анимации графической информации, написанные в среде Mathematica, подробно представлены в работе [11].

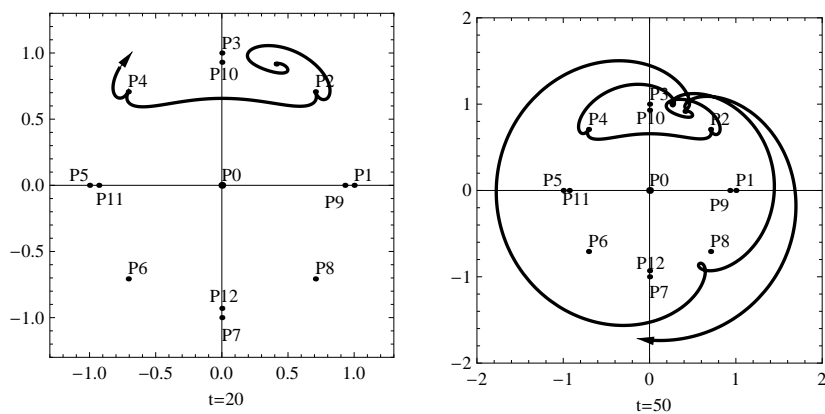


Рис. 4. График движения неустойчивой стационарной точки двухкольцевой ограниченной задачи $(3n+1)$ -тел ($n=4$) для двух моментов времени.

Список литературы

1. Абалакин В.К., Аксенов В.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. –М.: Наука, 1976. –864 с.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. –М.: Наука, 1971.
3. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. –М.: Наука, 1967. –512с.
4. Гребеников Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел. //Мат.моделирование. –Москва, 1998. № 8(10). –С. 75-80.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. –М.: СОЛОН-Пресс, 2004. –696с.
6. Гребеников Е.А., Козак-Сковородкин Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. –М.: РУДН, 2002.–209с.
7. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. –Харьков: Изд-во Харьковского математического общества, 1892.
8. Диарова Д. М. Гомографические решения ньютоновой проблемы многих тел. –М.: РУДН, 2013. –234с.
9. Земцова Н.И. Качественные исследования ньютоновой проблемы многих тел методами компьютерной алгебры. Препринт. –М.: Изд-во ВЦ РАН, 2010. –61с.
10. Диарова Д.М., Земцова Н.И. Нормализация квадратичной формы гамильтониана ограниченной задачи шести тел. //Труды 3-й Межд.научной конференции "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения". –Минск: Изд.центр БГУ, 2012. С.117-122.
11. Гребеников Е.А., Гадамский Л., Н.И.Земцова Н.И., Якубяк М. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел. Препринт. –М.: Изд-во ВЦ РАН, 2006. –45с.

Математическое Моделирование переноса нефтяной пленки на поверхности моря

А.Ж. Жайнаков¹, А.К. Хикметов² и К.К. Каржаубаев²

¹ Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызстан

² Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
jainakov-41@mail.ru, askar.khikmetov@kaznu.kz, kairzhan.k@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрено математическое моделирование переноса нефтяной пленки на поверхности моря с учетом метеорологических условий. Нефтяная пленка является многокомпонентной, для каждой из которых учтены процессы деградации и испарения на основе физико-химических свойств компонент. Теоритическую основу математических моделей составляют уравнения гидродинамики моря, уравнения переноса и трансформации концентрации. Численное моделирование проводилось на разнесенной сетке со вторым порядком точности по пространству и первым по времени. Как показывают численные расчеты, распространение нефтяного пятна на поверхности моря сильно зависит от силы, направления и скорости движения танкера.

Ключевые слова: Каспийское море, нефтяное загрязнение, математическая модель.

1 Введение

Источники загрязнения Каспия многообразны и расположены на территории всех Прикаспийских государств, включая их морские акватории. Большую потенциальную угрозу для Каспия из-за подъёма уровня моря представляют законсервированные нефтяные скважины и прибрежные нефтепромыслы, аварии на разведочных скважинах и транспортных средствах, а также трансграничный перенос загрязняющих веществ (металлов, нефтепродуктов и т.д.) по рекам Волга, Урал и др.

Северный Каспий занимает всего 0,5% от общего объема воды в море. В результате интенсификации процессов освоения углеводородного сырья, как в прибрежной, так и в шельфовой зоне, море подвергается загрязнению нефтепродуктами и сопутствующим им токсикантами. Кроме того, Каспийское море принимает стоки рек, несущих с собой различные загрязняющие вещества. Всё это определяет повышенный уровень антропогенной загрязненности моря. Как известно, нефтяная отрасль по глубине и многообразию негативных воздействий на окружающую среду превосходит все другие отрасли топливно-энергетического комплекса. Наиболее ощутимо эти воздействия проявляются в условиях добычи, подготовки, переработки и транспорта углеводородного сырья и нефтепродуктов [1,2,3].

Главным загрязнителем моря, безусловно, является нефть. Нефтяные загрязнения подавляют развитие фитобентоса и фитопланктона Каспия, представленных сине-зелеными и диатомовыми водорослями, снижают выработку кислорода. Увеличение загрязнения отрицательно сказывается и на тепло-, газо-, влагообмене между водной поверхностью и атмосферой. Из-за распространения на значительных площадях нефтяной пленки скорость испарения снижается в несколько раз. Загрязнение Каспийского моря ведёт к гибели огромного числа редких рыб и других живых организмов. Наиболее наглядно влияние нефтяного загрязнения видно на водоплавающих птицах.

При прогнозировании возможных изменений режима моря и их экологических систем под влиянием антропогенных воздействий, в последнее время успешно используются методы математического моделирования. Однако до настоящего времени нет обобщающих

работ, в которых достаточно подробно освещались бы как особенности динамических процессов в морях, так и используемые для их описаний математические модели.

Теоретическую основу математических моделей составляют уравнения гидродинамики моря, уравнения переноса и трансформации концентрации. Необходимо отметить, что подобные модели существенно нелинейны и нестационарны. Преднамеренное и естественное воздействие человека на окружающую среду приводит к заданию дополнительных возмущений, влияющих на формирование исследуемых процессов. При математическом моделировании процессов распространения примесей очень важным этапом является разработка и выбор соответствующего вычислительного алгоритма и аппроксимации уравнения переноса.

2 Математическая модель

При изучении распространения в природных средах таких загрязнителей антропогенного происхождения, как химические отходы промышленных предприятий и сельского хозяйства, широко используются математические модели и численные эксперименты на ЭВМ. В водоемах-охладителях пространственное изменение температуры невелико (не превышает 200). Соответствующее изменение плотности намного меньше самой величины плотности воды. Поэтому стратифицированное течение в водоеме можно описывать уравнениями в приближении Буссинеска, т.е. в уравнениях движения переменную величину плотности воды можно заменить некоторым постоянным ее значением везде, за исключением членов, представляющих архимедову силу. Для большинства водоемов суши вертикальный размер водоема значительно меньше характерных горизонтальных размеров. Поэтому течение в водоеме можно рассматривать как течение в мелководном бассейне. С учетом этих обстоятельств распределение давления по вертикали в таких водоемах можно принять гидростатическим, так как вертикальная составляющая ускорения будет намного меньше ускорения силы тяжести, тогда систему уравнений описывающую динамику водоема записать в виде:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_1}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \overline{u_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \overline{u_1 u_3} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_2}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \overline{u_1 u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \overline{u_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \overline{u_2 u_3} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -g\rho, \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \rho = \rho_0 (T - T_0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_1} - \overline{u_1 t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_2} - \overline{u_2 t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_3} - \overline{u_3 t} \right) \quad (4)$$

Если предположить, что отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного горизонтального положения незначительно в сравнении с глубиной, тогда исключив давление из динамических уравнений (1-4) их можно представить в виде:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_1}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \overline{u_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \overline{u_1 u_3} \right) - g \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \int_{x_3}^{z_0} \rho dx_3 \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_2}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \overline{u_1 u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \overline{u_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \overline{u_1 u_3} \right) - g \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \int_{x_3}^z \rho dx_3 \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \rho - \rho_0 = \beta \rho_0 (T - T_0) \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_1} - \overline{u_1 t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_2} - \overline{u_2 t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_3} - \overline{u_3 t} \right) \quad (8)$$

Уравнения (5-8) после их замыкания какими-либо полуэмпирическими соотношениями, следует дополнить граничными условиями. Если на поверхности и боковых стенках они более или менее очевидны, то для развитого турбулентного течения над шероховатой поверхностью не существует общепринятого способа задания условий для продольной составляющей скорости на твердой поверхности. Наиболее распространенным является условие скольжения, записанные в виде [4,5]:

$$\nu_T \frac{dU}{dx_3} - K_b |U| U = 0 \quad (9)$$

вывод, которого дан Квоном. Здесь - ν_T коэффициент турбулентной вязкости, $K_b=0.014$ – эмпирическая постоянная.

Перенос нефтяной пленки на поверхности моря моделируется уравнением конвекции:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (U_1 S)}{\partial x_1} + \frac{\partial (U_2 S)}{\partial x_2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = 0, n \in z_b \quad (11)$$

Наличие на поверхности моря пленки нефти может существенно изменить гидродинамические характеристики свободной поверхности моря. Дело в том, что при изменении формы поверхности, сопровождающем движение жидкости, происходит растяжение или сжатие пленки, т.е. изменение поверхностной концентрации вещества. Эти изменения приводят к появлению дополнительных сил, которые и должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности жидкости.

Мы ограничимся здесь рассмотрением нефтяной пленкой, которую можно считать нерастворимой в морской воде. Это значит, что нефтяная пленка находится только у поверхности и не проникает вглубь морской воды. Если же нефтяная пленка обладала бы некоторой заметной растворимостью, то необходимо было бы принять во внимание процессы диффузии между нефтяной пленкой и объемом морской воды.

3 Численное решение

Численное моделирование проводилось для Кашаганской нефти, физико-химические параметры которой представлены в таблице 1.

Для численного решения задачи (5-11) используется метод расщепления по физическим параметрам в комбинации метода дробных шагов по пространственным переменным [6,7,8]. Дискретизация отдельных членов уравнения (10) проводится с помощью конечно-разностных выражений, центрированных относительно точки сетки $(i + \frac{1}{2}, j)$. Для аппроксимации конвективных членов применяется производная против потока повышенного порядка точности.

4 Результаты

Построенная математическая модель позволяет рассчитать и произвести оценку ареала, определения траекторий миграций нефтяного пятна на поверхности по акватории Каспийского моря с учетом: объемов разлитой нефти, свойств фракций нефти и метеорологических условий.

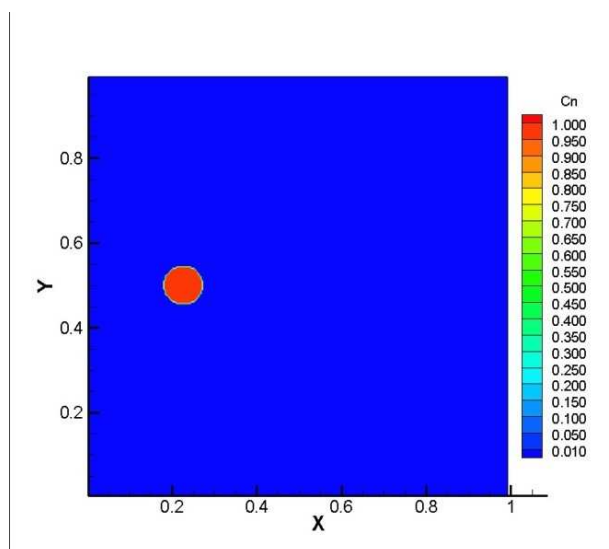


Рис. 1. Нефтяное пятно в начальный момент времени

На рисунках 1-4 показана динамика распространения и испарения нефтяного пятна. На рисунках 2,3 показано покомпонентное изменение концентрации нефти в результате испарения. Видно, что сначала испаряются компоненты легкой фракции. Данный результат также очень важен, для экологов, стремящихся оценить ущерб не только для водной среды, но и для атмосферы, поскольку, на основе произведенных вычислений, можно определить

испаряющиеся компоненты нефти и дать объективную оценку загрязнения окружающей среды вблизи разлива нефти.

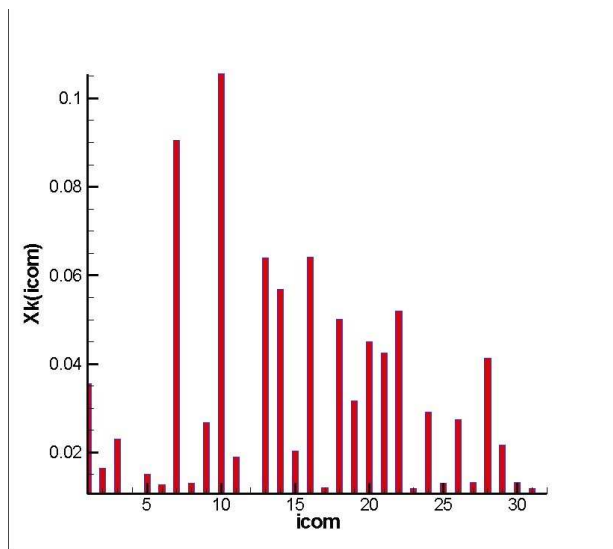


Рис. 2. Покомпонентное распределение концентрации нефти в начальный момент времени

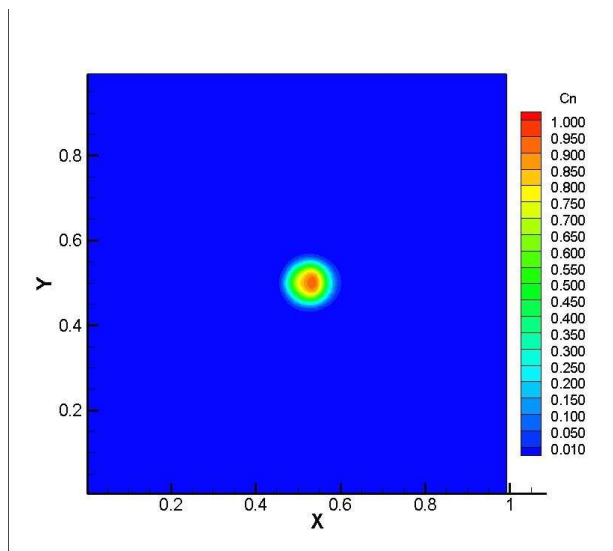


Рис. 3. Нефтяное пятно через 3 часа после разлива

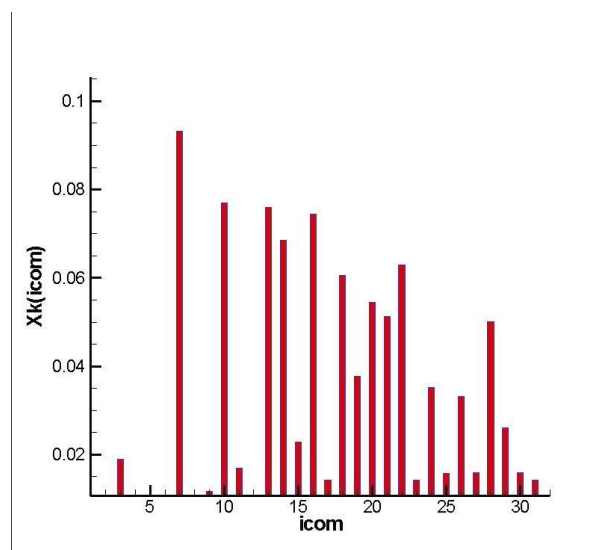


Рис. 4. Покомпонентное распределение концентрации нефти через 3 часа после разлива, скорость ветра 1 м/с

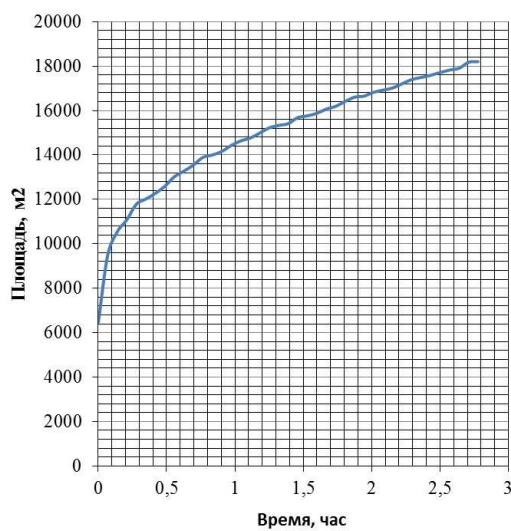


Рис. 5. Изменение площади нефтяного пятна, скорость ветра 1 м/с

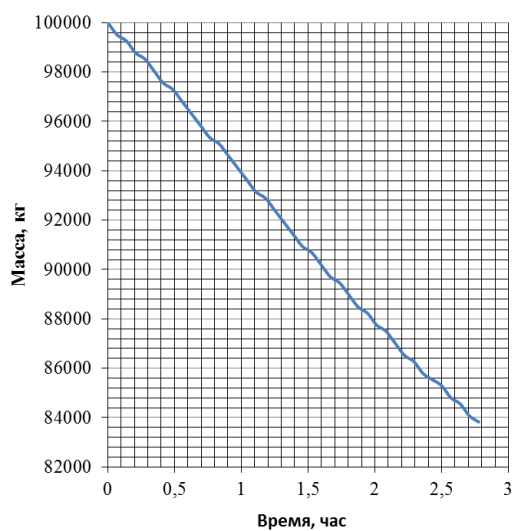


Рис. 6. Изменение массы нефти в результате испарения, скорость ветра 1 м/с

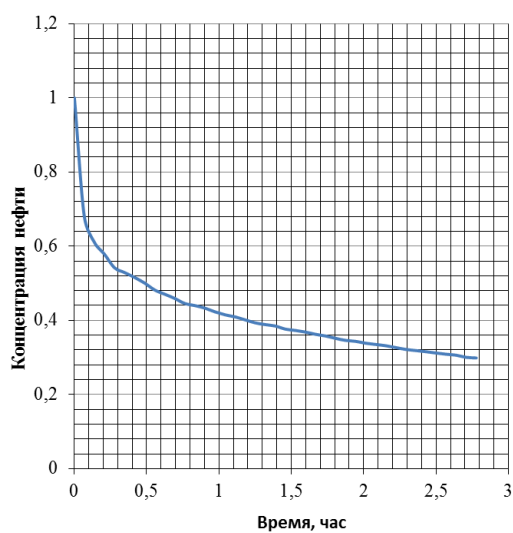


Рис. 7. Изменение концентрации нефти в результате испарения, скорость ветра 1 м/с

Таблица 1. Физико-Химические свойства Кашаганской нефти

N	Название	Брутто формула	Молярная масса г/моль	Плотность г/мл. (20 С)	T плавления, С
1	1,3-диметилбензол	C ₈ H ₁₀	106.165001	0.864	-47.872
2	1-этил-2-метилбензол	C ₉ H ₁₂	120.191597	0.884	-17
3	1,2,3-триметилбензол	C ₉ H ₁₂	120.191597	0.894	-25.375
4	2-этил-1,1-диметилциклопентан	C ₉ H ₁₈	126.2392	0.766	-43.94
5	2-метилоктан	C ₉ H ₂₀	128.255096	0.723	-80.1
6	3-метилоктан	C ₉ H ₂₀	128.255096	0.720	-107.6
7	нонан	C ₉ H ₂₀	128.255096	0.717	-53.519
8	1,1,2,3-тетраметилциклогексан	C ₁₀ H ₂₀	140.265793	0.759	-36.93
9	2,6-диметилоктан	C ₁₀ H ₂₂	142.281693	0.732	-66.87
10	декан	C ₁₀ H ₂₂	142.281693	0.730	-29.673
11	4-метилдекан	C ₁₁ H ₂₄	156.308304	0.743	-43.52
12	3-метилдекан	C ₁₁ H ₂₄	156.308304	0.743	-43.52
13	ундекан	C ₁₁ H ₂₄	156.308304	0.740	-25.5
14	додекан	C ₁₂ H ₂₆	170.334793	0.748	-9.57
15	2,6-диметилундекан	C ₁₃ H ₂₈	184.361404	0.756	-31.4
16	тридекан	C ₁₃ H ₂₈	184.361404	0.756	-5.4
17	7-метилтридекан	C ₁₄ H ₃₀	198.388	0.763	-9.33
18	тетрадекан	C ₁₄ H ₃₀	198.388	0.765	5.863
19	2,6,10-триметилдодекан	C ₁₅ H ₃₂	212.414597	0.766	-19.8
20	пентадекан	C ₁₅ H ₃₂	212.414597	0.768	9.95
21	гексадекан	C ₁₆ H ₃₄	226.441193	0.773	18.1
22	гептадекан	C ₁₇ H ₃₆	240.467697	0.778	22
23	2,6,10-триметилпентадекан	C ₁₈ H ₃₈	254.494293	0.779	12.1
24	октадекан	C ₁₈ H ₃₈	254.494293	0.776	28.2
25	2,6,10,14-тетраметилпентадекан	C ₁₉ H ₄₀	268.520905	0.8	12.1
26	нонадекан	C ₁₉ H ₄₀	268.520905	0.7855	31.8
27	2,6,10,14-тетраметилгексадекан	C ₂₀ H ₄₂	282.547485	0.784	22.1
28	генийкозан	C ₂₁ H ₄₄ CH ₃	296.574097	0.79174	0.535
29	тетракозан	C ₂₄ H ₅₀ CH ₃	338.653809	0.79915	0.439
30	пентакозан	C ₂₅ H ₅₂ CH ₃	352.680389	0.80125	3.739

Данные рисунки хорошо иллюстрируют испарение нефти с поверхности моря. Здесь четко видно, что происходит изменение концентрации легкой фракции нефти, тем самым увеличивается доля тяжелой фракции, а с увеличением концентрации высоковязких компонентов процесс испарения замедляется. Нельзя не отметить, преимущество разработанной математической модели и алгоритма ее реализации, потому что в каждый момент времени, на основе произведенных расчетов, можно дать информацию о составе нефти по каждому ее компоненту, а также пронаблюдать процесс увеличения вязкости нефти.

Как показывают расчеты, распространение нефтяного пятна на поверхности сильно зависит от силы, направления ветра и скорости движения танкера. Результаты моделирования также показали, что поступление вод прибрежных рек не оказывает влияния на распространение и миграцию нефтяного пятна на море. Аналогично показанному выше результату, ниже, на рисунках 5-7 показано изменение площади, массы и концентрации разлитой нефти, при скорости ветра 1 м/с.

5 Заключение

На основе уравнений гидродинамики моря была построена математическая модель переноса нефтяного пятна на поверхности моря, состоящая из уравнений движения, неразрывности и переноса нефтяного пятна. В рассматриваемых задачах нефтяная пленка, которая считается нерастворимой в самой жидкости, т.е. вещество находится только у поверхности и не проникает в глубь жидкости. При этом нефтяная пленка считается несжимаемой. Для решения уравнения движения применяется метод расщепления по физическим параметрам. На первом этапе находятся компоненты скорости методом дробных шагов, а уравнение колебания свободной поверхности и уравнение для переноса нефтяного пятна решается матричной прогонкой. Был проведен численный эксперимент переноса пленки нефти на поверхности движущейся жидкости. Корректно сформулированы и поставлены начальные и граничные условия задачи для модели процесса переноса нефтяного пятна с учетом режимных параметров основного потока и метеорологических условий.

Преимущество разработанной математической модели и алгоритма ее реализации в том что, на основе произведенных расчетов, можно дать информацию о составе нефти по каждому ее компоненту, а также пронаблюдать процесс увеличения вязкости нефти. С той целью, чтобы показать универсальность разработанной модели для указанного процесса, произведен комплексный расчет для различных скоростей и направлений ветра. Это позволяет исследователям, занимающимся оценкой экологического ущерба, определив нужное направление и скорость ветра, получить самый объективный результат процесса распространения на поверхности водной среды.

Список литературы

1. Самойлов Н.А., Консейсао А.А. Математическое моделирование испаряемости нефти и нефтепродуктов при их аварийных разливах // Известия Самарского научного центра РАН, Самара, 2010, –№1 (9). –С. 2251–2254.
2. Джексонов М.К. Меры, принимаемые республикой Казахстан по охране окружающей среды Каспийского моря // Вестник КазНТУ, – Алматы, 2010, –№ 1(77), – С. 12–15.
3. Кузьмина Е.М. Политико-экологические проблемы освоения шельфа Каспия. // Сб. трудов Межд. научно-практ. конф. «Эколого-экономические проблемы освоения Каспийского шельфа», 2006, – С. 19–25.
4. Саркисян А.С. Численный анализ и прогноз морских течений. –Л.: Гидрометеиздат, 1977. –181 с.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982. –320 с.

6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. –Новосибирск: Наука, 1967. –196 с.
7. Ferziger J.H., Peric M., Computational Fluid Dynamics, 3rd Edition. Springer, 2001.
8. Stone H.L., Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. SIAM J. Numer. Anal., 5, 1968, p 530–558.

Задачи уравнения переноса и ядерно-геофизические технологии

А.И. Хисамутдинов

Институт нефтегазовой геологии им. А.А. Трофимука, Новосибирск, Россия
KhisamutdinovAI@ipgg.sbras.ru

Аннотация. В настоящем докладе рассматриваются задачи уравнения переноса, связанные с ядерно-геофизическими технологиями. Основное внимание уделено проблемам восстановления параметров по данным измерений. Дается некоторый обзор современного состояния. Приводятся новые результаты по развитию подхода и методов "последовательные приближения по характерным взаимодействиям".

Ключевые слова: Уравнение переноса, ядерно-геофизические технологии, восстановление параметров, интерпретация данных измерений, численные методы

1 Введение

Уравнение переноса применяют для описания физико-кинетических процессов распространения частиц в различных средах; в том числе, в физике реакторов, в астрофизике и атмосферной оптике, в ядерно-геофизических технологиях изучения горных пород и нефте-газоносных пластов, а также при исследовании поверхностей планет. В настоящем докладе рассматриваются обратные задачи уравнения переноса, связанные с ядерно-геофизическими технологиями (ЯГТ). Нельзя не отметить, что последние входят в обязательный комплекс «геофизического исследования скважин», что гамма-гамма метод использовался при восстановлении плотности поверхностного слоя Луны и что численные решения задач об ЯГТ ориентированы на суперкомпьютеры.

В работе речь идет о постановке обратных задач уравнения переноса и численных методах их решения, о восстановлении параметров коэффициентов этого уравнения по данным измерений функционалов от потоков частиц и об определении соответствующих параметров горной породы, используя ядерно-геофизические технологии. Основное внимание уделяется развитию подхода и метода «последовательные приближения по характерным взаимодействиям», сформулированного автором ранее в [23], [31],[24]. Проблема конструирования математической, или компьютерной, инверсии является актуальной как для многих проблем переноса частиц, так и других разделов науки, и итерационные методы — один из путей её решения (см., напр., [15], [9],[6], [10], [16], [12], [7]).

Для уравнения переноса в различных областях его приложения изучают разного типа обратные задачи (см., напр., [10], [16], [11], [32], [4], [2]). Методы "последовательные приближения по характерным взаимодействиям" (ППХВ) развивались в связи с ядерно-геофизическими технологиями: нейтрон-активационным каротажем, рентген-флуоресцентным анализом, импульсным нейтрон-гамма каротажем [19,20,29,21,30]. Для ядерно-геофизических применений типичны высокая размерность, зависимость сечений взаимодействий от энергий, многоэлементный состав сред. Всё это создаёт трудности для анализа и решения не только обратных, но и "прямых" задач.

При геофизическом исследовании скважин, как правило, восстанавливают параметры горной породы и ее флюидов, параметры скважинных флюидов и некоторые другие (см., напр., [17,13,18]). Аналогично, речь идет о восстановлении параметров горной породы и при

различных лабораторных ядерно-геофизических методах или исследовании поверхностных слоёв других планет. В условиях, когда сложна строгая математическая интерпретация, существуют и получают развитие приближенные подходы к проблеме интерпретации данных. Исторически одним из первых являлся подход на основе приближенного рассмотрения процессов переноса уравнениями диффузионного типа. Длина замедления, диффузионная длина, время жизни — вот характерные интегральные параметры горных пород, подлежащие восстановлению. Конечно, эти параметры являлись промежуточными на пути к истинным петрофизическим, к содержаниям элементов, минералов, окислов и т.д. Иногда для инверсии используют синтетический подход, в котором объединяют какие-либо приближения к процессу переноса и зависимости показаний от параметров, полученные как экспериментально, так и посредством вычислений методами Монте-Карло (см., напр., [26,33]). Иного типа приближенный подход к инверсии, имеющий непосредственное отношение к импульсному нейтрон-гамма каротажу, развивался во многих работах, включая публикации [28,27]. В этом подходе энергетический спектр γ -квантов приближается линейной комбинацией стандартных моноэлементных спектров, которые получены лабораторными измерениями. Коэффициенты линейной комбинации, yields, подлежат определению. Yields являются величинами, аналогичными коэффициентам регрессии в линейных моделях математической статистики, в задачах множественной линейной регрессии (см., напр., [5]). Они являются "промежуточными" параметрами; поэтому, далее, отношения различных yields связываются с отношениями соответствующих концентраций элементов-стандартов. Функциональная зависимость между отношениями концентраций и коэффициентов (yields) получается эмпирически на основе лабораторных измерений. Достоинством подхода является возможность приближенно оценивать состав горной породы в "реальном времени" движения каротажного прибора. В отличие от вышеизложенного в нашем подходе мы основываемся на (точном) уравнении переноса. Более того, поскольку в известном смысле оно вторично по отношению к определённому типу марковским скачкообразным процессам и цепям Маркова, то используем этот фундаментальный факт. Проблема определения параметров коэффициентов уравнения переноса эквивалентна задаче об определении этих же параметров, входящих в те или иные распределения указанных марковских процесса или цепи. Возможна трактовка рассматриваемого здесь как задач восстановления параметров соответствующих марковских процесса или цепи по некоторым заданным "измерениям", включая измерения тех или иных математических ожиданий; то есть мы можем трактовать изучаемое как некоторые проблемы математической статистики. И мы используем эту эквивалентность, а именно, прежде всего, свойство аддитивности, производя необходимые разбиения в пространстве траекторий частиц, выделяя подмножества "характерных траекторий" и представляя математические ожидания как сумму соответствующих слагаемых.

Первый шаг в излагаемом подходе состоит в выборе и назначении неизвестных параметров. В качестве таковых рассматриваем (числовые) плотности атомов или других частиц, которые участвуют в «характерных взаимодействиях». Они являются истинными неизвестными, и при наличии взаимно-однозначных соответствий через них выражаются другие параметры. Мы развиваем подход и методы ППХВ, выделяя, как и ранее, помимо характерных взаимодействий, также множества характерных траекторий и вводя матрицу характерных взаимодействий. Отметим, что в реалистичных численных экспериментах, сопровождающих развитие подхода, на каждом итерационном шаге с использованием методов Монте-Карло решаются сопутствующие прямые задачи.

2 Обозначения, модель среды и сечения взаимодействий

2.1 Терминология, уравнения переноса

Пусть (см., напр., [8,18]) $(X) = R^3 \otimes (S_1) \otimes [0, \infty)$ – фазовое пространство координат, направлений и энергий, где (S_1) – сфера радиуса 1, и $x \equiv (r, \Omega, E) \in X$. Как $v = v(E)$ обозначаем скорости частиц, $v = |v|\Omega$. Всюду далее, где возможно, сохраняем обозначения из [23], [31], [24]; и также, как в них, группируем изучаемые задачи в форме проблем 1 и 2, или задач 1 и 2.

Обозначим:

(V_G) – пространственная область, в которой рассматривается перенос частиц, $(V_G) \subset R^3$; в случае, в котором (V_G) не совпадает со всем пространством и является лишь его частью, мы предполагаем, что эта область выпуклая и что её граница (∂V_G) является кусочно-гладкой, такой, что нормаль к ней существует почти всюду;

$(G) = (V_G) \otimes (S_1) \otimes [0, \infty)$, $(G) \subset (X)$;

(V) – подобласть в (V_G) , вещественный состав которой подлежит определению; $(V) \subset (V_G)$;

$q_{in}(t, x), q_0(t, x)$ – плотности заданных источников частиц соответственно в 1-й и 2-й проблемах; предполагается, что по пространственной переменной r эти плотности отличны от 0 лишь в некоторых ограниченных подобластях в (V_G) ;

$\phi_{in}(t, x)$ и $\phi(t, x)$ – фазовые плотности частиц соответственно начального и конечного типов в 1-й задаче; во второй задаче $\phi(t, x)$ есть фазовая плотность частиц; $\Phi_{in}(t, x) \equiv |v|\phi_{in}(t, x)$, $\Phi(t, x) \equiv |v|\phi(t, x)$ – плотности (скалярных) потоков частиц;

$\Sigma_{in}(x)$ и $\Sigma(x)$, \hat{S}_{in}^+ и \hat{S}^+ – полные макроскопические сечения взаимодействий и линейные интегральные операторы рассеяния соответственно для частиц начального и конечного (основного) типов в 1-й проблеме; в проблеме 2 $\Sigma(x)$ и \hat{S}^+ есть соответственно полное макроскопическое сечение взаимодействия и линейный интегральный оператор рассеяния;

\hat{Q}^+ – линейный интегральный оператор в проблеме 1, описывающий появление (рождение) частиц основного типа в результате взаимодействия частиц начального типа со средой, $q(t, x) \equiv [\hat{Q}^+ \Phi_{in}](t, x)$ – плотности источников частиц основного типа (в проблеме 1),

$I_i \equiv \int |v|\phi(t, x) \mathcal{E}_i(t, x) dt dx$, $i = 1, \dots, N_M$, – заданные линейные функционалы от $\Phi(\cdot) = |v|\phi(\cdot)$, $N_M < \infty$; $\mathcal{E}_i(\cdot, \cdot)$ – весовые функции, характеризующие прибор.

Сразу условимся, что если область интегрирования не указывается, что уже было выше, то она совпадает со всей областью интегрирования. Для операторов \hat{S}_{in}^+ , \hat{S}^+ и \hat{Q}^+ пространственная переменная $r \in R^3$ является параметром; через \hat{S}_{in} , \hat{S} и \hat{Q} обозначим интегральные операторы, сопряженные соответственно к \hat{S}_{in}^+ , \hat{S}^+ и \hat{Q}^+ . Каждая пара операторов задается соответствующим ядром, а именно, посредством макроскопических дифференциальных сечений взаимодействий: $S_{in}(\Omega, E \rightarrow \Omega', E'|r)$, $S(\Omega, E \rightarrow \Omega', E'|r)$ и посредством функции $Q(\Omega, E \rightarrow \Omega', E'|r)$. Считаем, что все три ядра являются обобщенными плотностями по второй паре переменных (по Ω', E') и измеримыми функциями по первой паре (по Ω, E). Мы рассматриваем случай "неразмножающихся" сред в (G) и считается, что $\int q_{in}(t, x) dx dt = 1$, $\int q_0(t, x) dx dt = 1$ и что $\forall x \in (G) \quad 0 \leq \Sigma_{in}(x) < C_\Sigma$, $0 \leq \Sigma(x) < C_\Sigma$, $C_\Sigma < \infty$; также считается, что $[\hat{Q} \cdot 1](x) < C_Q < \infty$. Заметим, что макроскопические интегральные сечения рассеяний $[\hat{S}_{in} \cdot 1](x)$ и $[\hat{S} \cdot 1](x)$ являются слагаемыми полных сечений $\Sigma_{in}(x)$ и $\Sigma(x)$ соответственно. В проблеме 1 при рождении частицы конечного типа частица-родитель либо поглощается, либо выживает (рассеивается), изменяя энергию и направление. Макроскопические сечения этих взаимодействий являются частями (слагаемыми) сечений $\Sigma_{in}(\cdot)$ и $[\hat{S}_{in} \cdot 1](\cdot)$ соответственно. Например, рождение γ -кванта возможно как при неупругом рассеянии нейтрона, так и при радиационном захвате (поглощении) последнего.

В обеих проблемах перенос частиц рассматривается в области (G) в интервале времен $[0, +\infty)$; $(t, x) \in [0, +\infty) \otimes (G)$. В 1-й задаче система уравнений переноса в интегро-дифференциальной форме есть

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial t} + (v, \nabla \phi_{in}) + \Sigma_{in} \Phi_{in} = \hat{S}_{in}^+ \Phi_{in} + q_{in}, & \Phi_{in} \equiv |v| \phi_{in}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v, \nabla \Phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^+ \Phi + \hat{Q}^+ \Phi_{in}, & \Phi \equiv |v| \phi. \end{cases} \quad (1)$$

Интегро-дифференциальное уравнение для 2-й задачи есть

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (v, \nabla \phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^+ \Phi + q_0, \quad \Phi \equiv |v| \phi. \quad (2)$$

В обеих проблемах считаются заданными начальными условия. Причем в задаче 1 считаем начальную фазовую плотность $\phi(t, x)|_{t=0}$ тождественно равной нулю. Если (G) не совпадает с (X) , то в обеих задачах, т. е. для (1) и (2), на границе (∂V_G) считаются поставленными стандартные "нулевые" граничные условия (отсутствия потока частиц извне). В случае неограниченной среды рассматриваются решения уравнений переноса, "стремящиеся" к 0 при $|r| \rightarrow \infty$. В обеих проблемах мы рассматриваем обобщенные решения соответствующих задач системы (1) и уравнения (2), которые даются интегральной формой соответственно для системы (1) и уравнения (2). В случае, если (V_G) не совпадает с R^3 , с целью учета граничных условий для интегральной формы уравнений считается, что пространственная среда вне (V_G) заполнена абсолютно поглощающим веществом, макроскопическое сечение которого также не превышает постоянной C_Σ . Наконец, предполагается, что вероятность события "не менее чем j_0 последовательных рассеяний частицы" является величиной, строго отделенной от 1 п.н.; здесь j_0 есть некоторое заданное натуральное число. Говоря «частица», имеем в виду таковые как в проблеме 2, так и любую из двух типов в проблеме 1. При данных предположениях поставленные задачи для (1) и (2) разрешимы единственным образом, и соответствующие решения могут быть записаны в форме ряда Неймана. Мы рассматриваем все фазовые плотности принадлежащими множеству обобщенных плотностей конечных мер. Интегральные уравнения, о которых говорилось выше, записаны в тех же обозначениях, что и в данной работе, в [23], [31]; поэтому здесь мы их не приводим.

Все весовые функции \mathcal{E} в настоящей работе считаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями и такими, что все линейные функционалы I существуют и однозначно определены. Предполагаем, что носители плотностей q_{in} в первой проблеме и q_0 во второй не пересекаются с носителями функций \mathcal{E} . Наряду с функционалами I , которые являются также соответствующими средними по траекториям частиц, считаем заданной некоторую последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{N_M}$ непрерывных функций от искомым параметров. Предполагаем, что $\forall i$ модули этих функций являются отделёнными от 0 и ограниченными сверху. Например, в качестве z могут фигурировать линейные функционалы от Φ и какие-либо математические ожидания по траекториям частиц.

В настоящей работе мы интересуемся определением коэффициентов системы (1) и уравнения (2), а именно, макроскопических сечений взаимодействий для x таких, что $r \in (V)$; более точно, — мы интересуемся восстановлением некоторой совокупности N параметров, о которых уже говорилось как о плотностях частиц в характерных взаимодействиях и которые входят в эти сечения. Вышеуказанные коэффициенты для $r \in (V)$ восстанавливаются по заданной совокупности $\{d_i\}_{i=1}^{N_M}$ N_M измерений, или наблюдений, значений последовательности $\{J_1, \dots, J_{N_M}\}$ непрерывных функций от искомым параметров, где $J_i = I_i/z_i$, $i = \overline{1, N_M}$. $N \leq N_M$. Детально эти N параметров будут определены в следующем разделе. Обозначим: $(G_V) \equiv (V) \otimes (S_1) \otimes [0, +\infty)$, d и J — столбцы данных измерений и теоретических выражений (записей) для этих измерений как функций от пара-

метров; $d \equiv (d_1, \dots, d_{N_M})^T$, $J \equiv (J_1, \dots, J_{N_M})^T$. Обозначим также: $I \equiv (I_1, \dots, I_{N_M})^T$, $z \equiv (z_1, \dots, z_{N_M})^T$.

2.2 Модель вещественного состава области (V)

С физической точки зрения мы интересуемся, вообще говоря, вещественным составом области (V). Ограничиваемся здесь случаем, когда (V) есть однородная среда и состоит из набора K компонент с объемными долями α_k , $k = 1, \dots, K$. В качестве компонент могут рассматриваться как минералы с заданными химическими составами, так и отдельные химические элементы. Обозначим как α столбец высоты K , элементами которого являются объемные доли α_k , $k = 1, \dots, K$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$. Пусть

$$A\alpha = \lambda, \quad (3)$$

где $A - (K - N) \times K$ матрица, а $\lambda -$ столбец высоты $K - N$,

есть заданная система $K - N$ линейных уравнений связи на компоненты α ; $K - N \geq 1$. Пусть, далее,

$$A_{neq}\alpha < \lambda_{neq} \quad (4)$$

есть заданная система конечного числа K_{neq} линейных неравенств на компоненты α , где A_{neq} и λ_{neq} — некоторые $K_{neq} \times K$ матрица и столбец высоты K_{neq} , соответственно. Считаем, что столбцы α принадлежат области \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \equiv \{\alpha : \alpha \in R^K, \quad A_{neq}\alpha < \lambda_{neq}, \quad A\alpha = \lambda\}, \quad \mathcal{A} \subset R^K. \quad (5)$$

Как первое в системе (3) всегда фигурирует уравнение

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1. \quad (6)$$

В системе неравенств (4) в качестве первых всегда рассматриваем K неравенств

$$\alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, K}; \quad K \leq K_{neq}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что вследствие (6) — (7)

$$\forall k \in \overline{1, K} : 0 < \alpha_k < 1.$$

Далее, заключаем, что \mathcal{A} есть выпуклая ограниченная область; $\mathcal{A} \subset (0, 1)^K \subset R^K$.

Пусть ρ_j , $j = \overline{1, N_e}$, — числовые плотности (или объемные концентрации в $1/m^3$) всех химических элементов, содержащихся в (V). Величины ρ полностью определяются значениями столбца α , являясь соответствующими линейными комбинациями его компонент α_k , $k = \overline{1, K}$. Список химических элементов $[1, \dots, N_e]$ мы разбиваем на два подсписка: $[1, \dots, N]$ и $[(N + 1), \dots, N_e]$. В первой проблеме подсписк 1 составляют все те элементы, на которых происходят взаимодействия, в процессе которых генерируются частицы конечного (второго) типа. В проблеме 2 подсписк 1 составляют элементы, на которых имеют место рассеяния заданного выделенного типа. В проблеме 2 допускаем, что один и тот же химический элемент, входя в две различные группы компонентов, может быть представлен своими соответствующими плотностями в обоих подсписках. Например, содержания атомов водорода во флюиде и в минеральном скелете формации (горной породы). В обеих проблемах о выделенных здесь взаимодействиях будет говориться как о характерных, или

главных (взаимодействиях). Будем обозначать как ρ столбец $(\rho_1, \dots, \rho_N)^T$, т. е. столбец из числовых плотностей элементов первой группы. Имеем, что

$$\rho = \Upsilon\alpha, \quad \text{где } \Upsilon - \text{ заданная } N \times K \text{ матрица, } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Пусть $\mathcal{U} \equiv \{\rho : \rho = \Upsilon\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$. Введем отображение

$$\Upsilon_M : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}, \quad \rho = \Upsilon_M(\alpha) = \Upsilon\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}; \quad \mathcal{U} = \Upsilon_M(\mathcal{A}). \quad (8)$$

Предполагаем, что Υ_M осуществляет взаимно-однозначное отображение \mathcal{A} на \mathcal{U} . Считается, что все элементы Υ_{ij} матрицы Υ являются неотрицательными и что $\forall i \in \overline{1, N} \quad \sum_{j=1}^K \Upsilon_{ij} > 0$. Тем самым, поскольку $\forall j \quad 0 < \alpha_j < 1$, то $\forall i \in \overline{1, N} \quad \rho_i = \sum_{j=1}^K \Upsilon_{ij}\alpha_j > 0$ и $\rho_i < \sum_{j=1}^K \Upsilon_{ij}$. Обозначим $\Pi_U = \{\rho : \forall i \in \overline{1, N} \quad 0 < \rho_i < \sum_{j=1}^K \Upsilon_{ij}\}$. Имеем, что $\mathcal{U} \subset \Pi_U \subset R^N$. Множества \mathcal{U} и Π_U , как и \mathcal{A} , являются выпуклыми ограниченными областями.

Будем обозначать как Υ_M^{-1} отображение, обратное к Υ_M ,

$$\Upsilon_M^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \alpha = \Upsilon_M^{-1}(\rho).$$

Это обратное может быть записано в явной форме как

$$\Upsilon_M^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \{\alpha : \Upsilon\alpha = \rho, \Lambda\alpha = \lambda, \rho \in \mathcal{U}\}.$$

Составим $K \times K$ матрицу B , в первых N строках которой располагаем матрицу Υ , а в последних $K - N$ строках — матрицу Λ . Составим также столбец $(\rho; \lambda)$ высоты K такой, что

$$(\rho; \lambda)^T \equiv (\rho_1, \dots, \rho_N; \lambda_1, \dots, \lambda_{K-N}).$$

Отображение Υ_M^{-1} как раз связано с решением системы линейных алгебраических уравнений

$$B\alpha = (\rho; \lambda), \quad \rho \in \mathcal{U}; \quad (9)$$

в силу взаимно-однозначного соответствия между \mathcal{A} и \mathcal{U} :

$$|B| \equiv \det \|B\| \neq 0. \quad (10)$$

2.3 Структура коэффициентов уравнения переноса в области (V)

Конкретный вид коэффициентов уравнений переноса в (1) и (2), связанных с областью (V) общего вида, дан в [23,31,24]. Ограничимся здесь лишь записью величин, относящихся к характерным взаимодействиям в рассматриваемом случае однородной области. В проблеме 1 для $x \in (G_V)$ считается, что

$$\hat{Q}^+ = \hat{Q}_0^+ + \hat{Q}_b^+,$$

где \hat{Q}_0^+ есть некоторый заданный, известный и независимый от ρ или α оператор; оператор \hat{Q}_b^+ считается тождественно равным нулю вне (V) , т. е. для $x \notin (G_V)$, и

$$\hat{Q}_b^+ = \sum_{j=1}^N \rho_j \hat{q}_j^+ \quad \forall x \in (G_V),$$

где \hat{q}_j^+ , $j = 1, \dots, N$, — "парциальные" операторы, описывающие рождение частиц основного типа на 1 атом элемента j . Полагаем, что все \hat{q}_j^+ , $j = \overline{1, N}$, являются тождественно нулевыми операторами вне (V) .

В проблеме 2 считается, что в (V)

$$\hat{S}^+ = \hat{S}_0^+ + \hat{S}_b^+,$$

где \hat{S}_b^+ есть тождественно нулевой оператор $\forall x \notin (G_V)$, т. е. вне (V) , и

$$\hat{S}_b^+ = \sum_{j=1}^N \rho_j \hat{b}_j^+ \quad \forall x \in (G_V),$$

где парциальные операторы $\hat{b}_j^+, j = 1, \dots, N$, описывают рассеяния выделенного характерного типа на 1 атом элемента j . В (V) оператор \hat{S}_0^+ отвечает всем остальным типам рассеяния. Для $\gamma - \gamma$ методов в случае комптоновского рассеяния следует скорректировать термины; следует говорить о плотности электронов и парциальном сечении на 1 электрон.

Все парциальные сечения, фигурирующие выше, рассматриваются как ограниченные в соответствии со свойством ограниченности полных сечений. Отметим, что взаимодействия, описываемые операторами \hat{Q}_b^+ и \hat{S}_b^+ , играют в рассматриваемых проблемах особую роль. Мы говорим об этих взаимодействиях как о "характерных". Можно трактовать, что остальные взаимодействия являются лишь сопутствующими и "мешающими" для определения рассматриваемых параметров. Введем теперь для обеих рассматриваемых проблем, 1 и 2, j - е подмножество «характерных траекторий», определяя, что на каждой траектории этого j - го подмножества содержится хотя бы одно j - е характерное взаимодействие; $j = \bar{1}, \bar{N}$. В последующем разделе, развивая терминологию, введём также матрицу "характерных взаимодействий".

3 Постановка обратных задач восстановления параметров

3.1 Предварительные замечания

В соответствии со свойствами сечений взаимодействий, источников и граничных условий решения прямых задач обеих рассматриваемых проблем существуют и единственны $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ и представляются в форме сходящегося ряда Неймана [18].

Столбцы z, I и J являются столбцами-функциями от $\alpha \in \mathcal{A}$; для последнего из них запишем:

$$J : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \subset R^{NM}, \quad (11)$$

где через \mathcal{J} обозначено множество значений столбца функций J . В некотором смысле исходную "систему уравнений измерений" для обеих изучаемых проблем восстановления параметров запишем в виде

$$J(\alpha) - d = 0 \quad \text{относительно неизвестных } \alpha \text{ (и } \rho). \quad (12)$$

Считаем, что отображение (11) является непрерывным и ограниченным. Композиция $J \circ \Upsilon_M^{-1}$, или сложная функция $J(\Upsilon_M^{-1}(\cdot))$ от $\rho \in \mathcal{U}$, отображает \mathcal{U} на \mathcal{J} ,

$$J \circ \Upsilon_M^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{J}. \quad (13)$$

Это последнее также является, как нетрудно видеть, непрерывным и ограниченным. Мы сформулируем несколько далее обратные задачи для обеих наших проблем как задачи решения систем, следующих из (12), считая при этом, что

(i) неизвестные α принадлежат некоторой подобласти \mathcal{A}_1 , $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$; $\rho \in \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 = \Upsilon_M(\mathcal{A}_1)$;

(ii) сужения отображений (11) на \mathcal{A}_1 и (13) на \mathcal{U}_1 являются гомеоморфизмами, и

(iii) $d \in J(\mathcal{A}_1) = J \circ \Upsilon_M^{-1}(\mathcal{U}_1)$.

В силу трёх вышесказанных предположений решения обеих обратных проблем существуют и единственны. Нашей целью, и это—основная цель данной работы, является построение численного метода для решения обратных задач в рамках поставленных двух проблем.

Введём квадратную диагональную матрицу-функцию Z порядка N_M с диагональными элементами $Z_{ii} = z_i$, $i = \overline{1, N_M}$. Матрица Z является невырожденной на \mathcal{A} , пусть Z^{-1} — обратная к ней матрица-функция, определенная на \mathcal{A} . Как нетрудно видеть: $J = Z^{-1}I$. Поэтому система на \mathcal{A} записывается также в формах

$$Z^{-1}I - d = 0, \quad I - Zd = 0.$$

Методы ППХВ основываются на свойствах(см.[23,31])

$$I_i = I_i^{(r)} + \sum_{j=1}^N I_{ij}, \quad i = \overline{1, N_M}, \quad (14)$$

$$I_{ij}/\rho_j = O(1) \quad \text{при} \quad \rho_j \rightarrow 0, \quad i = \overline{1, N_M}, j = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где слагаемые I_{ij} описывают вклады в функционалы I_i от j -го характерного взаимодействия, а слагаемое $I_i^{(r)}$ — от остальных(нехарактерных) взаимодействий. Обозначим: $I^{(ch)}$ — столбец с компонентами $I_i^{(ch)} = \sum_{j=1}^N I_{ij}$, $i = \overline{1, N}$. Разложение (14) является следствием разбиения пространства траекторий на подмножества характерных траекторий и "остаточное" подмножество. Свойство (15) вытекает из свойств случайного процесса переноса частиц и факта, что на каждой траектории j - го подмножества характерных траекторий содержится хотя бы одно j - е характерное взаимодействие; $j = \overline{1, N}$.

Введём теперь "опорную" точку $\rho^{(0)}$ в \mathcal{U}_1 и $N_M \times N$ матрицу A , полагая для элементов последней:

$$a_{ij} \times (\rho_j - \rho_j^{(0)}) = I_{ij} - I_{ij}(\rho^{(0)}), \quad i = \overline{1, N_M}, j = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Имеем:

$$I = I^{(r)} + A(\rho - \rho^{(0)}) + I^{(ch)}(\rho^{(0)}); \quad (17)$$

обозначив, наконец, $c_z \equiv Zd - I^{(r)} - I^{(ch)}(\rho^{(0)})$, перепишем 12 в виде

$$A(\rho - \rho^{(0)}) - c_z = 0 \quad \text{относительно неизвестных} \quad \alpha \text{ и} \quad \rho, \quad (18)$$

формально почти идентичном ранее рассмотренному в ([24]). Этот рассмотренный случай получается, если полагать $\rho^{(0)} = 0$.

Можно видеть, привлекая классическую формулу конечных приращений Лагранжа, что матрица A может интерпретироваться как составленная из производных, взятых в промежуточных точках между $\rho^{(0)}$ и ρ .

3.2 Формулировка обратных задач

Теперь, исходя из (18), сформулируем, как и в ([23,31,24]), обратные задачи для обеих проблем как задачи решения какой-либо из трех систем:

$$\begin{aligned} A(\alpha)(\rho - \rho^{(0)}) - c_z(\alpha) &= 0, \\ \rho - \Upsilon\alpha &= 0, \quad (\alpha, \rho) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{U}_1, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A(\alpha)(\Upsilon\alpha - \rho^{(0)}) - c_z(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \mathcal{A}_1, \text{ и} \quad (20)$$

$$A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho - \rho^{(0)}) - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) = 0, \quad \rho \in \mathcal{U}_1, \quad (21)$$

при наличии, во-первых, ограничений в соответствии со списком (i) – (iii) раздела 3.1 настоящего параграфа и, во-вторых, нижеследующего условия на ранг матрицы A , а именно,

$$RgA(\alpha) = N \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1. \quad (22)$$

Будем говорить об этих системах как о системах уравнений для восстановления параметров, обозначая кратко SEPE(System of Equations for Parameters Evaluation). В применении к системе (21), как нетрудно видеть, условие (22) трансформируется в условие

$$RgA \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) = N \quad \forall \rho \in \mathcal{U}_1. \quad (23)$$

Напомним, что

$$A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) \equiv A(\Upsilon_M^{-1}(\rho)), \quad c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) \equiv c_z(\Upsilon_M^{-1}(\rho)).$$

Как и в ([23,31,24]), мы ограничиваемся изучением методов решения систем (19) и (21). Сформулируем также эти задачи в хорошо известной "вариационной" форме, имея в виду построение итерационных процессов. Пусть W есть квадратная диагональная матрица порядка N_M с положительными диагональными элементами, $W_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, N_M}$; пусть, далее, как обычно, (\cdot, \cdot) – символ скалярного произведения. Постановки в названной форме записываем как:

$$\inf \left((A(\rho - \rho^{(0)}) - c_z)^T, W(A(\rho - \rho^{(0)}) - c_z) \right), \quad (\alpha, \rho) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{U}_1, \quad \text{при} \quad (24)$$

условию $\rho = \Upsilon\alpha,$

$$\inf \left((A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho - \rho^{(0)}) - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho))^T, W(A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)(\rho - \rho^{(0)}) - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)) \right), \quad (25)$$

$\rho \in \mathcal{U}_1;$

предполагая, конечно, что выполняются все вышесказанные ограничения и условия. Итерационные процессы для решения задач (24), (25) определяются и записываются аналогично тому, что и в ([23,31,24]); как решения соответствующих задач квадратичного программирования.

Результат настоящей работы можно рассматривать как обобщение постановок, подхода и методов ППХВ из ([23,31,24]) на более широкий класс задач; а также как улучшение ранее построенных. В частности, посредством новых предложений была рассмотрена задача о восстановлении (массовой) плотности горной породы по данным измерений $\gamma - \gamma$ каротажа([25]).

Список литературы

1. Алексеев Ф.А., Головацкая И.В., Гулин Ю.А., Дворкин И.Л., Дядькин И.Г., Сребродольский Д.М. Ядерная геофизика при исследовании нефтяных месторождений. — М.: Недра, 1978.— 360 с.
2. Антюфеев В.С., Назаралиев М.А. Обратные задачи атмосферной оптики. Новосибирск, 1988. — 156 с.
3. Банзаров Б.В., Хисамутдинов А.И. Novosibirsk Monte Carlo methods for Nuclear Geophysics problems. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615224, 13.08.2010.
4. Гермогенова Т.А. Об обратных задачах атмосферной оптики // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 5. — С. 1091–1096.
5. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. — 491 с.
6. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб.научн.изд-во, 2009, —457 с.
8. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972. —384 с.
9. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. —286 с.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
11. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976. — 283 с.
12. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.— 608 с.
13. Резванов Р.А. Радиоактивные и другие неэлектрические методы исследования скважин. — М.: Недра, 1982. — 368 с.
14. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1972.— 272 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 287 с.
16. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН. — 1970. — Т. 102, № 3. — С. 345–386
17. Филиппов Е.М. Ядерная геофизика. — Новосибирск: Наука, 1973. — Т1, Т2. — Т.1, — 514 с.; Т.2, — 400 с.
18. Хисамутдинов А.И., Стариков В.Н., Морозов А.А. Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике. — Новосибирск: Наука, 1985. — 158 с.
19. Хисамутдинов А.И., Бланков Е.Б. Активационный каротаж на кислород, кремний и алюминий и восстановление флюида в кварц-полевошпатовых коллекторах // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 3. — С. 587–590.
20. Хисамутдинов А.И., Минбаев М.Т. Математическая модель и численный метод идентификации параметров нефтеводонасыщенных пластов по данным нейтронно-активационного каротажа // Геология и геофизика. — 1995. — Т.36, № 7. — С. 73–85.
21. Хисамутдинов А.И., Федорин М.А. О численном методе для восстановления состава некоторых горных пород по данным измерений рентгено-флуоресцентного анализа // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 1. — С. 100-105.
22. Хисамутдинов А.И., Банзаров Б.В., Федорин М.А. Математическое моделирование нестационарного переноса частиц в задачах импульсного нейтронного-гамма каротажа. — Новосибирск, 2008. — 54 с. (Препринт/ РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука).
23. Хисамутдинов, А.И. Характерные взаимодействия и последовательные приближения в двух задачах о восстановлении коэффициентов уравнений переноса(и состава среды). -Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2009.— 48 с.
24. Хисамутдинов, А.И. Характерные взаимодействия и восстановление параметров уравнения переноса и среды, включая коэффициент пористости, по данным измерений некоторых ядерно-гео-физических методов.//Геология и Геофизика, 2013, т.54, № 9, с. 1427-1445.
25. Хисамутдинов А.И.Пахотина Ю.А. О компьютерном восстановлении плотности формации по данным измерений гамма-гамма метода. — Новосибирск, 2013.— 21 с.//Препринты ИНГГ СО РАН. 2013. №1.ISSN 2224-5723 .
26. Gilchrist, Jr, W.A., Prati E., Pemper R., Mickael, M.W., Trcka, D. Introduction of a new through-tubing multifunction pulsed neutron instrument // 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Houston, — 1999. — Paper SPE 56803.
27. Grau J.A. and Schweitzer J.S. Elemental concentrations from thermal neutron capture gamma-ray spectra in geological formations // Nuclear Geophysics. — 1989. — Vol. 3, No. 1. — P. 1-9.
28. Hertzog R.C. Laboratory and Field Evaluation of an Inelastic Neutron Scattering and Capture Gamma Ray Spectroscopy Tool // Soc. Petr. Eng. Jour. — 1980. — Vol. 20, — P. 327–340.

29. Khisamutdinov A.I. Numerical method of identifying parameters of oil-water saturation by nuclear logging // Applied Radiation and Isotopes. — 50(1999). — P. 615-625.
30. Khisamutdinov A.I. and Phedorin M.A. Numerical method of evaluating elemental content of oil-water saturated formations based on pulsed neutron-gamma inelastic log data // SPE Jour. — 2009, March. — P. 51-53.
31. Khisamutdinov A.I. Characteristic interactions and successive approximations in problems on evaluating coefficients of transport equation and elemental content of a medium. J. of Inverse problems, 2011, No.2, p.189-222 .
32. McCormick N.J. Inverse radiative transfer problems: as review // Nuclear Science and Engineering. — 1992, — No. 112. — P. 185-198.
33. Michael M. W., Trcka D., and Pemper R. Dynamic Multi-parameter Interpretation of Dual-Detector Carbon/Oxygen Measurements // 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Houston, — 1999. — Paper SPE 56649.

Численный анализ гидродинамических процессов сварочной ванны при электродуговой сварке

А. Жайнаков, Р. Султангазиева, Б. Медралиева

Кыргызский Государственный Технический Университет
пр. Манаса, 66, Бишкек, Кыргызстан
{jainakov-41,renasultangazieva,medralieva}@mail.ru

Аннотация. В данной работе проведен сравнительный анализ математических моделей сварочных ванн при электродуговой сварке, поставлены граничные условия на поверхности сварочной ванны в приближении свободной поверхности ванны и в условиях взаимодействия с потоками электрической дуги, приведены результаты численных расчетов для обоих случаев

Ключевые слова: Электродуговая плазма, МГД уравнения, сварочная ванна, тензор напряжений, термокапиллярная конвекция, эффект Марангони

1 Введение

Сварка металлов широко применяется в современной технике и является одним из самых важных технологических процессов во многих областях промышленности. Во многих случаях сварка – наиболее эффективный или единственно возможный способ создания неразъемных соединений и получения требуемой по геометрии и форме конструкции. Полученное изделие должно не только отвечать конструктивным формам, но и также механическим и физическим свойствам тому назначению и тем условиям эксплуатации, для которых они создаются. Сварка является весьма сложным физико-химическим и металлургическим процессом, в ходе которого металл шва и околошовная зона претерпевают фазовые превращения и структурные изменения, что, в свою очередь, влияет на физико-механические характеристики материала. Аргонодуговая сварка неплавящимся электродом обеспечивает высокое качество шва, хотя невысокая проплавливающая способность данного вида сварки в некоторых случаях является заметным недостатком. Сварка аргоном применяется для сварки деталей из легированных сталей цветных металлов, в том числе неповоротных деталей. Аргон тяжелее воздуха и при поддуве аргона в сварочную ванну, последний вытесняется оттуда, что позволяет избежать протекания химических реакций с воздухом в сварочной ванне, к тому же, при сварке в обычной среде сварочная ванна с расплавленным металлом содержит примеси, которые при взаимодействии с воздухом выгорают, оставляют нагар и образуют поры. Также, вместе с аргоном обычно подается около 5% воздуха с кислородом, чтобы сжечь загрязнения, которые могут попасть в сварную ванну извне. Таким образом, аргонодуговая сварка неплавящимся электродом позволяет четко контролировать глубину проплавления металла, получить качественный гладкий сварочный шов, не уступающий по прочности, антикоррозионным и прочим свойствам основному металлу. Компьютерное моделирование процессов сварки позволяет подобрать оптимальные сварочные режимы, уменьшить деформации от нагрева, рассчитать глубину проплавления и профиль сварочной ванны, что позволяет оптимизировать технологический процесс сварки. Вопросы формирования сварного соединения тесно связаны с необходимостью изучения процессов движения металла в сварочной ванне. Быстрое протекание процессов, высокая температура и значительное излучение при сварке обуславливают сложность прямого изучения реальных

процессов. Для адекватного теоретического описания процессов, протекающих при сварке металлических материалов, требуется принимать во внимание сложное взаимодействие различных физических процессов и явлений, связанных с нагревом и плавлением основного материала при воздействии источника нагрева. Взаимодействуют между собой гидродинамические, температурные и электромагнитные поля, а также поля упругих напряжений, обусловленные силой гравитации. Моделирование таких процессов целесообразно для оптимизации параметров режима сварки и получения сварных соединений с улучшенными качественными характеристиками. Процесс проплавления основного материала является конечным результатом теплового и силового взаимодействия технологического источника энергии с обрабатываемым материалом. Характеристики сварного шва (размеры, форма, микроструктура и т.д.) и процессы теплопередачи в твердо-жидком интерфейсе в значительной степени зависят от потока жидкости в сварочную ванну. В результате, чтобы получить хороший прогноз формы шва, а также тепловые циклы и вызванные остаточные напряжения вокруг зоны сварки (где риск перелома является самым высоким), необходимо принимать во внимание развитие формирования сварочной ванны и ее динамику во времени. Глубина проплавления, а также его форма определяется концентрацией вводимой в зону сварки энергией. Для построения наиболее правильной модели необходимо учитывать как катодные явления, так и анодные с учетом слоев диффузионного взаимодействия и пространственного заряда. На основе экспериментальных данных и анализа физических процессов в электрической дуге можно установить характер распределения и параметры регулирования плотности тока на аноде, определить оптимальные условия ведения процесса сварки, которые будут обеспечивать требуемые геометрические и эксплуатационные характеристики сварного соединения.

1.1 Постановка задачи

Долгие годы математическое моделирование электродуговой сварки шло отдельно по двум направлениям: моделирование электрической дуги и моделирование сварочной ванны [1]. В последние годы разработаны модели, которые рассматривают и электрическую дугу и сварочную ванну по единой модели с учетом их взаимодействия между собой. В основе модели лежит система МГД уравнений для всей расчетной области. Схема расчетной области представлена на рис. 1

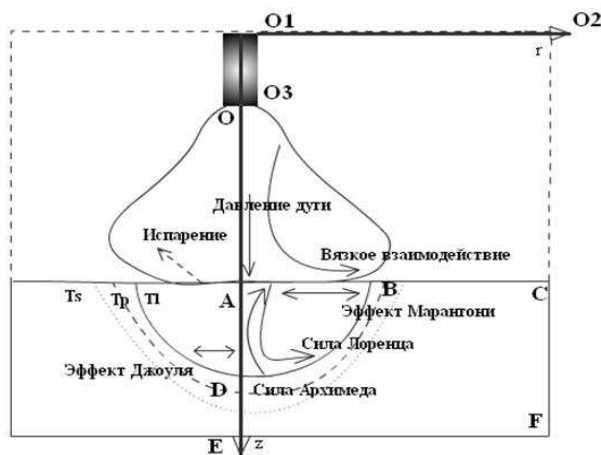


Рис. 1. Схема расчетной области

При записи МГД уравнений в наиболее простом виде предполагается, что в электродуговом разряде выполняются следующие условия: среда является сплошной, между скоростью деформации и напряжением существует линейная связь, течение газа ламинарное, выполняется условие локального термодинамического равновесия, излучение ионизированного газа объемное. Для сварочной ванны выдвинуты следующие допущения: Процесс сварки ограничивается стационарной точечной сваркой с неплавящимся электродом в замкнутом объеме, течения ламинарные, поскольку размер ванны относительно мал, в предположении жесткой поверхности анода. Другими словами, деформация поверхности сварочной ванны не влияет на расчетные явления переноса. Учитывая, что система осесимметрична $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, отсутствие внешней закрутки газа и наложенного извне магнитного поля, система МГД уравнений в цилиндрических координатах примет вид:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Уравнения движения для радиальной составляющей:

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \rho u \frac{\partial v}{\partial z} = & -\frac{\partial P}{\partial r} - j_z B_\varphi + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - 2\mu \frac{v}{r^2} + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения движения для аксиальной составляющей:

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial u}{\partial r} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} = & -\frac{\partial P}{\partial z} + j_r B_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{3} \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + S_u \end{aligned} \quad (3)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v h - \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u h - \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{1}{\sigma} (j_r^2 + j_z^2) + S_h \quad (4)$$

Уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = j_z, \quad -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = j_r \quad (5)$$

Закон Ома:

$$j_r = \sigma E_z j_z = \sigma E_r \quad (6)$$

Система (1) дополняется зависимостями теплофизических коэффициентов плазмообразующего газа и расплавленного жидкого металла изделия от температуры и давления. Используются следующие обозначения: v - радиальная скорость, u - аксиальная скорость, P - давление, T - температура, j - плотность тока, E - напряженность электрического поля, H - напряженность магнитного поля, ρ - плотность, σ - электропроводность, λ - теплопроводность, μ - вязкость, c_p - теплоемкость при постоянном давлении, h - энтальпия, Ψ - излучательная способность. В уравнении движения:

$$S_u = \begin{cases} 0, & \text{для дуги} \\ \rho g - \rho g \beta (T - T_0) & \text{для ванны} \end{cases} \quad (7)$$

β - коэффициент термического расширения. Данное слагаемое обусловлено суммой силы инерции и выталкивающей силы в сварочной ванне в приближении Буссенака. Высокие температурные градиенты, которые имеют место в сварочной ванне, могут вызвать естественный поток конвекции из-за зависимости плотности расплавленного металла от температуры, поэтому считаем полезным оценить вклад данного слагаемого. В уравнении энергии источниковый член S_h учитывает потери тепла на плавление. Он показывает поведение удельной теплоты плавления во время изменения фаз: теплота поглощается во время плавления, то есть при изменении твердой фазы к жидкой, и высвобождается в процессе затвердевания. H_f - удельная энтальпия.

$$H_f = \begin{cases} L & T > T_l \\ f_l L & T_l < T < T_s \\ 0 & T < T_s \end{cases} \quad (8)$$

Энтальпия связана с удельной энтальпией формулой:

$$h = c_p T + f_l H_f$$

Исходная система МГД уравнений решается в переменных "вихрь-функция тока" ω - напряженность вихря, ψ - функция тока, χ - функция электрического тока, которые в случае цилиндрической системы координат и осевой симметрии определяются соотношениями:

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \rho u r \quad - \frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho v r \quad (10)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = r j_z \quad - \frac{\partial \chi}{\partial z} = r j_r \quad (11)$$

Введенные новые переменные ψ и χ удовлетворяют уравнениям неразрывности и сохранения заряда. Тогда исходная система запишется в следующем каноническом виде:

$$a \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[b \frac{\partial}{\partial z} (c\varphi) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[b \frac{\partial}{\partial r} (c\varphi) \right] + e r = 0 \quad (12)$$

Где φ - искомая функция, принимающая значения ω, ψ, h и χ ; a, b, c, e - нелинейные коэффициенты, соответствующие каждому из уравнений. Единая форма записи позволяет при решении системы уравнений использовать один и тот же алгоритм расчета. Для решения полученной системы дифференциальных уравнений необходимо задать граничные условия для данных функций. Поскольку уравнения системы являются уравнениями эллиптического типа, то граничные условия должны быть заданы по всему контуру, охватывающему расчетную область. Для сравнения моделей, представленных в работе [2] - [3] и работах [4]- [5] рассчитываются обе модели: 1) Решается вся система МГД уравнений для электрической дуги и сварочной ванны, однако сварочная ванна рассматривается в приближении свободной поверхности. Расчетные данные электрической дуги используются для оценки теплового потока в сторону ванны. На свободной поверхности ванны учитывается термокапиллярная конвекция.

2) Система МГД уравнений решается при совместном рассмотрении процессов в электрической дуге и расплавленном металле обрабатываемого изделия с учетом их вязкого взаимодействия между собой и термокапиллярной конвекции.

1.2 Граничные условия

Для первой модели поставим граничные условия для всей области. Постановка граничных условий для столба дуги не вызывает затруднений, так как подобные задачи решались неоднократно. На поверхности всех стенок условием замкнутости объема будет условие непроницаемости: $\psi = 0$. Температура стенок области, которые не взаимодействуют между собой принимается равной $T_0 = 300$, тем самым определяется $h = h(T_0)$. Функция электрического тока $\chi = \frac{I}{2\pi}$. Функция ω определяется из условия прилипания. Для торца катода: $\chi_k = \frac{I}{2\pi R_k} \int_0^r \sigma r dr$, R_k - радиус катодного пятна. Распределение температуры у торца катода задается либо с учетом экспериментальных данных, либо задается урюковским распределением:

$$T_k(r) = (T_v - T_0) \left(1 - \frac{r}{R_k}\right)^m \left(1 + \frac{r}{R_k} m\right) + T_0$$

где T_v - температура кипения катодного материала, m - степень заполнения профиля температуры. На оси столба выполняются условия симметрии. На границе "дуга-анод" для системы "вихрь-функция тока" используется методика Грязнова В.Л. и Полежаева В.И., при котором значение функции ω не используются, а вычисляется у поверхности электродов в узлах сетки, отстоящих на один шаг от стенки.

Граничные условия для свободной поверхности сварочной ванны могут быть двух типов: кинематические - установка скорости на жидкой границе, и динамические, связанные с давлением. Форма свободной поверхности сварочной ванны определяется из условия баланса внутренних и внешних сил на ее поверхности. Граничные условия на свободной границе дуга- жидкий металл включают в себя:

— Нормальные напряжения от баланса давления жидкости и сил вязкого трения, балансом капиллярных сил и сил давления дуги в дуге условия сварки, записаны с учетом тензора вязких напряжений. В рамках данной задачи мы рассматриваем границу раздела дуга-ванна плоской, поэтому нормальную составляющую не рассматриваем.

— Тангенциальная составляющая:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -f_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (13)$$

то есть касательные напряжения вызваны зависимостью коэффициента поверхностного натяжения расплавленного металла от температуры. В приближении свободной поверхности сварочной ванны тепловой поток от дуги обычно рассматривают в следующем виде:

$$q(r) = -\frac{Q}{2\pi r_a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_a^2}\right) \quad (14)$$

где Q - количества тепла от дуги, r_a -радиус анодного пятна. Для нашей задачи воспользуемся численными данными поля температуры электрической дуги, тогда

$$q(r) = \lambda_{arc} \frac{\partial T_{arc}}{\partial z} \quad (15)$$

Тепловые потери с поверхности сварочной ванны включают конвективные потери, радиационные потери и потери на испарение:

$$q_{conv} = \lambda (T - T_0) \quad q_{rad} = \sigma_\varepsilon \varepsilon (T^4 - T_0^4) \quad q_{evap} = W_v h_{fg} \quad (16)$$

где T_0 - температура окружающей среды, σ_ε - коэффициент Стефана-Больцмана, ε - излучательная способность вещества, h_{fg} - удельная теплота испарения, W_v - скорость испарения, которая находится из следующего приближения:

$$\log W_v = A_v + \log P_{atm} - 0,5 \log T$$

A_v - постоянная, зависящая от материала обрабатываемого изделия.

Граничные условия для дуги:

	ω	ψ	h, T	χ
O1O2	$u=0$ $v=0$	$\psi = 0$	$T = T_0$	$\chi = \frac{I}{2\pi}$
O1O3	$u=0$ $v=0$	$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ $\psi = 0$	$T = T_0$	$\chi = \frac{I}{2\pi}$
OO3	$u=0$ $v=0$	$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ $\psi = 0$	$T = T_k(r)$	$\chi = \chi_k$
OA	$\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$	$\psi = 0$	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\chi = 0$
O2C	$u=0$ $v=0$	$\psi = 0$	$T = T_0$	$\chi = \frac{I}{2\pi}$
AB	-	$\psi = 0$	$\lambda_{дуги} \frac{\partial T_{дуги}}{\partial z} = \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial z}$	$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$

Граничные условия для сварочной ванны:

	ω	ψ	h, T	χ
AB	$\mu w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}$	$\psi = 0$	$\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial z} = \lambda_{arc} \frac{\partial T_{arc}}{\partial z} - \sigma_\varepsilon \varepsilon (T_a^4 - T_0^4) - W_v h_{fg} - j \varphi_a$	$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$
BC	$u=0$ $v=0$	$\psi = 0$	$\lambda_{дуги} \frac{\partial T_{дуги}}{\partial z} = \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial z} - \sigma_\varepsilon \varepsilon (T_a^4 - T_0^4)$	$\frac{\partial \chi_a}{\partial z} = 0$
AE	$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\chi = 0$
CF	$w=0$	$\psi = 0$	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\chi = \frac{I}{2\pi}$
EF	$w=0$	$\psi = 0$	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$

По второй модели, при совместной рассмотрении дуги и ванны изменяются только условия на границе АВ "дуга-ванна": $\mu_a w_a = \mu_{arc} w_{arc} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}$, остальные граничные условия остаются неизменными. Для изучения влияния постановки граничных условий по обеим моделям, были проведены численные расчеты при токах $I=150A$ и $I=200A$, дуга горит в среде аргона при давлении $P=0,1$ МПа в замкнутом объеме, при постоянном межэлектродном расстоянии в 5мм, в качестве материала анода используется алюминий. Размеры дуги у катода принимались равными размеру цилиндрического электрода и равны 1мм, температура в центре катодного пятна 18000К. Боковые стенки катода и стабилизирующие стенки

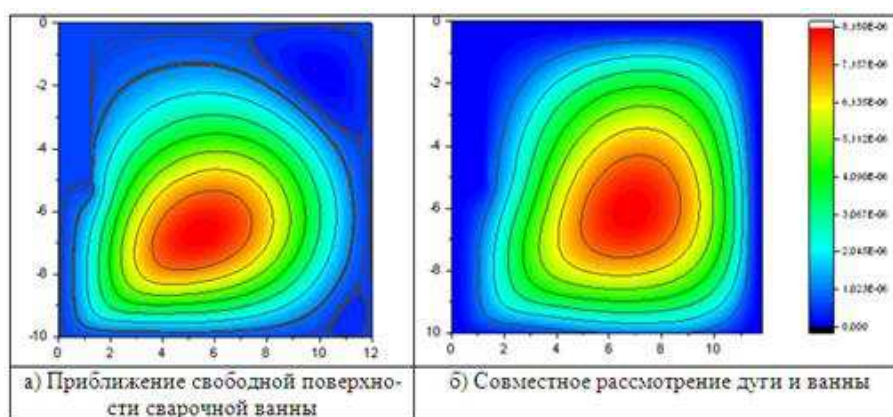
Таблица 1. Физические характеристики алюминия.

T_{plav} , К	h_{fg} , Дж/кг	β , 1/К	T_s , К	T_l , К	ε	φ_a , eV	L , Дж/кг
933	$1,08 * 10^7$	$2,34 * 10^{-5}$	922	947	0,4	4,25	$3,93 * 10^5$

поддерживаются при температуре $T=300\text{K}$. Размеры дуги у анода формируются в процессе расчета в соответствии с поставленными условиями. Расчетные данные для чистого алюминия:

2 Обсуждение результатов

На рис. 2 представлены поля расходов газа для электрической дуги, рассчитанных по обейм моделям.

Рис. 2. Линии равных расходов газа в дуге, $I=150\text{ A}$

В результате совместного действия собственных электромагнитных сил и сил вязкости газа электрическая дуга генерирует основной тороидальный газодинамический вихрь, который вовлекает в свое движение почти всю основную массу газа. При постановке граничного условия для вихря скорости по методу Патанкара, вихрь скорости определяется только для внутренней области, а исходные граничные условия для функции тока ставились как для твердой непроницаемой стенки. Поэтому подобная постановка граничных условий тормозят потоки электродуговой плазмы, линии расхода газа более сконцентрированы в осевой части, прокачивая весь газ в сторону анодного пятна. Вязкое взаимодействие основного вихря с окружающим неподвижным газом вовлекает в движение оставшийся газ у холодных углов плазматрона, образуя угловые вихри с небольшой интенсивностью и обратного направления.

По второй модели потоки плазмы и потоки расплавленного металла растекаются в радиальном направлении, радиальные скорости в данном случае выше, что позволяет захватить большую массу газа в движение основного вихря. Также, это способствует более интенсивному выносу тепла из приосевой области анода на периферию и нагреву газа у стен плазматрона. Изотермы более вытянуты в радиальном направлении, формируя более "колокообразную" форму видимой границы дуги по сравнению с первым случаем (рис. 3).

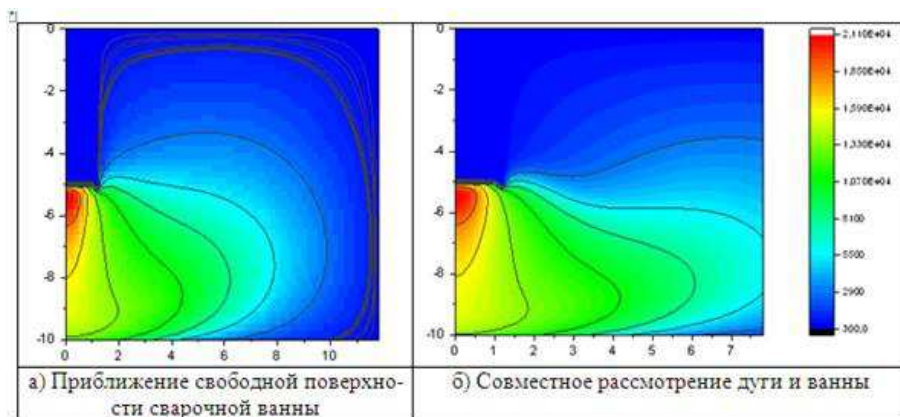


Рис. 3. Изолинии температур в сварочной дуге, $I=150A$

В приближении свободной поверхности в объеме сварочной ванны образуются два вихря: А - поверхностный, направленный от центра ванны к ее краям, и В - у оси, на дне сварочной ванны объемный вихрь, направленный против часовой стрелки (рис. 4а). Поверхностный вихрь образован результирующей сил Архимеда и Марангони, которые имеют одинаковое направление, в то время, как силы Лоренца индуцируют конвективные потоки противоположного направления. С увеличением силы тока до $I=200A$ возрастает роль электромагнитных сил и этот вихрь увеличивается в объеме, занимая почти всю центральную часть сварочной ванны. На поверхности остается тонкий слой расплавленного металла, вовлеченный в радиальное движение от центра ванны к краям термокапиллярными силами. Это подтверждает тот факт, что роль термокапиллярной силы возрастает при силах тока в 200А. При силе тока в $I=250A$ в объеме сварочной ванны наблюдается только один вихрь, направленный по часовой стрелке (рис. 4б).

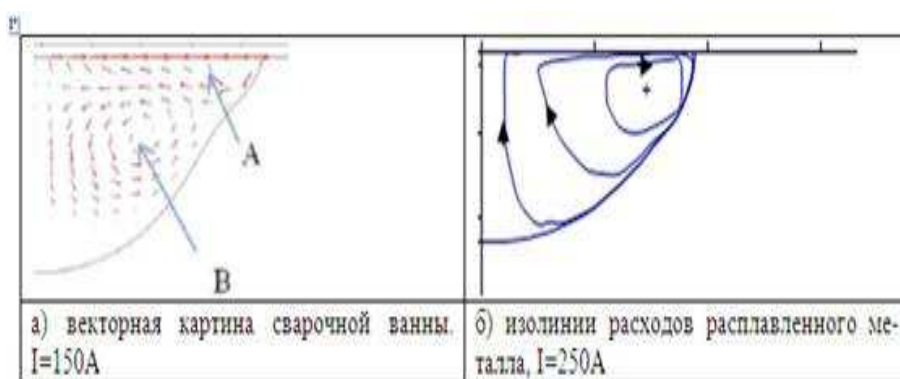


Рис. 4. Влияние силы тока на гидродинамику сварочной ванны

При учете вязкого взаимодействия электрической дуги и сварочной ванны в объеме ванны основной вихрь направлен от центра ванны к ее краям, и второй вихрь противоположного направления образуется у краев ванны за счет изменения знака градиента поверхностного натяжения (рис. 5). Взаимодействие с потоками электрической дуги увеличивает радиальные размеры ванны и уменьшает глубину проплавления металла. Геометрические

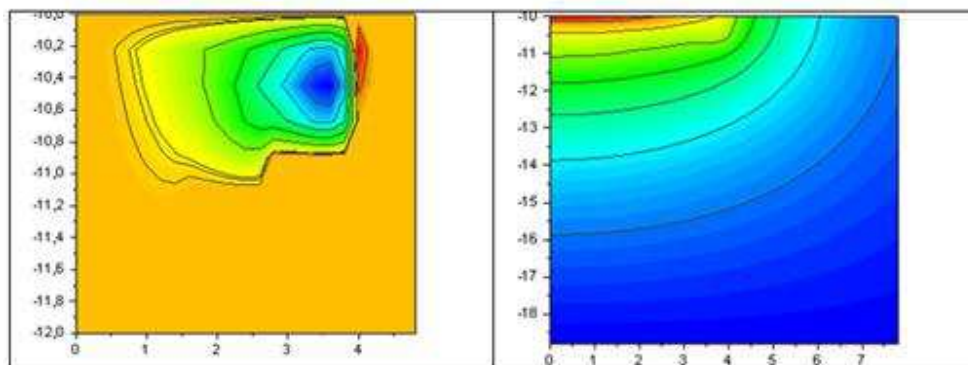


Рис. 5. Изолинии расхода и изотермы в сварочной ванне, $I=200A$

Таблица 2. Зависимость параметров сварочной ванны от силы тока.

I, A	Свободная поверхность		Взаимодействие с дугой	
	Rv (мм)	Hv (мм)	Rv (мм)	Hv (мм)
I=150A	2,4	0,8	2,8	0,8
I=200A	3,2	1,2	4	1
I=250A	4	1,6	5	1,2

размеры ванны при различных силах тока, рассчитанные по обеим моделям представлены в таблице. Геометрические размеры сварочной ванны в зависимости от силы тока

Список литературы

1. Wheeler, D., Bailey, C. *Numerical modelling and Validation of Marangoni and Surface Tension Phenomena Using the Finite Volume Method*, Int. J. Num. Methods in Fluids (1999).
2. Abderrazak Traidia *Multiphysics modelling and numerical simulation of GTA weld pools*, PhD Thesis (2008).
3. Mougnot J., Gonzalez J.-J., Freton P. *Plasma-weld pool interaction in tungsten inert-gas configuration*, J. Phys. D: App. Phys.(2004).
4. Jainakov A., Usenkanov J., Sultangazieva R. *On joint modeling of processes in electric arc plasma and melted metal*, 6 general assembly of federation of engineering institutions of Islamic countries, Almaty (1999)
5. Жайнаков А.Ж., Султангазиева Р.Т., Усенканов Дж.О. *О влиянии термокапиллярной конвекции на параметры расплавленного электрической дугой металла*, Доклады 3 традиционной казахстанско-российской научно-практической конференции "Математическое моделирование научно-технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности Алматы (2000).

Модель гидравлического разрыва пласта на основе механики и фильтрации в гетерогенной среде

В.И. Пеньковский¹, Н.К. Корсакова¹ и Д.Ж. Ахмед-Заки²

¹ Институт Гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

² Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
penkov@hydro.nsc.ru, kors@hydro.nsc.ru, darhan_a@mail.ru

Аннотация. Предложена новая математическая модель гидравлического разрыва пласта, основанная на понятии гетерогенной, трещиновато - пористой среды. При этом используются предположения, применяемые в теории упругого режима фильтрации. Закачка флюида в пласт сопровождается растяжением скелета породы под воздействием объемных напряжений. Если эти напряжения достигают некоторых критических значений, скелет пласта подвергается упруго-пластическому разрушению с образованием трещин, раскрытие которых на порядки больше среднего радиуса пор. Модель построена на основе уравнений упругого режима фильтрации в гетерогенной пористой среде.

Получены формулы, позволяющие определить величину зоны гидравлического разрыва и степень раскрытия трещин. Проведены расчеты и построены графики зависимости глубины зоны растрескивания и раскрытия трещин для различных значений контура питания скважины. На насыщенной модели пласта проведены эксперименты по влиянию гидравлического разрыва вблизи скважины на ее расход. Эксперименты показали увеличение на порядок притока флюида к скважине.

Ключевые слова: гидравлический разрыв, трещиновато-пористая среда, объемные напряжения, совместность деформаций, фильтрация в гетерогенной среде.

1 Введение

Построение математической модели, которая была бы адекватной реальному процессу гидравлического разрыва пласта (ГРП), представляет собой довольно сложную проблему. Отчасти эту сложность можно объяснить отсутствием в научной литературе достоверных экспериментальных исследований, результаты которых могли бы составить основу для построения математической модели. Эксперименты с механическим разрывом однородных, не пористых и не насыщенных флюидом пластин (см., например, [1]) не отражают в достаточной степени процесс гидравлического разрыва реального пласта.

С другой стороны, имеющиеся полевые данные весьма скудны и относятся, главным образом, к фиксации последствий, а не к установлению основных факторов, влияющих на ГРП. Практическое применение ГРП указывает на его эффективность в части увеличения, по крайней мере, на первоначальном этапе, притока углеводородов к скважинам, подвергавшимся воздействию гидравлического разрыва.

По-видимому, первыми попытками построения математической модели гидравлического разрыва пласта были работы [2,3]. Ю.П. Желтов создал методику инженерного расчета ГРП. В качестве исходных данных принимались характеристики скважины, пласта и жидкости разрыва (вода с песком), темп закачки. Определялась длина, раскрытие и проницаемость одиночной трещины ГРП, устьевое давление на скважине, продолжительность процесса разрыва.

В подходе Перкинса-Керна [3] задача о гидравлическом разрыве пласта одиночной трещиной сводится к решению нелинейного интегро - дифференциального уравнения, которое позволяет определить длину и раскрытие трещины. Обзор других математических моделей

дан в работе [4]. Отметим здесь работы [5-8], в которых в той или иной модификации развивались идеи исследований процесса скважинного гидравлического разрыва пласта при наличии одной трещины. Предсказать ориентацию такой трещины в пласте практически невозможно. Случаи с образованием системы из нескольких трещин не рассматривались.

Ниже предлагается математическая модель ГРП, основанная на иных представлениях, а именно, предполагается, что при гидравлическом разрыве пласта вокруг скважины образуется гетерогенная трещиновато-пористая среда с некоторой плотностью распределения числа трещин. Появление трещин возникает в случае, когда объемные напряжения, растягивающее скелет породы, достигают предельного значения.

2 Упругий режим фильтрации в гетерогенной пористой среде.

Выражение для свободной упругой энергии при всестороннем растяжении (сжатии) упругого материала имеет вид

$$F = \mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ii})^2 + \frac{K}{2}u_{ii}^2,$$

где $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ - модуль объемного растяжения, u_{ik} - относительные деформации, λ, μ - коэффициенты Лямэ, напряжения $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, p - давление, σ_{ik} - символ Кронекера. В соответствии с законом Гука $\sigma_{ik} = Ku_{ii}\sigma_{ik}$, и соотношением для первого инварианта тензора деформаций

$u_{11} + u_{22} + u_{33} = \Delta V/V = \Delta p/K$ можно записать дифференциальное уравнение для изменения объема при указанной выше деформации среды

$$\beta = \frac{1}{K} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp},$$

где V - выделенный объем среды, $\beta = \frac{3(1-2\nu)}{E}$ - коэффициент сжимаемости (упругоемкости) среды, E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Интегрируя выписанное уравнение с учетом условий равновесия скелета пористой среды с флюидом, заполняющим поровое пространство, получим

$$V = V_0 \exp(\beta(p - p_0)).$$

Здесь индекс 0 обозначает величины в состоянии равновесия. Применительно к объему порового пространства в единице физического объема (пористости m) эта формула приобретает вид

$$m(p) = m_0 \exp(\beta_s(p - p_0)). \quad (1)$$

Пористость невозмущенной части пласта $m_0 \approx 0.2$ общий коэффициент упругости $\beta = m\beta_f + \beta_s \approx 1,6 * 10^{-4}(\text{МПа})^{-1}$ включает упругость флюида $\beta_f \approx 10^{-3}(\text{МПа})^{-1}$ для нефти и $\approx 3 * 10^{-4}(\text{МПа})^{-1}$ для воды, и упругости скелета породы $\beta_s \approx 10^{-4}(\text{МПа})^{-1}$ (1 атм=0,1 МПа) [9,11]. Из формулы (1) следует, что при репрессии (бурении скважины, производстве ГРП – гидравлического разрыва пласта) $p > p_0$ и пористость пласта возрастает $m(p) > m_0$, при депрессии (вызове притока) $p < p_0$ и пористость убывает $m(p) < m_0$. Режимы репрессии и депрессии могут характеризоваться своими значениями коэффициентов β_+ и β_- упругости, вычисляемыми по модулям Юнга и коэффициентам Пуассона для циклов растяжения и сжатия соответственно.

Изменение пористости влияет на величину проницаемости пласта. Из известной формулы Козени-Кармана следует, что зависимость проницаемости пористого материала от

его пористости с точностью величин более высокого порядка может быть выражена в виде $k(m) \approx A_c m^3$, где коэффициент A_c обратно пропорционален квадрату удельной поверхности порового пространства, извилистости поровых каналов и зависит от среднего размера частиц, слагающих скелет среды. В равновесном состоянии $k_0 = k(m_0) = A_c m_0^3$. Проницаемость пласта будет возрастать при увеличении давления (репрессии) или убывать при снижении давления (депрессии) в соответствии с формулой Козени по закону

$$k_{\pm} = k_0 \exp(3\beta_{\pm}(p - p_0)), \quad (2)$$

где β_+ - коэффициент упругого растяжения скелета, β_- - коэффициент сжатия. Комбинация уравнения движения флюида в поровом пространстве среды в виде закона Дарси с законом сохранения массы приводит к уравнению пьезопроводности, описывающему упругий режим фильтрации. Режимам репрессии и депрессии соответствует свой коэффициент пьезопроводности. Задача о смене режимов фильтрации, когда коэффициент пьезопроводности изменяется со сменой знака производной от давления по времени, была рассмотрена в работе [10]. Здесь же было отмечено, что «при упруго-пластическом режиме фильтрации деформация породы в каждом элементарном объеме происходит почти мгновенно, то есть, текучести породы не наблюдается».

Физико-химические процессы, протекающие в гетерогенных средах, зависят от характера распределения размеров пор в континуумах. Обычно моды распределений размеров пор во вложенных средах, по крайней мере, на порядок отличаются друг от друга. Поэтому пористость сред, как момент второго порядка от функции распределения размеров пор, и проницаемость, как момент четвертого порядка, существенно отличаются в каждой из вложенных сред.

Количество параметров, характеризующих гетерогенную среду, больше набора параметров, определяющих однородную сплошную среду. Важнейшим является параметр, ответственный за обмен теплом, массой флюида или растворенного в нем веществом между континуумами. Интенсивность обмена зависит от соотношения характерных геометрических параметров вложенных сред: размера блоков и раскрытия трещин, например, в случае трещиновато-пористой среды, а также от характера процесса и свойств подвижного флюида.

Рассмотрим процесс движения однородной жидкости, который происходит в обоих континуумах 1, 2 [12] и подчиняется закону Дарси:

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu} \text{grad} p_i \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

где v_i, p_i, k_i, μ - скорость, давление, проницаемость сред и вязкость флюида, и закону сохранения массы

$$\frac{\partial(m_i \rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i) + q_i = 0 \quad (4)$$

В этом уравнении m_i, ρ, t, q_i - пористость, плотность жидкости, время и плотность источников или стоков, действующих в каждой из сред. Если в среде 1 или 2 нет иных внешних источников или стоков, то должно быть выполнено условие обмена объемом перетекающей жидкости

$$q_2 = -q_1 = q.$$

Заметим, что система уравнений (3)-(4) применима и для описания процессов теплопередачи и конвективной диффузии растворенного вещества.

Модель процесса теплопроводности в гетерогенной среде была впервые предложена Л.И.Рубинштейном [12]. Подобная модель была рассмотрена в работе [13] при построении уравнений движения однородной жидкости в среде с двойной пористостью (один из вариантов гетерогенной среды). Основанная на законах (2.1) и (2.2), система уравнений имеет вид:

$$\frac{k_i}{\mu} \Delta p_i = \beta_i \frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

Здесь $\beta_i = dm_i/dp_i$ - коэффициенты сжимаемости порового пространства вложенных сред. Если в порах содержится сжимаемая жидкость, то в коэффициенты добавляется дополнительное слагаемое, а уравнения (5) становятся нелинейными.

Уравнения системы (5) связаны друг с другом перетоками $q_1 = -q_2 = -q$. Они определяются [12,13], на основе анализа размерностей по формуле

$$q = \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2),$$

где α - параметр, характеризующий внутренний обмен в гетерогенной среде. Аналогичная формула обмена применялась в работе [14] при описании процесса несмешивающейся фильтрации, сопровождающейся процессами диффузии, переноса солей и тепла. Систему (5) запишем в развернутом виде

$$\frac{k_1}{\mu} \Delta p_1 = \beta_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2), \quad \frac{k_2}{\mu} \Delta p_2 = \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2) \quad (6)$$

Если проницаемости вложенных сред 1 и 2 по величине существенно отличаются друг от друга, например, в случае фильтрации в трещиновато-пористой среде, то систему (6) можно упростить [13].

Пусть среда 1 представляет собой разреженную систему относительно крупных трещин, а среда 2 - мелкопористые блоки. Объем трещин меньше объема блоков, а их проницаемость больше проницаемости блоков, то есть, $k_2 \ll k_1$ и $\beta_1 \ll \beta_2$. Сравнивая перетоки, в системе (6) устанавливаем, что первым слагаемым справа в первом уравнении системы и слагаемым слева во втором уравнении в сравнении с другими аналогичными членами можно пренебречь. В результате из первого уравнения системы (6) можно выразить давление в среде 2 в виде (индекс 1 опущен)

$$p_2 = p - \eta \Delta p, \quad (7)$$

а для давления p в среде 1 получаем уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p) = \Delta p \quad (8)$$

В уравнениях (7) и (8) приняты обозначения $\tau = tk_1/(\mu\beta_2)$, $\eta = k_1/\alpha$

Таким образом, система (6) распадается на два уравнения (7) и (8), которые можно решать последовательно.

Если параметр обмена устремить к нулю, то система вырождается в одно уравнение, описывающее упругий режим фильтрации жидкости в однородной гомогенной среде.

В работе [13] было отмечено, что введение в закон Дарси (3) дополнительного члена релаксации в виде

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla p - \eta \beta \frac{\partial}{\partial t} \nabla p$$

в комбинации с законом сохранения массы тоже приводит к уравнению (8).

2.1 Упруго-фильтрационная модель ГРП (гидравлического разрыва пласта).

Гидравлический разрыв пласта, как отмечено выше, происходит в случае, когда величина репрессии $p - p_0$ достигает критического значения $p_* - p_0$ при котором растяжение скелета и увеличение пористости, определяемое формулой (1), приводят к разрушению скелета с образованием трещин внутри пласта. Если создать давление во флюиде, находящемся внутри скважины, $p_w > p_*$, то в кольцевой области $r_* \geq r \geq r_w$ может образоваться система трещин, и прежде однородная среда превратится в гетерогенную. В процессе осуществления ГРП внешняя граница области $r = r_*(t)$ растрескивания может расширяться с течением времени t . На этой границе давление жидкости $p(r_*) = p_*$ можно считать постоянным. Таким образом, в процессе гидравлического разрыва образуются три континуума, в которых движется жидкость: вложенные друг в друга континуум 1 - система трещин и континуум 2 - система «блоков», состоящих из несколько измененной породы, а также континуум 3 - часть не подвергшегося растрескиванию пласта (Рис. 1).

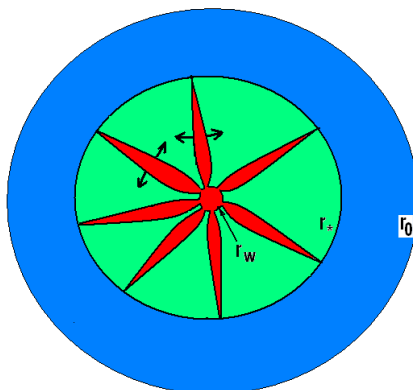


Рис. 1. Схема перераспределения давления при возникновении трещин.

Даже при значительной репрессии на пласт, порядка нескольких десятков МПа, величина показателя при экспоненте в формулах для пористости и проницаемости $\beta_+(p - p_0)$ будет малой в сравнении с единицей, и поэтому можно в разложениях экспонент ограничиться двумя членами. При этом изменения пористости m_2, m_3 в областях 2 и 3 будут малыми в сравнении с начальным их значением m_0 . Несколько большие изменения будут наблюдаться в величинах проницаемости k_2, k_3 . Начальная проницаемость в равновесном состоянии пласта k_0 обычно составляет величину порядка 100 мД (миллидарси) $\approx 10^{-13} \text{ м}^2$.

Пористость m_1 и проницаемость k_1 системы трещин (континуум 1) определяется величиной их раскрытия h и плотностью распределения трещин в пространстве. Известно, что средняя объемная скорость v_{11} движения вязкой жидкости в щелевом пространстве между двумя пластинами, расположенными друг от друга на расстоянии h , определяется формулой $v_{11} = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}$. Сравнивая эту формулу с законом Дарси, получим, что проницаемость k_{11} щели для потока жидкости оценивается величиной $k_{11} = h^2/12$. Для средних величин раскрытия трещин во время разрыва пласта проницаемость k_1 континуума 1 с конечным числом трещин будет на порядки больше проницаемости k_2 блоков (континуума 2 гете-

рогенной среды). Таким образом, применение модели гетерогенной трещиновато-пористой среды для описания процесса ГРП можно считать правомерным.

Аналогично выводу формулы (1) для пористости континуума 1 трещин в результате интегрирования уравнения, описывающего деформацию объема трещин, получим формулу

$$m_1(p) = A(e^{\beta(p-p_*)} - 1). \quad (9)$$

Она удовлетворяет условию появления трещин $m_1(p_*) = 0$. Коэффициент A представляет собой объемную долю щелей в единице объема физического пространства и подлежит дальнейшему определению. Он, очевидно, должен быть пропорционален величине раскрытия трещин и плотности распределения их числа N . В соответствии с условием совместности деформаций изменение пористости блоков в области $r \in (r_w, r_*)$ с начального значения $m_* = m_2(p_*) = m_3(p_*) = m_0 e^{\beta(p_*-p_0)}$ будет равна изменению пористости трещин с обратным знаком, то есть $dm_2 = -dm_1$. Образование трещин приводит к перераспределению нагрузки на скелет породы. Разница между давлением в трещинах и давлением в блоках уменьшается, благодаря чему величина пористости блоков будет сохранять значение m_* .

$$m_2 = m_* e^{\beta(p_2-p_*)} - m_1 = m_0 e^{\beta(p_*-p_0)} e^{\beta(p_2-p_*)} - m_1 = m_0 e^{\beta(p_2-p_0)} - A(e^{\beta(p-p_*)} - 1) = m_*. \quad (10)$$

Раскладывая в (9) экспоненту в ряд, ограничиваясь членами первого порядка малости, получим выражение $m_1 \approx A\beta(p - p_*)$. С другой стороны, по определению пористости, на любом расстоянии r от оси скважины $m_1 = 2Nh/2\pi r$. Из полученных соотношений находим объемную долю щелей

$$A = F/(\pi r \beta(p - p_*)). \quad (11)$$

Здесь величина $F = Nh$ обозначает степень растрескивания породы. Производя разложение в (10), с точностью до малых членов второго порядка для степени растрескивания получим формулу

$$F = \pi r \beta(p - p_*) m_0 \beta(p_2 - p_*) \quad (12)$$

На скважине давление в трещинах и блоках равно $p = p_2$. Из формулы (12) для растрескивания пласта F_w вблизи скважины получим выражение

$$F_w = \pi r_w \beta(p_w - p_*) m_0 \beta(p_w - p_*) \quad (13)$$

где p_w - давление на скважине. Предполагая число трещин неизменным, из формул (12), (13) найдем расчетную формулу для отношения величины раскрытия трещин

$$\frac{F}{F_w} = \frac{h}{h_w} = \frac{r}{r_w} \frac{(p - p_*)(p_2 - p_*)}{(p_w - p_*)^2} \quad (14)$$

2.2 Постановка и решение задачи о ГРП.

Из приведенных выше величин, управляющих гидравлическим разрывом пласта, следует, что с достаточной для инженерной практики точностью во внешней области $r > r_*$ можно положить $m_3 \approx m_0$ и $k_3 \approx k_0$. В области гидравлического разрыва $r \in (r_w, r_*)$ $m_2 = m_0 - m_1$, $m_1 = Nh/(\pi r)$. Из неразрывности потоков флюида следует балансовое соотношение

для общего радиального потока v_0 флюида через произвольную окружность в гетерогенной среде

$$v_0 = \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2; \lambda = m_1/(m_1 + m_2) \approx m_1/m_0 \quad (15)$$

Выпишем основные уравнения фильтрации в гетерогенной среде. Восстанавливая нижние индексы для обозначения искомым величин в уравнениях (12), (13), получим для области $r \in (r_w, r_*)$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p_1) = \Delta p_1, p_2 = p_1 - \eta \Delta p_1, \quad (16)$$

где $\tau = th^2/(12\mu\beta_2)$, $\eta = h^2/(12\alpha)$, α - параметр обмена флюидом между континуумами гетерогенной среды, β_2 - коэффициент общей (скелет плюс флюид) объемной упругости блоков континуума 2. Во внешней области $r > r_*(t)$ давление p_3 удовлетворяет обычному уравнению пьезопроводности

$$\frac{\partial p_3}{\partial t} = \kappa \Delta p_3, \quad (17)$$

где коэффициент $\kappa = k_0/(\mu\beta_3)$. Решение уравнений (16) и (17) должно удовлетворять краевым условиям

$$p_1(r_w) = p_2(r_w) = p_w; p_2(r_*) = p_3(r_*) = p_*; r \rightarrow \infty, p_3 \rightarrow p_0, \quad (18)$$

начальным условиям

$$t = 0, p_3 = p_0, r_* = r_w \quad (19)$$

и условию неразрывности фильтрационного потока на границе пласт-гетерогенная среда

$$r = r_*(t); v_3 = v_0. \quad (20)$$

Рассмотрим стационарное движение в системе континуумов при наличии в пласте некоторого контура питания $r = r_0$. Последнее из граничных условий (18) заменим условием $p_3(r_0) = p_0$. В этом случае $p_1 = p_2 = p$ и $\Delta p_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk_1(h) \frac{\partial p_1}{\partial r}) = \Delta p_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk_0 \frac{\partial p_2}{\partial r}) = 0$. Отсюда получаем

$$rv_1 = C_1 = \frac{(p_* - p_w)k_1(h)}{\ln(r_*/r_w)}; rv_2 = C_2 = \frac{(p_* - p_w)k_0}{\ln(r_*/r_w)},$$

Из (15) и условия непрерывности потока при $r = r_*$ следует соотношение

$$\frac{k_0(p_* - p_0)}{\ln(r_0/r_*)} = \frac{p_w - p_*}{\ln(r_*/r_w)} (\lambda k_1(h) + (1 - \lambda)k_0). \quad (21)$$

В частности, на границе зоны растрескивания $\lambda = 0$ и для определения глубины зоны $r = r_*$ (длины трещин) из выражения (21) после преобразований получим удобную для инженерных приложений формулу

$$r_* = r_0^{\frac{p_w - p_*}{p_w - p_0}} r_w^{\frac{p_* - p_0}{p_w - p_0}}.$$

Если ввести обозначение $\gamma = (p_w - p_*)/(p_w - p_0)$, то предыдущая формула приобретет простой вид

$$r_* = r_w (r_0/r_w)^\gamma \quad (22)$$

Примем $p_w=50$ МПа, $p_*=35$ МПа, $p_0=25$ МПа, $r_0=300$ м, $r_w=0,125$ м. Подставляя эти значения в (22), найдем $r_*=13,32$ м.

Распределение давления в зоне растрескивания, удовлетворяющее условиям $p(r_w) = p_w; p(r_*) = p_*$, имеет вид

$$p = p_w - \frac{p_w - p_*}{\ln(r_*/r_w)} \ln(r/r_w).$$

Подставляя выражение для давления в формулу (14), после некоторых преобразований для величины раскрытия трещины получаем зависимость

$$h/h_w = r/r_w (1 - \ln(r/r_w)/\ln(r_*/r_w))^2 \quad (23)$$

Функция $h(r)$ не является монотонной и достигает локального максимума

$$h = h_m = h_w \frac{4r_*/r_w}{e^2 \ln^2(r_*/r_w)}$$

в точке $r = r_m = r_* e^{-2}$.

Поскольку проницаемость блоков значительно меньше проницаемости трещин, то равновесное состояние между давлением флюида в гетерогенной области пласта будет устанавливаться достаточно быстро. Графики функций $h(r)$ для различных значений контура представлены на Рис. 2. Исходные параметры приведены выше.

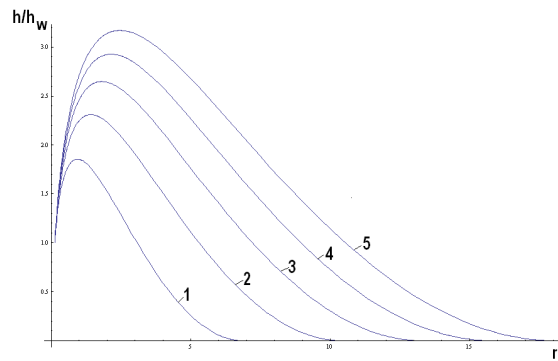


Рис. 2. Раскрытие трещин. Кривые 1-5 соответствуют значениям $r_0 = 100-500$ м.

Для инженерных расчетов можно воспользоваться известным методом последовательной смены стационарных состояний [16], считая величину r_0 , где $p = p_0$, зависящей от времени и определяющей положение радиуса влияния скважины гидравлического разрыва в пласте с заданным общим коэффициентом упругости β .

Стационарное распределение давления в области $r_* < r < r_0$ имеет вид

$$p_3 = \frac{p_* - p_0}{\ln(r_*/r_0)} \ln \frac{r}{r_0} + p_0. \quad (24)$$

Функция (24) удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и условиям сопряжения фильтрационного потока (20). Умножим обе части уравнения (17) на множитель rdr и проинтегрируем его в пределах $r = r_*$, $r = r_0$. С учетом формулы дифференцирования интеграла с переменными пределами, условия равенства нулю фильтрационного потока на границе возмущения, а также зависимостей (22) и (23) после преобразований получим дифференциальное уравнение для определения радиуса влияния r_0

$$1 = \ln x \frac{dW(x)}{d\tau_1} \quad (25)$$

где приняты обозначения $x = r_0(\tau_1)/r_w$, $\tau_1 = 2\kappa(\lambda_* - 1)t/((1 - \gamma)r_w^2)$, а функция $W(x)$ имеет вид

$$W(x) = \left[1 - \frac{0.5(\lambda_* - 1)}{(\gamma - 1) \ln x}\right] x^2 (1 - x^{2(\gamma-1)}) + x^{2\gamma} - x^2. (\lambda_* = p_*/p_0)$$

Интегрируя (25) с учетом начального условия $x(1) = 0$, получим зависимость

$$\tau_1(x) = W(x) \ln x - \int_1^x \frac{W(x)}{x} dx. \quad (26)$$

Как показывают расчеты, для практических приложений в формуле (26) достаточно справа сохранить первое слагаемое.

3 Заключение

На основе уравнений упругого режима фильтрации в гетерогенной пористой среде построена модель гидравлического разрыва первоначально однородного пласта при закачке жидкости со значительной репрессией. Получены аналитические формулы, позволяющие определить основные характеристики прискважинной зоны в результате применения гидравлического разрыва пласта с низкой проницаемостью. Проведенные на насыпной модели пласта эксперименты показывают эффективность ГРП на приток полезного продукта к скважине

Список литературы

1. Корнев В.М., Демешкин А.Г. Модель скачкообразного продвижения вершины трещины гидроразрыва при отсутствии фильтрации // ПМТФ. 2004. –Т. 45, №3. –С.164-179.
2. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. №5. –С.3-41.
3. Kern L.R., Perkins T.K. Width of hydraulic fractures // J.Petrol. Technol. 1961. –V. 13. –P. 937-949.
4. Есипов Д.В., Каранаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислит. технологии. 2014. –Т. 19, №2. –С.33-61.
5. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. –Т. 20. –С. 475-486.
6. Гарипов Т.Г. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в упругой среде // Математич. моделир. 2006. –Т.18, №6. –С.53-59.
7. Каранаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещин пропантом // Вестн. НГУ. Информ. технологии. 2014. –Т.12, вып. 1. –С. 19-33.
8. Shelukhin V.V., Baikov V.A., Golovin C.V., Davletbaev A.Y., Starovoitov V.N. Fractured water injection wells: Pressure transient analysis // Int. Journal of Solids and Structures. 2014. –V. 51, Issue 11-12. –P. 2116-2122.
9. Щелкачев В.Н. Разработка пластов при упругом режиме. М.: «Недра», 1975.
10. Баренблатт Г.И., Крылов А.П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации // 1955. Изв. АН СССР. –ОТН. №2. –С.5-13.
11. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: «Недра», 1975, – 216 с.

12. Рубинштейн Л.И. К вопросу о распространении тепла в гетерогенных средах. // Изв. АН СССР. Сер. географ. 1948. –Т.12, №1. –С. 27-45.
13. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. –Т 25. –С. 852-864.
14. Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И. Многофазная фильтрация и электромагнитное зондирование скважин. –Алматы: «Эверо», 2014.
15. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: «Наука», 1977.
16. Чарный И.А. Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложения к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов // Изв. АН СССР. ОТН. 1949. №3. –С. 323-342.

Моделирование нестационарных контактных задач динамики упругих сред

Б.Т. Сарсенов

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
bakytbek.sarsenov@iktu.kz

Аннотация. В настоящей работе дана постановка начально-краевой контактной задачи при жестком сцеплении прямоугольного тела и породного массива, приведены определяющие уравнения движения, дан выбор точечной расчетной схемы и шаблона. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Решена модельная задача для исследования напряженно - деформированного состояния поверхностных сооружений, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях. Построены дифракционные картины процессов распространения, отражения и преломления сейсмических волн, характеризующие поля скоростей и напряжений в среде и поверхностном включении, осциллограммы скоростей и напряжений на дневной поверхности, и проведено исследование волновых процессов при разном типе сейсмического воздействия, моделирующего процессы образования в земной коре трещин отрыва и сдвига.

Ключевые слова: распространения упругих волн, трещина, землетрясение, поле скоростей, изолинии напряжения, осциллограммы скоростей.

1 Введение

Исследование процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре и их воздействия на наземные сооружения относится к актуальным проблемам геофизики, сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Характерным для землетрясений является возникновение в земной коре под действием тектонических напряжений глубинных трещин. При этом происходит скачкообразный сброс напряжений на трещине, порождающий нестационарные упругие волны, которые, дифрагируя на земной поверхности, порождают поверхностные волны, разрушительные для наземных сооружений. Здесь разработана математическая модель для изучения таких явлений. Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т.Тарабриным [1]. В настоящей работе этот метод развит для решения контактных задач взаимодействия упругих тел с угловыми точками в условиях плоской деформации [2], [3]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [4]. Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной

поверхности и упругого тела и дифракционные картины полей скоростей и напряжений при отражении и преломлении ударных волн. Исследовано влияние параметров массива, глубины трещины и характера возникающих ударных волн на напряженно-деформированное состояние среды и упругого тела. Также изучено напряженно-деформированное состояние упругого тела (сооружения) в зависимости от расстояния до эпицентра.

2 Постановка контактной задачи

Рассмотрим составную неоднородную упругую среду в условиях плоской деформации: полупространство $x_1 \geq 0$ однородной изотропной упругой среды (среда D_1) с плотностью ρ_1 и коэффициентами Ламе λ_1 и μ_1 , и поверхностное включение (среда D_2 – изотропное упругое тело с высотой d_1 и шириной $2d_2$) с плотностью ρ_2 и коэффициентами Ламе λ_2, μ_2 , (рис.1).

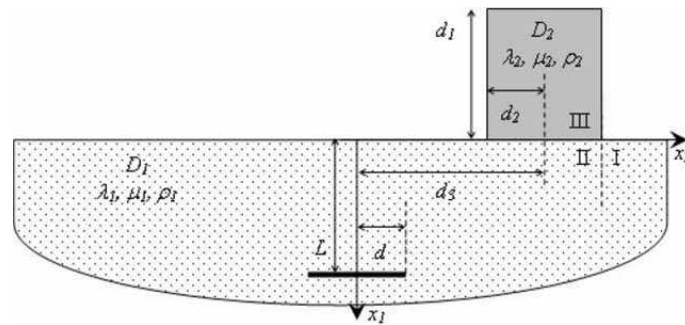


Рис. 1. Упругое полупространство D_1 с поверхностным включением D_2

Предполагается, что до начального момента времени среда находится в состоянии покоя:

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0, \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (1)$$

а при $t \geq 0$ происходит сброс напряжений на горизонтальной трещине S , которая расположена на глубине L ($x_1 = L, |x_2| \leq d$).

Границы полупространства и включения свободны от внешних нагрузок:

$$\sigma_{1j}^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0, |x_2 - d_3| > d_2, \quad (2)$$

$$\sigma_{1j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = -d_1, |x_2 - d_3| \leq d_2, \quad (3)$$

$$\sigma_{2j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } |x_2 - d_3| = d_2, 0 \leq x_1 \leq d_1, \quad (4)$$

где d_3 – горизонтальная координата центра масс упругого включения (см. рис.1).

Условия на контактной границе пространства и включения отвечают требованиям полного сцепления (жесткий контакт):

$$v_j^{(1)} = v_j^{(2)}, \sigma_{1j}^{(1)} = \sigma_{1j}^{(2)} \quad (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0, |x_2 - d_3| \leq d_2. \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}(x, t)$ – компоненты тензора напряжений k -ой среды в точке $x = (x_1, x_2)$ в момент времени t , $v_j^{(k)}(x, t)$ – компоненты скоростей перемещений этих сред.

Так как на бесконечности отсутствуют источники возмущений, то очевидным является требование:

$$u_j \rightarrow 0, \quad \sigma_{ij} \rightarrow 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{при } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Для описания движения упругой среды используются две системы дифференциальных уравнений:

$$\sigma_{i\beta,\beta} + F_i^{(k)} = \rho_k \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} \quad (i, k = 1, 2) \quad (6)$$

и соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda_k u_{\beta,\beta}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_k (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (7)$$

Здесь по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 2 (тензорная свертка), $u_i^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_k}$, $F_i^{(k)}$ – компоненты объемной силы в k -ой среде, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для моделирования сброса напряжений на трещине в полупространстве введена объемная сила $\mathbf{F}^{(1)}$, компоненты $F_i^{(1)}$ которой определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на горизонтальной трещине S [4]. В данном случае они имеют следующий вид:

$$F_i^{(1)} = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_S(x) = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta(x_1 - L)H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины, \mathbf{n} – единичная нормаль к ее поверхности, здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1, 0)$, $H(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(x_1)$ – дельта-функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_\beta [\sigma_{i\beta}(x)]_S = P_i(x, t), \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (9)$$

Здесь в расчетах он имеет импульсный вид:

$$P_i(x, t) = P t e^{-at} H(t) \quad (a > 0), \quad (10)$$

характерный для землетрясений. При описанных условиях необходимо определить напряженно-деформированное состояние среды и поверхностного включения $D_1 \cup D_2$ при $t > 0$.

3 Определяющие уравнения

Решение задачи удобно отыскивать в безразмерном пространстве переменных и искомым функций, которые получаются после введения обозначений [5]

$$c_1^{(k)} = \frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad c_2^{(k)} = \frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad x_i = \frac{x_i^*}{L^*}; \quad t = \frac{t^* c_1^{(m)*}}{L^*};$$

$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_m^*}; \quad v_i^{(k)} = \frac{u_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho_m^* (c_1^{(m)*})^2}; \quad F_i^{(k)} = \frac{F_i^{(k)*} L^*}{\rho_m^* (c_1^{(m)*})^2}$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \gamma_{22}^{(k)} = \rho_k \left(c_1^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{12}^{(k)} = \gamma_{21}^{(k)} = \rho_k \left(c_2^{(k)} \right)^2; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \gamma_{11}^{(k)} - 2\gamma_{12}^{(k)}$$

Здесь индекс * придается размерным величинам; индекс m относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей; L^* – характерный линейный размер; $c_1^{(k)*} = \sqrt{\frac{\lambda_k^* + 2\mu_k^*}{\rho_k^*}}$, $c_2^{(k)*} = \sqrt{\frac{\mu_k^*}{\rho_k^*}}$ – скорости распространения продольных (сжатия-расширения) и поперечных (сдвиговых) волн в k -той среде.

После введения безразмерных величин, из уравнений (6), (7) после простых преобразований получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} \rho_k \dot{v}_i^{(k)} &= \sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ij}^{(k)} (v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)}) \frac{1}{(1+\delta_{ij})} + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}, \\ &(i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) имеет два семейства характеристических конусов. Образующие этих конусов совпадают с бихарактеристиками уравнений (11). Вдоль характеристик, лежащих в плоскости $x_\alpha = \text{const}$, уравнения (11) являются функциями только двух переменных $(x_j; t)$ ($j \neq \alpha$). Это дает возможность записать условия на бихарактеристиках как условия на характеристиках в соответствующей одномерной задаче. Соответствующие преобразования можно выполнить, если в системе уравнений (11) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. При этом система уравнений (11) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие направлениям $j=1$ и $j=2$ ($i=1, 2$):

$$\begin{aligned} \dot{v}_i^{(k)} - \rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{(k)} &= a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} &= b_{ij}^{(k)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \rho_k^{-1} (\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)}), \\ b_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ij}^{(k)} v_{j,i}^{(k)} (1 - \delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид:

$$dx_i = \pm \lambda_{ij}^{(k)} dt \quad (14)$$

а условиями на бихарактеристиках являются соотношения:

$$d\sigma_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} dv_i^{(k)} = \left(b_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)} \right] \right) dt \quad (15)$$

здесь $\lambda_{ij}^{(k)} = \sqrt{\rho_k^{-1} \gamma_{ij}^{(k)}} = c_1^{(k)} \delta_{ij} + c_2^{(k)} (1 - \delta_{ij})$. Из (14) видно, что на каждой из двух гиперплоскостей имеются две пары семейств характеристик, определяющие продольные $\lambda_{ii}^{(k)}$ и сдвиговые $\lambda_{ij}^{(k)}$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2$) скорости распространения волн. В каждой из двух плоскостей $(x_j; t)$ имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направлений. Верхний знак соответствует характеристикам положительного, а нижний - отрицательного направлений. Уравнения (14) и (29) соответствуют друг другу при одинаковой паре индексов и при одинаковом расположении знаков. Уравнения (12) и условия (29) используются для отыскания решения сформулированной задачи (1) – (7).

4 Выбор точечной схемы шаблона

Пусть тело $D_1 \cup D_2$ разбивается на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей $x_i = const$ ($i = 1, 2$). Линейные размеры этих ячеек в направлении осей x_1 и x_2 считаются равномерными и равными h . Пересечения линий $x_i = const$ ($i = 1, 2$) образуют узлы. В этих узловых точках отыскиваются значения искомым функций $v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2$) в различные моменты времени $t_n - \tau, t_n, t_n + \tau$ ($n = 1, 2, \dots, N$) с шагом по времени τ . Получившаяся сетка является трехмерной. Точечная сетка, на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек содержит точки, образованные пересечениями бихарактеристик с гиперплоскостями $t = const$. Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек $E_{ij}^{\pm(k)}$, лежащих на координатных линиях $x_j = const$ и отстоящих от точки O на расстояния $\lambda_{ij}^{(k)} \tau$. В дальнейшем значениям функций в точке O приписывается верхний знак "0"; в точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ – нижний "ij" и верхний знак \pm (например, $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$), а в точке A дополнительный индекс не приписывается. Точки O и A представляют собой одну и ту же точку тела в моменты времени, отстоящие друг от друга на один шаг τ по времени (рис.2).

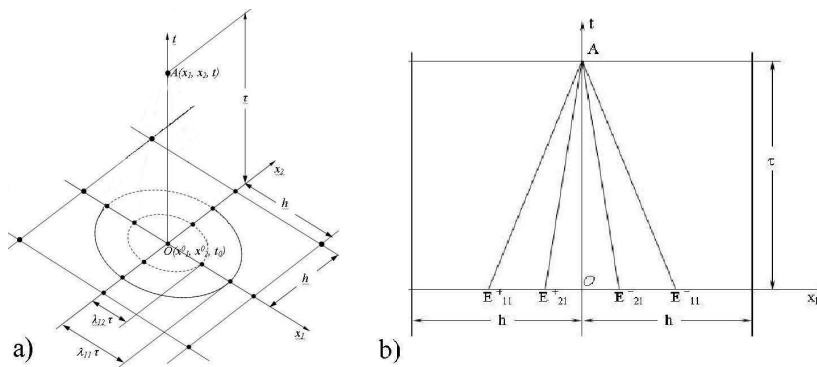


Рис. 2. Точечная схема шаблона: а) трехмерная б) на $x_2 = const$

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости частиц $v_i^{(k)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в точке A на слое по времени t_n , если известны их значения на предыдущем слое t_{n-1} ($n = 1, 2, \dots, N$) в точке O и в прилегающих к ней точках $E_{ij}^{\pm(k)}$.

5 Разрешающие разностные уравнения во внутренних точках

Интегрирование системы уравнений (12) от точки O до точки A и соотношений (29) от точки $E_{ij}^{\pm(k)}$ до точки A методом трапеции позволяет получить выражения следующего типа

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} &= v_i^{0(k)} + \frac{\tau}{2} \left(\rho_k^{-1} \sigma_{ii,i}^{0(k)} + a_{ii}^{0(k)} + F_i^0 + \rho_k^{-1} \sigma_{ii,i}^{(k)} + a_{ii}^{(k)} + F_i^{(k)} \right), \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} + \frac{\tau}{2} \left(\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{0(k)} + b_{ij}^{0(k)} + \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} + b_{ij}^{(k)} \right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} (v_i^{(k)} - v_i^{\pm(k)}) &= \\ = \frac{\tau}{2} \left(b_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[a_{ij}^{(k)} + a_{ij}^{\pm(k)} + F_i^{(k)} + F_i^{\pm(k)} \right] \right), \end{aligned} \tag{17}$$

где система уравнений (16) и (17), состоящая из 13 уравнений, разрешается относительно 13 неизвестных для каждой среды ($k=1, 2$): 5 функций $v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}$ ($v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}$) и их 8 производных $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}$ ($v_{1,1}^{(k)}, v_{1,2}^{(k)}, v_{2,1}^{(k)}, v_{2,2}^{(k)}, \sigma_{11,1}^{(k)}, \sigma_{12,2}^{(k)}, \sigma_{21,1}^{(k)}, \sigma_{22,2}^{(k)}$).

Значения функций в не узловых точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ заменяются величинами, вычисленными по формуле Тейлора с точностью до первого порядка для производных $a_{ij}^{\pm(k)}$ и $b_{ij}^{\pm(k)}$ и с точностью до второго порядка для функций $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ через их значения в узловых точках (x_1^0, x_2^0, t_0) :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\pm(k)} &= a_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial a_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \\ b_{ij}^{\pm(k)} &= b_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial b_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\pm(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j^2}, \\ v_i^{\pm(k)} &= v_i^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив соотношения (18), (24) в (17), затем исключив при помощи (16) переменные $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ и учитывая (18), можно получить восемь уравнений относительно производных $v_{i,j}^{(k)}$ и $\sigma_{ij,j}^{(k)}$ в расчетном слое времени

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \left[\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j,j}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \right] \mp \\ &\mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left(v_{i,j}^{0(k)} + \tau \left[\rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \right] \right) + F_i^{\pm} - F_i^0, \end{aligned} \quad (20)$$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений (27), можно найти неизвестные производные

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{(k)} &= v_{i,j}^{0(k)} + \tau \left(\rho_k^{-1} \sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \right) + \frac{1}{2\rho_k \lambda_{ij}^{(k)}} (F_i^- - F_i^+), \\ \sigma_{ij,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \left(\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j,j}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \right) + \frac{1}{2} (F_i^- + F_i^+ - 2F_i^0), \end{aligned} \quad (21)$$

Систему уравнений (28) можно использовать для определения неизвестных производных как во внутренних, так и граничных узловых точках исследуемой области. Однако важно иметь промежуточные соотношения (27), которые используются при решении систем уравнений, где заданы граничные функции. Подстановка равенств (28) в (16) позволяет получить неизвестные функции $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ во внутренних узловых точках неоднородного тела в момент времени $t_n + \tau$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

6 Разностные уравнения в граничных точках

На граничных линиях $x_j = const$ заданы два компонента напряжения (см. (2) - (4)). В расчетах не могут быть использованы два условия из (27), условия на двух характеристиках, не принадлежащих исследуемой области. Тем самым, по сравнению с внутренними точками, число уравнений (27) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (27), (16) и двух граничных условий из (2) - (4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий также рассматриваются как граничные точки только для отдельных областей $D_1 \cup D_2$. В каждой из этих точек сопряжения число уравнений (27), (16) равно 22, а неизвестных 26.

Замкнутая система уравнений получается, если использовать наряду с уравнениями (16), (27) четыре условия жесткого сцепления полосы и полуплоскости (5).

7 Разностные уравнения в свободных угловых точках

На угловых точках, образовавшихся пересечением двух границ, все условия, заданные на двух границах, должны выполняться. Поэтому в угловых точках задаются четыре условия, которые, взамен четырех условиями на четырех бихарактеристиках, не принадлежащих области $D_1 \cup D_2$, замыкают систему линейных уравнений относительно тринадцати неизвестных.

В верхних угловых точках тела D_2 (рис.1) заданы четыре компоненты тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно-независимыми. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием (3), (4), получаются, что $\sigma_{21,1}^{(k)} = 0$ и $\sigma_{12,1}^{(k)} = 0$. Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (27) и (16).

8 Разностные уравнения в контактных угловых точках

Нижние угловые точки тела D_2 являются контактными точками неоднородной среды $D_1 \cup D_2$, которые имеют особенности. Развивая идеи, впервые описанные в [6], вычисляются разностные уравнения в контактных угловых точках исследуемого тела. В этих особых точках из физических соображений принимается, что компоненты напряжений $\sigma_{22}^{(2)} = 0$ и $\sigma_{12}^{(2)} = 0$ и используются условия контакта (5).

В этих особых точках производные могут терпеть разрывы. Поэтому предполагается, что область D_1 по линии продолжения боковых сторон тела D_2 мысленно разделить на подобласти (I), (II). Тем самым, около особых точек рассматриваются три подобласти (I), (II), (III) (рис.1). Для подобластей (I) и (II) принимаются условия непрерывности функций

$$v_i^{(I)} = v_i^{(II)}, \quad \sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} \quad (i, j = 1, 2), \quad (22)$$

и их производных

$$v_{i,1}^{(I)} = v_{i,1}^{(II)}, \quad \sigma_{i1,1}^{(I)} = \sigma_{i1,1}^{(II)} \quad (i = 1, 2), \quad (23)$$

Двенадцать производных для первой среды и восемь производных для второй среды вычисляются по формуле (28). Подставляя в уравнение (16) производные, найденные таким образом, для каждой подобласти и выполняя условия (5), (22) и (23), вычисляются неизвестные функции в этих точках, как многосвязных узлах совокупности подобластей (I), (II), (III).

Значения производных в узловых точках исследуемой области на нижнем слое по времени вычисляются с использованием центральной разности во внутренних узловых точках, а в граничных точках соответствующим аппроксимациями "вперед" и "назад".

9 Точность и устойчивость численного решения

Необходимое условие устойчивости сеточно-характеристического метода, вытекающего из условия Неймана (спектральный радиус расширенной матрицы не превосходит единицы) отыскивается в виде:

$$\max \left| \frac{\tau \lambda_{ij}^{(k)}}{h} \right| \leq 1 \quad (24)$$

где $\lambda_{ij}^{(k)}$ являются коэффициентами гиперболической системы. Физически такое ограничение означает, что решение в вершине гиперконуса выражается через начальное значение внутри области, ограниченной поверхностью гиперконуса, т.е. решение в искомой точке определяется через область влияния. В дальнейшем при проведении расчетов шаги пространственно - временной сетки выбираются согласно условиям устойчивости (24) которое выражает условие Куранта - Фридрихса - Леви. Многочисленными расчетами экспериментально проверено, что условие $\left| \frac{\tau}{h} \right| \leq \frac{1}{2}$ обеспечивает устойчивость счета для большого момента времени, а также выбор шагов по времени $\tau = 0.025$ и пространства $h = 0.05$ обеспечивает сходимость по сетке (средняя относительная погрешность 0,1%) [2].

10 Дифракция отраженных и преломленных волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине

Расчет был произведен для грунта (D_1) и (D_2) бетона при следующих безразмерных значениях исходных данных: $\rho_1 = 1; c_1^{(1)} = 0.964; c_2^{(1)} = 0.557; \rho_2 = 1; c_1^{(2)} = 1; c_2^{(2)} = 0.612; \tau = 0.025; h = 0.05; d_1 = 1; d_2 = 0.5, L = 4.8; d = 0.45; d_3$ варьируется $d_3 = 0$ и $d_3 = 5$.

Скачок напряжений на трещине задается в виде импульса:

$$P_1(x, t) = 20te^{-10t}H(t), P_2(x, t) = 0,$$

для представления δ - функции Дирака используются дельтаобразные последовательности $\delta_\varepsilon(x)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

$$F_i = F_i^\varepsilon = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_\varepsilon(x_1 - L)H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2.$$

и параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h = 0.05$.

На рис. 3 представлено поле скоростей в упругом полупространстве со свободной дневной поверхностью. Здесь расчеты приведены для моментов времени, когда ударная волна только дошла до дневной поверхности (а) и отразилась от нее (б).

Сброс вертикальных напряжений на трещине порождает продольные ударные волны, а края трещины работают как источники сдвиговых цилиндрических волн (рис.3а). При дифракции волн на свободной поверхности начинает формироваться поверхностная волна, а наложение падающих и отраженных волн формирует в среде сложную дифракционную картину (рис.3б).

На рис.4 представлены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности $x_1 = 0$ в точках с координатой $x_2 = 0, 1, 2, 3$ при дифракции ударных волн. В начале координат $v_2 = 0$, т.к. сброс напряжений происходит симметрично и параллельно оси Ox_1 . Запаздывание появления колебаний на графиках осциллограмм связано движением ударной волны от трещины до точки наблюдения, для которого требуется определенное время, связанное со скоростью распространения упругих волн в среде. В данном случае скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1 = 1$ и $c_2 = 0.577$ соответственно.

Подробно дифракция упругих волн в упругой полуплоскости при сбросе напряжений на трещинах в отсутствии поверхностных включений рассмотрена в [5]. Здесь дадим анализ

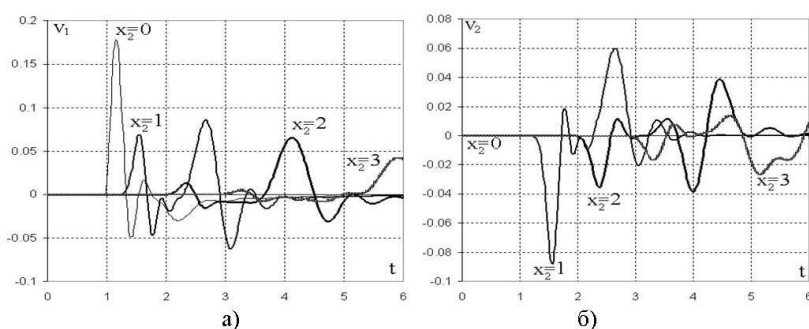


Рис. 3. Векторное поле скоростей упругого полупространства до и после отражения ударных волн: $t = 1$ (а); $t = 2$ (б);

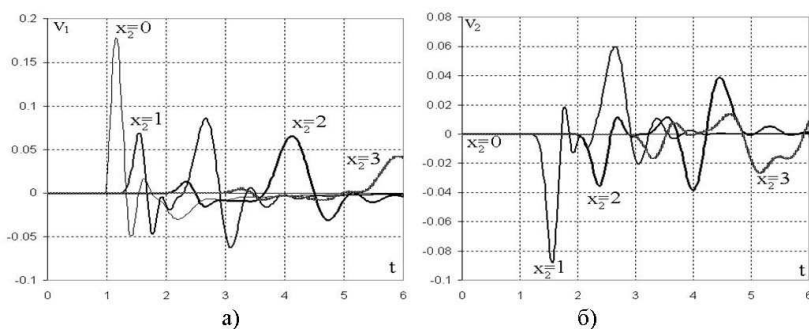


Рис. 4. Осциллограммы скоростей v_1 (а) и скоростей v_2 (б) дневной поверхности, при $x_1 = 0, x_2 = 0; 1; 2; 3$

результатов преломления упругих волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине (трещина разрыва) на поверхностном включении при разном расстоянии включения от эпицентра: для $d_3 = 0$ (включение в эпицентре) и для $d_3 = 5$ (включение на расстоянии $5L$ от эпицентра). Скорости распространения продольных волн в безразмерных величинах составляют $c_1^{(1)} = 0.964$ и $c_1^{(2)} = 1$ соответственно.

На рис. 5, 6, 7 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 , находящегося в эпицентре (а) $d_3 = 0$ и на удалении от него (б) $d_3 = 5$, в разные моменты времени: когда преломленные ударные волны распространились до середины включения и верхняя часть тела еще покоится (рис.5), дошли до его верхней поверхности (рис.6), и отраженные от нее волны дошли до основания (рис.7).

Когда тело находится в эпицентре, в нем вначале преобладают вертикальные перемещения, порожденные продольной волной расширения-сжатия. С течением времени дифракционная картина усложняется с появлением вихревых зон в окрестности угловых точек вблизи свободной поверхности. Возрастают сдвиговые деформации вблизи боковых стенок, формируются поверхностные волны на границе тела.

При удалении тела от эпицентра при подходе ударной волны и ее преломлении в начале движения тела наблюдается резкое горизонтальное смещение нижней части, прилежащей к основанию, при сохранении вертикального положения его верхней части, которое распространяется в его верхнюю часть. Т.е. в теле формируется ударная сдвиговая волна, которая во взаимодействии с продольными и отраженными волнами порождает сложную вихревую дифракционную картину в теле.

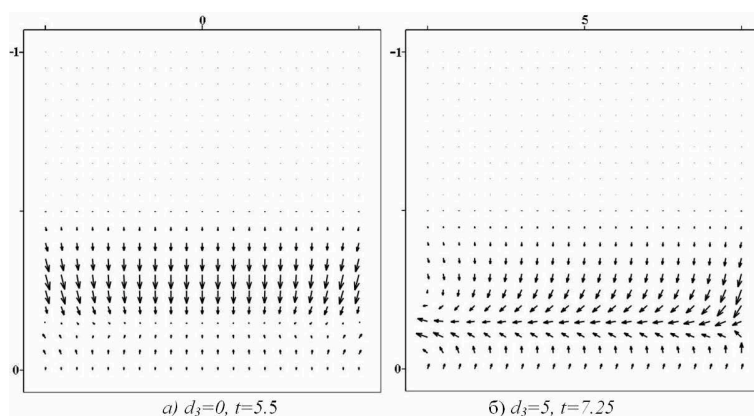


Рис. 5. Векторное поле скоростей в D_2

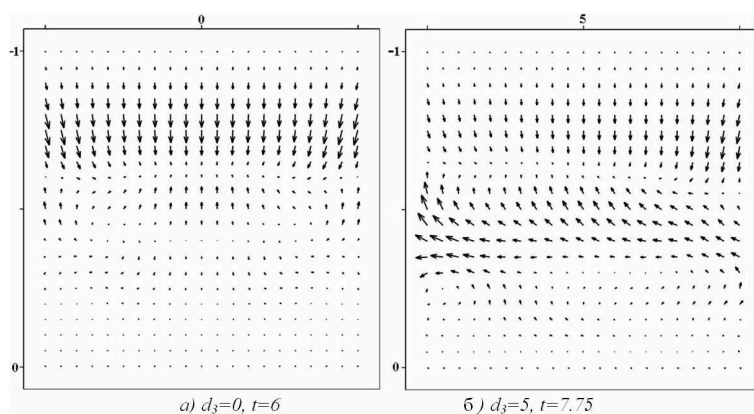


Рис. 6. Векторное поле скоростей в D_2

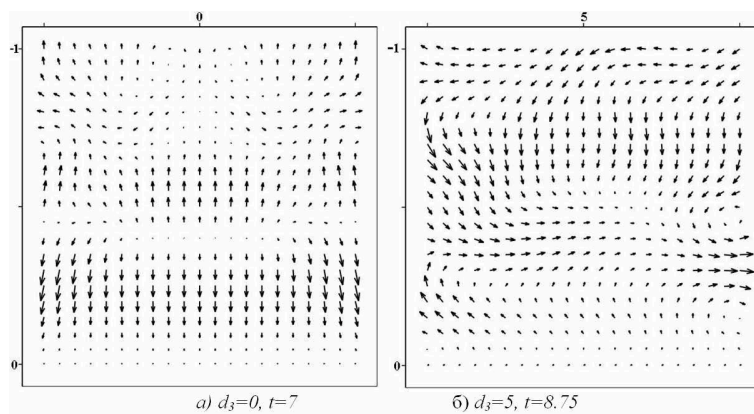


Рис. 7. Векторное поле скоростей в D_2

На рис. 8 – 11, представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжений в разные моменты времени:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{33}\sigma_{22},$$

где $\sigma_{33} = \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{2(c_1^2 - c_2^2)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Они характеризуют распределение давления и интенсивность касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют соответственно объемные и сдвиговые деформации, распространяющиеся в упругом теле D_2 .

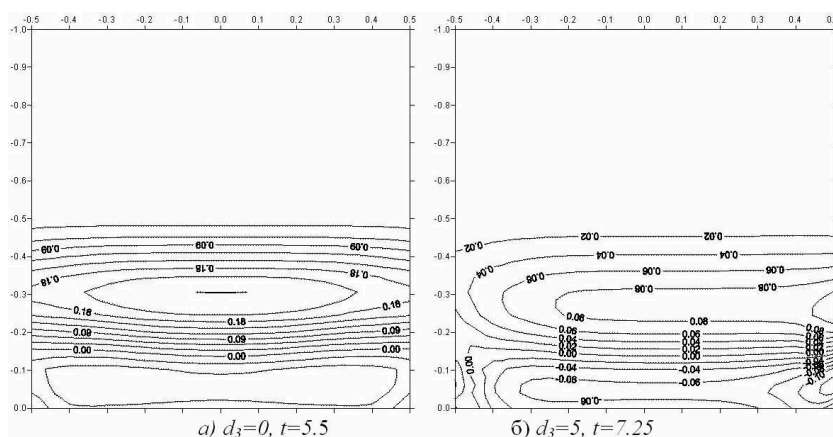


Рис. 8. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2

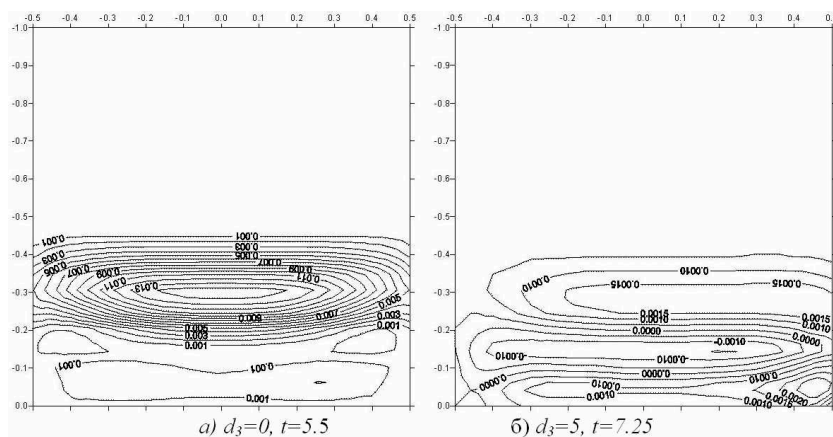


Рис. 9. Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2

Сравнивая рис.8 и 9 видим, что тело в эпицентре подвергается обоим изменениям схожего характера, причем они симметричны относительно оси x_1 , и для тела, смещенного от эпицентра, характер объемных и сдвиговых изменений схожи, но здесь дифракционная картинка несимметрична. С течением времени происходит переотражение волн как от верхних и нижних граней включения, так и от его боковых поверхностей. Ударные волны теряют энергию с расстоянием и временем, поэтому давление и интенсивность касательных напряжений в первом теле сравнительно больше, чем во втором.

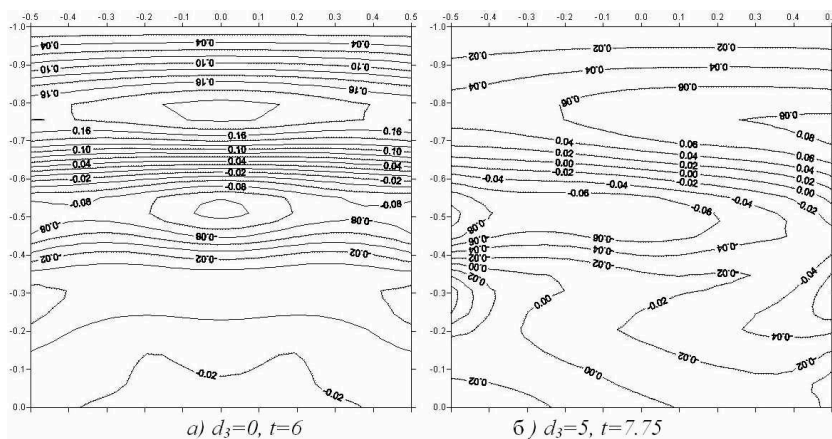


Рис. 10. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2

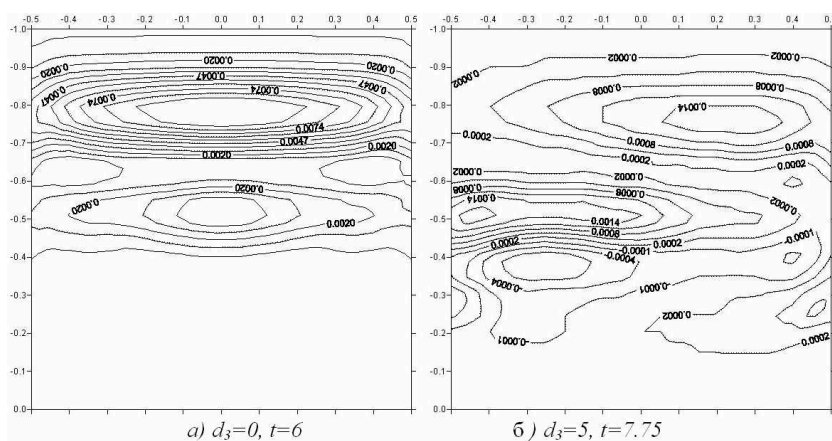


Рис. 11. Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2

11 Заключение

При сильных землетрясениях ударные сейсмические волны, воздействуя на наземные сооружения, порождают ударные волны в конструкциях сооружений, которые их деформируют, приводя сооружение к разрушению. На рис. 4–6 перемещения по контуру сооружения показывают, как меняется форма сооружения при проходе ударных сейсмических волн. Для зданий в эпицентре сооружение испытывает деформацию расширения-сжатия в вертикальном направлении. Для отдаленных от эпицентра зданий преобладающими являются горизонтальные сдвиговые деформации, которые наиболее разрушительны для сооружений. Поэтому в сейсмоопасных регионах при строительстве наземных сооружений следует использовать материалы с большим запасом прочности по деформациям сдвига, а в блочных конструкциях использовать соединения, обеспечивающие подвижность блоков при относительных сдвиговых деформациях, при сохранности конструкции в целом.

Список литературы

1. Тарабрин Г.Т. Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов. // Строительная механика и расчет сооружений. – Москва, 1981. – № 4. – С. 38-43.
2. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Дифракция нестационарных волн в упругой полуплоскости с поверхностным включением при сбросе напряжений на трещине // Математический журнал. – Алматы, 2012. – Т.12, – № 2(44). – С. 23-42.
3. Джузбаев С.С., Сарсенов Б.Т. Динамическое напряженное состояние полуполосы при боковом импульсном давлении // Математический журнал. – Алматы, 2003. – Т.3, – № 1(7). – С. 55-62.
4. Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш. Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации // Математический журнал, –Алматы, 2007. – Т.7, № 2(25). – С. 19 - 31.
5. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Модель динамики среды в окрестности очага землетрясения // Сб. научн. трудов НИИ РК. Методы экспериментальной физики. – Алматы, 2010. – С. 63-73.
6. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном породном массиве. – Алма-Ата:Наука, 1980. – 212 с.

Математическое моделирование ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения с пограничными слоями нижней и верхней стенки

А.О. Бекетаева, Н.Ш. Шахан

Институт Математики и Математического
Моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Аннотация. В плоском канале численно моделируется сверхзвуковое турбулентное течение воздуха с перпендикулярным вдувом звуковой струи водорода через щель на нижней стенке. Решение исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых $k - \omega$ моделью турбулентности, осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе WENO-схемы. Основное внимание уделяется исследованию взаимодействия ударно-волновой структуры с пограничными слоями на нижней и верхней стенках в условиях внутреннего турбулентного течения, а именно, проведено детальное изучение структур потоков, исследован отрыв и смешение в зависимости от ширины щели струи. Установлено, что помимо известных ударно-волновых структур, возникающих при взаимодействии набегающего потока с поперечной струей и при взаимодействии головного скачка уплотнения с пограничными слоями вблизи стенок, возникают дополнительная система скачков уплотнения и отрыв потока на нижней стенке на некотором расстоянии от струи вниз по потоку. Произведено сравнение с опытными данными.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса, ударная волна

1 Введение

Одной из сложных задач сверхзвуковых течений является взаимодействие сверхзвукового потока воздуха с поперечно вдуваемой струей, сопровождающегося образованием большого количества скачков уплотнения, вихрей и отрывных зон. Большинство существующих на данный момент работ по теоретическому изучению взаимодействия струи и набегающего потока в канале в основном рассматривают область вдува струи, и при этом, как правило, на верхней границе ставятся граничные условия симметрии или свободного потока [1-3], что значительно облегчает решение поставленных задач. Однако эти задачи не позволяют в полной мере изучать взаимодействие ударной волны с пограничным слоем.

Механизм образования ударно-волновой структуры вышеуказанного течения хорошо описан в литературе [1-7]. Схематическая картина потока в области вдува представлена на рисунке 1, где 1 - головной скачок уплотнения, возникающий вследствие торможения набегающего потока перед струей, 2 и 3 - косой и замыкающий скачки уплотнения, соответственно. Головной, косой и замыкающий скачки уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют λ -образную ударно-волновую структуру. На схеме перед струей изображены вихри, образованные в результате первичного и вторичного отрывов потока от стенки. При этом вихрь, расположенный ближе к струе, движется против часовой стрелки, а вихрь, отстоящий на большем расстоянии от нее, движется по часовой стрелке [4-6]. Также на рисунке приведена отрывная область за струей, которая возникает вследствие зоны разряжения. Кроме того, на схеме течения (рис. 1) показан слабый скачок, который образуется за соплом вдува при натекании на стенку потока, обогнувшего вдуваемую струю.

Следует отметить работы, где изучено взаимодействие падающей ударной волны, но уже с пограничным слоем. Данной проблеме посвящено значительное число как экспери-

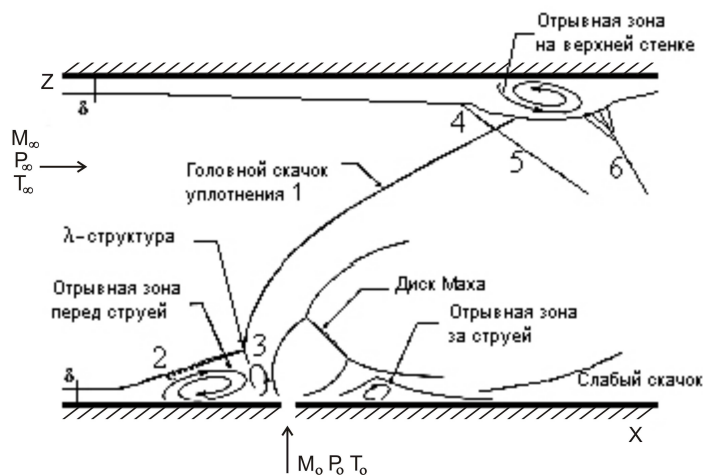


Рис. 1. Схема течения

ментальных, так и теоретических работ [8-9]. При этом исследования, посвященные взаимодействию ударной волны с пограничным слоем в условиях внутреннего турбулентного течения, практически отсутствуют. Схематическая картина взаимодействия ударной волны с пограничным слоем на верхней стенке также приведена на рисунке 1. Здесь 1 - головной скачок уплотнения, падающий на верхнюю стенку, 4 - волна сжатия, образуемая вследствие вытеснения сверхзвуковой части пограничного слоя во внешний поток положительным градиентом давления, 5 - отраженный скачок уплотнения, 6 - волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока. Так, в работе [8] приведены результаты расчетов, полученных методом крупных вихрей. Основное внимание уделяется изучению структуры течения, размеров отрывной зоны, а также динамических и тепловых нагрузок, реализующихся при этом взаимодействии. В [9] исследованы условия, при которых угол наклона и интенсивность ударной волны приводят к отрыву пограничного слоя.

Практический интерес сверхзвукового течения с вдувом струй в канале связан с возникающими нагрузками как на верхнюю, так и на нижнюю стенки канала. При этом очевидно, что структура взаимодействия будет существенно зависеть от параметров вдуваемой струи, а также от высоты самого канала. На сегодняшний день, как было указано выше, проблемы взаимодействия ударной волны с вдуваемой струей и с пограничными слоями в основном рассматриваются по отдельности. Это связано не только со сложностью численной реализации сложного характера течения и многокомпонентностью рассматриваемого газа, но и с наличием верхней стенки, что требует надежных численных методов расчета.

Трудности, возникающие при численном решении вышеописанных задач, не позволяют в полном объеме изучить структуру как взаимодействия струи с поперечным потоком, так и взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем в зависимости от основных параметров. Основная проблема численного моделирования обусловлена тем, что использование схем выше первого порядка вызывает осцилляции в решениях, разрывы в рассчитываемых функциях. В настоящее время для решения такого рода сложных задач широко применяются квази-монотонные консервативные схемы повышенного порядка аппроксимации без введения искусственных диссипативных членов, такие как TVD схемы (Total Variation Diminishing schemes). При этом их основной недостаток состоит в том, что в окрестности разрыва решения порядок точности понижается до первого. Это обстоятельство приводит к тому, что скачки уплотнения, возникающие в течении, могут быть сильно размазаны. Схемы ENO (Essentially Nonoscillatory Schemes), и WENO свободные от выше-

указанных недостатков, изложены в работах [10-11]. В работе [12] авторы развили ENO-схему на основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй.

Цель данной работы - численное моделирование взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, которая возникает в плоском сверхзвуковом течении воздуха с поперечно вдуваемой звуковой струей водорода с нижней стенки.

2 Постановка задачи

Рассматривается сверхзвуковое течение воздуха с поперечным вдувом струи с нижней стенки прямоугольного канала (рисунок 1). Система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси относительно декартовых координат в консервативной форме представляется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$\mathbf{E} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u w, (E_t + P) u, \rho u Y_k)^T,$$

$$\mathbf{F} = (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + P, (E_t + P) w, \rho w Y_k)^T,$$

$$\mathbf{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{xk})^T,$$

$$\mathbf{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{zk})^T,$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = C_{pk}/W_k, \quad \tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right),$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{zk},$$

$$J_{xk} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{zk} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система уравнений (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$; давление P и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$; удельная энтальпия h_k - к $R^0 T_\infty / W_\infty$; молярные удельные теплоемкости C_{pk} - к R^0 ; характерным параметром длины является диаметр сопла. Величина Y_k - массовая концентрация k -ой компоненты; индекс массовой концентрации $k = 1$ соответствует O_2 , $k = 2$ - H_2 , $k = 3$ - N_2 ; $N_p = 3$ - число компонент смеси газов. W_k - молекулярный вес k -ой компоненты; Re, Pr, Sc - числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта, соответственно; $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ - тензоры вязких напряжений; q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} - тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика); $\mu = \mu_l + \mu_t$ - эффективная вязкость (определяется через сумму ламинарной и турбулентной вязкости). Для определения μ_t используется $k - \omega$ модель турбулентности.

3 Граничные условия

На входе:

$$Y_k = Y_{k\infty}, W_k = W_{k\infty}, P = P_\infty, T = T_\infty,$$

$$u = M_\infty \sqrt{\gamma_\infty R_0 T_\infty / W_\infty}, w = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H;$$

во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле $\delta_1 = 0.37x (Re)^{-0.2}$. Также задается пристенный слой (10% от пограничного слоя) $\delta_2 = 0.1\delta_1$. Продольная составляющая скорости принимает следующий вид:

$$u = 0, 1 \left(\frac{z}{\delta_2} \right) + 0, 9 \left(\frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta_2.$$

В развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left(\frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad x = 0, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

В зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид:

$$T = T_w + u(1 - T_w), \quad \rho = 1/T,$$

где $T_w = \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)$ - температура на стенке, $r = 0.88$.

На щели:

$$Y_k = Y_{k0}, W_k = W_{k0}, P = nP_\infty, T = T_0,$$

$$u = 0, w = M_0 \sqrt{\gamma_0 R_0 T_0 / W_0}, \quad z = 0, \quad L_b \leq x \leq L_b + h;$$

($n = P_0 / P_\infty$ - степень нерасчетности, P_0, P_∞ - давление в струе и в потоке, M_0, M_∞ - число Маха струи и потока, соответственно, индексы 0, ∞ относятся к параметрам струи и потока);

на нижней и верхней стенках задается условие прилипания и теплоизоляции; на выходной границе задаются условия неотражения [13].

4 Метод решения

На нижней и верхней стенках в пограничном слое, а также на уровне щели, вводится сгущение сетки для более точного численного решения. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} \quad (2)$$

где $\tilde{U} = \mathbf{U}/J$, $\tilde{E} = \xi_x \mathbf{E}/J$, $\tilde{F} = \eta_z \mathbf{F}/J$, $\tilde{E}_{v2} = \xi_x \mathbf{E}_{v2}/J$, $\tilde{E}_{vm} = \xi_x \mathbf{E}_{vm}/J$, $\tilde{F}_{v2} = \eta_z \mathbf{F}_{v2}/J$, $\tilde{F}_{vm} = \eta_z \mathbf{F}_{vm}/J$. $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$ - Якобиан преобразования.

Параметры преобразования координат подробно описаны в [10,12].

В данной работе конвективные члены аппроксимируются с использованием WENO-схемы, идея построения которого основана на ENO-схеме, подробно изложенной в работе [10]. В предлагаемой WENO-схеме при интерполировании кусочно-постоянной полиномиальной функции применяются полиномы Ньютона третьего порядка и, вместо выбора одного интерполяционного полинома, используется выпуклая комбинация с весовыми коэффициентами всех представленных полиномов. За счет этого достигается существенно неосциллирующее свойство схемы, повышающее порядок аппроксимации схемы.

Решение системы уравнений (2) подробно описано в [10,12].

По известным значениям исходных переменных вычисляется поле температуры с помощью следующего уравнения:

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} \left(\tilde{H}(T) - RT \right) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = 0, \quad (3)$$

где \tilde{H} - молярная энтальпия смеси газов.

Решение алгебраического уравнения (3) относительно температуры осуществляется итерационным методом Ньютона-Рафсона, обладающим квадратичной скоростью сходимости [10,12].

5 Результаты расчетов и их анализ

Предварительно решается следующая тестовая задача: рассматривается плоское сверхзвуковое течение воздуха ($M_\infty = 2.9$, $P_\infty = 0.0663 \text{ MPa}$, $T_\infty = 108 \text{ K}$) с перпендикулярным вдувом звуковой струи гелия ($T_0 = 217 \text{ K}$, $P_0 = 1.24 \text{ MPa}$) через щель на нижней стенке шириной 0.0559 cm . Высота и ширина канала $H = 7.62 \text{ cm}$ и $L = 25 \text{ cm}$, соответственно. Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, что для пристенного слоя приходится 5-8 узловых точек по направлению оси z , а расчет всего пограничного слоя выполняется с использованием 35-40 узлов расчетной сетки.

В данном эксперименте необходимо знание C_{pk} (молярных удельных теплоемкостей) компонент O_2 , N_2 , H_2 при температуре ниже 300 K . Здесь используются экспериментальные данные работы [14], в которой приведены зависимости C_{pk} от низких значений температуры. Построение полинома осуществляется с помощью метода наименьших квадратов. Для этого составляется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных эмпирических констант $\{\alpha_{ki}\}$, решение которых производится методом LU-разложения. Найденные таким образом значения $\{\alpha_{ki}\}$ используются для определения профиля удельной теплоемкости кислорода, азота и водорода.

На рисунке 2 показаны рассчитанные и измеренные значения распределения давления на стенке перед щелью и за ней. Кривые 1, 2 - численные расчеты WENO и ENO схемами,

соответственно; ●●● - эксперимент из работы [1]. На рисунке видно хорошее согласование численных и экспериментальных данных перед щелью, однако за щелью значения оказались заниженными. Кривая, полученная с использованием WENO-схемы, расположена ниже кривой, соответствующей экспериментам, и кривой, полученной по ENO-схеме, что также можно объяснить диссипативными свойствами WENO-схемы. В целом можно отметить удовлетворительное согласование результатов расчетов с измерениями опытов.

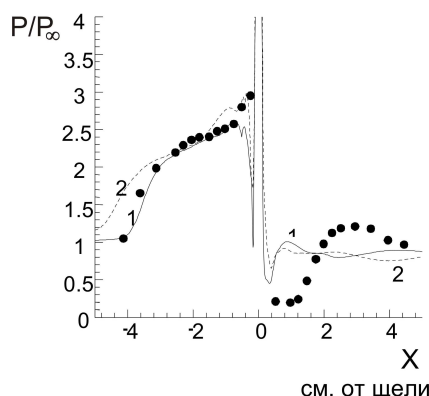


Рис. 2. Распределение давления на стенке: ●●● - эксперимент работы [1], кривая 1 - WENO-схема, кривая 2 - ENO-схема. $M_\infty = 2.9$, $P_\infty = 0.0663 \text{ MPa}$, $T_\infty = 108 \text{ K}$, $T_0 = 217 \text{ K}$, $P_0 = 1.24 \text{ MPa}$

Динамика сходимости численного решения иллюстрируется на рисунке 3, данные результаты были получены для сетки с узлами 301×281 для WENO и ENO схем соответственно (кривая 1 и кривая 2). В обоих случаях скорость сходимости решения оказывается довольно высокой. Однако для WENO-схемы кривая сходимости лежит ниже линии 2 и не обладает сильными флуктуациями, присущими ENO-схеме.

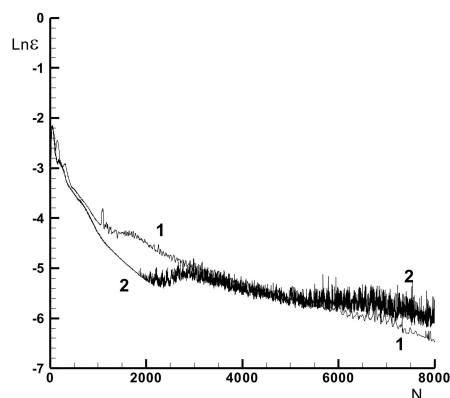


Рис. 3. Динамика сходимости численного решения: кривая 1 - WENO-схема, кривая 2 - ENO-схема. $M_\infty = 3.75$, $P_\infty = 11090 \text{ Pa}$, $T_\infty = 629.43 \text{ K}$, $Pr = 0.7$, $Re = 62.73 \cdot 10^6$, $T_0 = 800 \text{ K}$, $n = 10.29$

5.1 Исследование влияния ширины струи

Ниже, на рисунках 4-6, приведены результаты расчетов задачи плоского сверхзвукового течения воздуха с поперечным вдувом звуковой струи водорода через щель на нижней стенке.

В поставленной задаче варьируются размеры щели вдуваемой струи, т.е. рассматриваются три случая физической ширины щели (h_1, h_2, h_3). В первом случае безразмерные параметры вычислительной области будут следующими: $h = 1, L = 125$ и $H = 20$, тогда как для второго случая: $h = 1, L = 100$ и $H = 16$, что соответствует $h_2 = 1.33h_1$, и для третьего: $h = 1, L = 75$ и $H = 12$, а $h_3 = 1.66h_1$.

Параметры набегающего потока следующие: $M_\infty = 3.75, T_\infty = 629.43K, Re = 10^6, Pr = 0.7$; у струи $T_0 = 800K$, параметр нерасчетности $n = 15$. Численные эксперименты по изучению взаимодействия скачков уплотнения с пограничными слоями для различных ширин щелей представлены на рисунке 4 - распределение изобар (4а - h_1 , 4б - h_2 , 4в - h_3). В результате взаимодействия как струи с набегающим потоком, так и головного скачка уплотнения (1) с верхним пограничным слоем на рисунке 4 наблюдается образование систем скачков уплотнения, которые соответствуют ранее изученным и схематически представленным на рисунке 1.

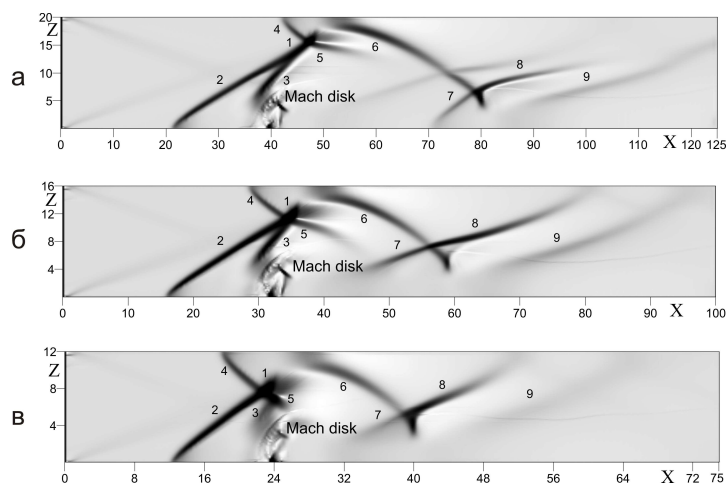


Рис. 4. Распределение изобар для ширины щели: а) h_1 , б) h_2 , в) $h_3, T_0 = 800K, M_\infty = 3.75, T_\infty = 629.43K, Re = 10^6, Pr = 0.7$

Как следует из рисунка 4в для h_3 , скачок (3) слабо выражен, тогда как для двух других случаев (рисунки 4а, б) он отчетливо просматривается. Также из графиков наблюдается сокращение длины головного скачка (1).

Размеры λ -образной ударно-волновой структуры на верхней стенке значительно возрастают с ростом ширины щели, что можно наблюдать из сравнения рисунков 4а-4в. Здесь видно, что увеличение ширины струи приводит к тому, что волна сжатия (4), сформировавшись вблизи верхней стенки, существенно сдвигается по направлению к входной границе.

На графиках изобар 4 хорошо просматривается диск Маха, размеры которого изменяются неоднозначным образом, хотя общеизвестно, что возрастание размеров щели приводит к расширению бочкообразной структуры в струе и, как следствие, к увеличению диска Маха. Такой рост размеров диска Маха объясняется тем, что в случае h_3 происходит смещение зоны отрыва в сторону входной границы, соответственно расстояние между струей и верхней возвратной областью становится минимальным (конфузор). Вследствие этого набегающий поток существенно ускоряется, тем самым препятствует расширению струи.

Из рисунка 4 следует, что помимо общеизвестной ударно-волновой картины, здесь появляется дополнительная структура, обусловленная взаимодействием отраженного скачка

(6) с пограничным слоем на нижней стенке за струей. Видно, что взаимодействие нижнего пограничного слоя и скачка (6) аналогично картине, наблюдаемой на верхней стенке, т.е. создается волна сжатия (7), которая распространяется в виде скачка (8). Также здесь просматривается слабая отраженная волна (9).

Известно, что при истечении недорасширенной струи в поток давление в струе стремится выровняться с давлением окружающей среды, вследствие чего происходит расширение струи с образованием семейства волн разрежения, которые движутся к границам струи, формируя висячий скачок, замыкающийся диском Маха. Распределение местного числа Маха ($M = \sqrt{u^2 + w^2}/c$, здесь c - местная скорость звука) в зависимости от ширины щели представлено на рисунке 5. Из графика следует, что для h_1 (рис. 5а) струя, вдуваясь со звуковой скоростью, ускоряется и на некотором расстоянии переходит в сверхзвуковую зону, (значение местного числа Маха увеличивается до 2.5), затем граница образовавшейся сверхзвуковой зоны замыкается, очерчивая круг. Этот круг и соответствует бочке, отделяющей сверхзвуковую зону от дозвуковой. В верхней части бочки волны сжатия сходятся, образуя диск Маха. За бочкой течение замедляется и становится дозвуковым со значением числа Маха, равным 0.4. В конечном итоге течение струи, ускоряясь, переходит в сверхзвуковую зону, а значение числа Маха растет до $M = 3$ и выше. С увеличением ширины щели наблюдается заметный рост размеров круга, что можно проследить из сравнения рисунков 5а и рисунков 5б. Однако, как было указано ранее (из распределения давления), на рисунке 5в четко наблюдается сужение бочки несмотря на то, что здесь размер щели является максимальным.

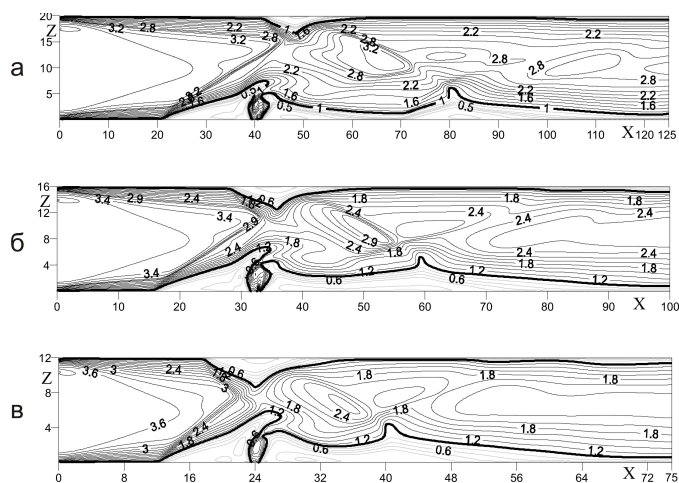


Рис. 5. Распределение местного числа Маха для ширины щели: а) h_1 , б) h_2 , в) h_3 , $T_0 = 800K$, $M_\infty = 3.75$, $T_\infty = 629.43K$, $Re = 10^6$, $Pr = 0.7$

Результаты численных экспериментов для поля вектора скорости, представленные на рисунке 6 (6а - h_1 , 6б - h_2 , 6в - h_3), показывают картину вихревой структуры, возникающую при взаимодействии скачков уплотнения как с нижним пограничным слоем, так и с верхним. На графике видно, что в зоне, примыкающей к стенке, перед струей формируются два вихря, образовавшиеся в результате первичного и вторичного отрывов потока от стенки. Направления движения в них противоположные вследствие того, что часть потока воздуха непосредственно вблизи стенки, проходя участки косога скачка (2) и замыкающего (3), поворачивает вниз к стенке и проникает в зону отрывного течения, затем растекается в

противоположных направлениях. При этом вихрь, расположенный ближе к струе, движется против часовой стрелки, а вихрь, отстоящий на большем расстоянии от нее, движется по часовой стрелке, что наблюдается в представленных результатах расчетов. За струей возникновение вихревой области связано с зоной низких давлений. На графиках можно увидеть область отрыва на верхней стенке вследствие взаимодействия головного скачка уплотнения (1) с верхним пограничным слоем. Качественные картины возвратных зон во всех трех случаях аналогичны, однако количественно они отличаются, т.к. размеры отрыва пограничного слоя на верхней стенке существенно увеличиваются с ростом ширины щели.

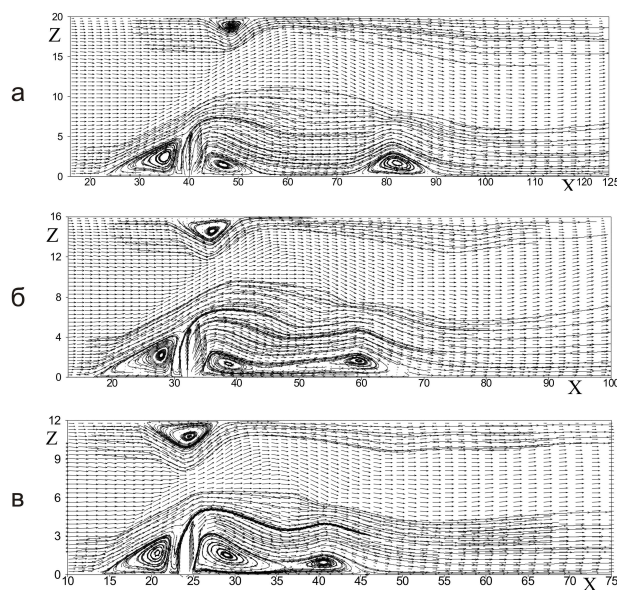


Рис. 6. Распределение поля вектора скорости для ширины щели: а) h_1 , б) h_2 , в) h_3 , $T_0 = 800K$, $M_\infty = 3.75$, $T_\infty = 629.43K$, $Re = 10^6$, $Pr = 0.7$

На фигуре 6 (а-в), помимо известных структур, наблюдается дополнительный вихрь на нижней стенке на некотором расстоянии за струей, который сформировался в результате взаимодействия скачка (6) с нижним пограничным слоем. Этот отрыв также показан на картине изомахов в форме пиков для линий числа Маха, меньшей единицы (рисунки 5 а, б, в). Как следует из графиков, с возрастанием размеров щели происходит его смещение в сторону струи (сравнение рис. 6 а-в). Таким образом, можно сделать вывод, что рост размеров щели будет приводить к повышению смешения воздуха и горючего непосредственно за вдуваемой струей вследствие обширных зон возвратных течений.

6 Заключение

С помощью численных экспериментов изучена ударно-волновая структура и отрывная область, возникающая вследствие взаимодействия скачков уплотнения с пограничным слоем как на верхней, так и на нижней стенках канала, в зависимости от размеров вдуваемой струи. Выявлено, что помимо общеизвестной ударно-волновой картины здесь появляется дополнительная структура, обусловленная взаимодействием отраженного скачка (6) с пограничным слоем на нижней стенке на некотором расстоянии за струей, что может приводить к повышению смешения воздуха и горючего вследствие обширных зон возвратных

течений. Избыточное давление на стенках возрастает с ростом размеров струи, что приводит к увеличению нагрузки на стенки канала. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают образование новых физических эффектов, которые могут оказаться полезными для улучшения смешивания потока со струей.

Список литературы

1. Шунь, Дж.Ш., Юнь, С.: Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации. *Аэрокосмическая техника*. 10, 102–113 (1990)
2. Chenault, F.C., Beran, P.S.: $k - \varepsilon$ and Reynolds Stress Turbulence Model Comparisons for Two-Dimensional Injection Flows. *AIAA Journal*. Vol.36, 8, 1401–1412 (1998)
3. Aso, S., Inoue, K., Yamaguchi, K., Tani, Y.: A study on supersonic mixing of circular nozzle with various injection angles for air breathing engine. *Acta Astronautica* 65. 687–695 (2009)
4. Спейд, Ф., Зукоски, Е.Е.: Исследование взаимодействия газовой струи, вытекающей из поперечной щели, со сверхзвуковым потоком. *Ракетная техника и космонавтика*. 2, 16–25 (1968)
5. Авдучевский, В.С., Медведев, К.И., Полянский, М.Н.: Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 5, 193–197 (1970)
6. Глаголев, А.И., Зубков, А.И., Панов, Ю.А.: Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 2, 99–102 (1968)
7. Шец, Д., Хокинс, П.Ф., Леман, Х.: Структура поперечных струй, истекающих в сверхзвуковой поток с большой степенью недорасширения. *Ракетная техника и космонавтика*. 5, 65–69 (1967)
8. Knight, D., Yan, H., Panaras, A., Zheltovodov, A.: RTO WG 10: CFD validation for shock wave turbulent boundary layer interactions. *AIAA Paper*. N 2002-0437
9. Федорова, Н.Н. Федорченко, И.А.: Расчет взаимодействия падающего косоугольного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине. *Прикладная механика и техническая физика*. Т.45, 3, 61–71 (2004)
10. Bruel, P., Naimanova, A.Zh.: Computation of the normal injection of a hydrogen jet into a supersonic air flow. *Thermophysics and Aeromechanics*. Т.17, 4, 531–541 (2010)
11. Liu, X., Osher, S., Chan, T.: Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*. Vol.115, 200–212 (1994)
12. Бекетаева, А.О., Найманова, А.Ж.: Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси. *Вычислительные технологии*. Т.12, 4, 17–25 (2007)
13. Poinso, T.J., Lele, S.K.: Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows. *Journal of Computational Physics*. Vol.101, 104–129 (1992)
14. Кикоина, И. К.: *Таблицы Физических величин*. с. 1008. Атомиздат, Москва (1976)

Моделирование электромагнитного поля для различных типов возбуждающих сигналов*

М.И. Эпов^{1,2}, Э.П. Шурина^{1,3}, Е.П. Штабель¹, Н.В. Штабель¹

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

³ Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
epovmi@mail.ru, shurina@online.sinor.ru, stabel@ngs.ru, nadino2000@mail.ru

Аннотация. В работе предложен подход к ускорению времени моделирования электрического поля для задачи зондирования с использованием сигналов типа меандр. Уменьшение времени моделирования достигается за счет перехода от решения волнового уравнения с временной схемой к параллельному решению ряда уравнений Гельмгольца с последующим преобразованием данных во временную область. Для преобразований между временной и частотной областью использовалось быстрое преобразование Фурье. Приведены результаты моделирования для различных меандров и выполнены оценки минимально необходимого и оптимального количества частот, а также масштабируемости задачи по времени решения.

Ключевые слова: векторный метод конечных элементов, трехмерное моделирование, преобразование Фурье, импульсные электромагнитные зондирования.

1 Введение

Электроразведка выделяется среди других геофизических методов большим разнообразием методик наблюдений. Большинство методов электроразведки (ВЭЗ, ЧЗ, ЗС и др.) [1,2,3,4] используют в качестве возбудителя первичного поля искусственные источники. Возбуждающие сигналы в генераторах могут быть различной длительности и конфигурации в зависимости от выбранного метода зондирования. В методе вертикальных электрических зондирования (ВЭЗ) вторичное поле генерируется с помощью постоянного тока. В методах частотных зондирования (ЧЗ) генерируется и измеряется первичное поле определенной частоты или узкого диапазона частот. Методы зондирования становлением (ЗС) могут использовать различные импульсы возбуждающих сигналов (синусоидальные, прямоугольные, меандры и др.).

Сигналы, используемые в генераторных установках, могут быть однополярными (сигнал не переходит через ноль) и двухполярными (сигнал переходит через ноль). Как правило, импульсы, применяемые в геофизике, обладают свойством периодичности, т.к. измеряемый полезный сигнал от геологической среды также сохраняет свойство периодичности. Наиболее распространенной формой сигналов в геофизической аппаратуре являются сигналы типа меандр или меандр с паузой. Использование таких сигналов связано с большой шириной спектра в амплитудно-частотной характеристике. Это дает возможность получить отклик среды от различных частот в измеряемом сигнале и увеличить информативность измерений по сравнению с одночастотными синусоидальными сигналами.

Математическое моделирование электромагнитного поля, возбуждаемого сигналами типа меандр, позволяет уточнить особенности измеряемых сигналов от взаимодействия различных геологических сред с первичным полем. Используемая для этого математическая

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-05-12031 офи-м)

модель это гиперболическое уравнение второго порядка относительно напряженности электрического поля. Эта математическая модель описывает распространение электромагнитного поля как по пространству, так и во времени. Поэтому для решения этого уравнения требуется два типа дискретизаций: пространственная в виде сеточного разбиения и временная в виде схемы аппроксимации по времени. В работе использован векторный метод конечных элементов [5,6] на неструктурированных симплицеальных разбиениях (тетраэдры) в качестве метода дискретизации по пространству. Тетраэдральные разбиения позволяют описывать модели среды любой сложности: в том числе с локальными криволинейными объектами и наклонными внутренними границами. Базисные функции, на которых ищется конечноэлементное решение, ассоциированы с ребрами сетки. В геометрически сложных и больших областях размерность задачи может достигать миллионов неизвестных. Для аппроксимации по времени используется неявная временная схема, требующая решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на каждом шаге по времени. Для решения СЛАУ с большим нуль-ядром, соответствующему rot-rot оператору, необходимо использование специальных многоуровневых решателей [5,7].

Для сложных геологических сред и длительных возбуждающих импульсов решение задачи требует больших временных и вычислительных ресурсов. В работе предложен способ ускорения решения задачи с помощью применения метода быстрого преобразования Фурье и параллельных вычислений. Известно что, чтобы восстановить функцию с помощью обратного преобразования Фурье не обязательно знать значения разложения на всех частотах. Для того чтобы получить кривую во временной области с некоторой погрешностью необходимо знать значения на ограниченном наборе частот с максимальной амплитудой. Воспользовавшись этим для решения задачи математического моделирования нестационарного процесса можно заменить выполнение множества шагов временной схемы на решение нескольких десятков уравнений Гельмгольца в частотной области. После чего восстановить кривые измерения во временной области. Такой подход при разумном выборе частот позволяет существенно сократить вычислительные затраты и решать задачи параллельно.

2 Математическая модель

Электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла (1) – (4)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

где \mathbf{E} - напряженность электрического поля (В/м), \mathbf{H} - напряженность магнитного поля (А/м), \mathbf{D} - электрическая индукция (Кл/м²), \mathbf{B} - магнитная индукция (Тл), \mathbf{J} - плотность электрического тока (А/м), σ - электропроводность (См/м), μ - магнитная проницаемость (Гн/м), ε - электрическая проницаемость (Ф/м).

2.1 Постановка задачи во временной области

Система уравнений (1) – (4) может быть преобразована к уравнению второго порядка (5) относительно вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \text{ в } \Omega \quad (5)$$

с начальными(6) и граничными условиями(7):

$$\mathbf{E}|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0, \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \mathbf{E}_1 \quad (6)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7)$$

Аппроксимация по времени для уравнения (5) выполнялась с помощью трехслойной неявной схемы [8] в результате получаем:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^{n+1}) + \sigma \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^{n+1} - 2\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t^2} = - \frac{\mathbf{J}^{n+1} - \mathbf{J}^n}{\Delta t} \quad (8)$$

2.2 Постановка задачи в частотной области

Преобразование Фурье [9,10] позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, представление этого сигнала в частотной области, и наоборот, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование Фурье позволяет определить соответствующий сигнал во временной области.

Выполнив дискретное преобразование Фурье для тока \mathbf{J} , получим распределение тока по частотам с комплекснозначными амплитудами \mathbf{I} . Пусть напряженность электрического поля \mathbf{E} зависит от времени следующим образом:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (9)$$

то есть имеет место гармонический характер изменения поля \mathbf{E} от времени с частотой ω . Подставляя выражение (26) в уравнение (5) получим уравнение Гельмгольца:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{I} \quad (10)$$

2.3 Вариационные формулировки

Введем функциональные пространства [11,12] $H(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $H_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega), \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$, где \mathbf{n} - вектор внешней нормали к границе области Ω . В пространстве $H(\text{rot}, \Omega)$ введем скалярное произведение, определяемое соотношением(11):

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, \partial\Omega \quad (11)$$

Вариационная формулировка в форме Галеркина для уравнения (8) имеет вид:

Для заданного $\mathbf{J} \in \mathbf{C}^1(0, T; L^2(\text{rot}, \Omega))$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{C}^2(0, T; H_0(\text{rot}, \Omega))$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется для всех t :

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^{n+1}) + \sigma \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^{n+1} - 2\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{J}^{n+1} - \mathbf{J}^n}{\Delta t}, \mathbf{W} \right) = 0 \quad (12)$$

Для уравнения (10) вариационная формулировка имеет вид:

Для заданного $\mathbf{I} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется:

$$(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E} + i\omega \mathbf{I}, \mathbf{W}) = 0 \quad (13)$$

Введем конечномерное подпространство V^h роторно-конформных функций $V^h(rot, \Omega) \subset H_0(rot, \Omega)$. Дискретная вариационная постановка для (12) имеет вид:

Для заданного $\mathbf{J}^h \in \mathbf{C}^1(0, T; L^2(rot, \Omega))$ найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{C}^2(0, T; H_0(rot, \Omega))$ такое, что для $\forall \mathbf{W}^h \in V^h(rot, \Omega)$ выполняется для всех t :

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{n+1}^h) + \sigma \frac{\mathbf{E}_{n+1}^h - \mathbf{E}_n^h}{\Delta t} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}_{n+1}^h - 2\mathbf{E}_n^h + \mathbf{E}_{n-1}^h}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{J}_{n+1}^h - \mathbf{J}_n^h}{\Delta t}, \mathbf{W}^h \right) = 0 \quad (14)$$

для (13):

Для заданного $\mathbf{I}^h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in H_0(rot, \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{W} \in V^h(rot, \Omega)$ выполняется:

$$\left(\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h) + (i\sigma\omega - \varepsilon\omega^2)\mathbf{E}^h + i\omega \mathbf{I}^h, \mathbf{W}^h \right) = 0 \quad (15)$$

Дискретизация по пространству выполнялась на тетраэдральном разбиении векторным методом конечных элементов, в качестве базисных функций использовались edge- функции 1-го порядка I и II-типа [11,13]. Конечноэлементное решение можно представить в виде разложения по базисным функциям:

$$E = \sum_i e_i N_i, N_i \in V^h \quad (16)$$

Подставляя это разложение в (14), получим систему алгебраических уравнений(СЛАУ):

$$\left(A + \frac{C^\sigma}{\Delta t} + \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} \right) e^{n+1} = \frac{C^\sigma}{\Delta t} e^n + 2 \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} e^n - \frac{C^\varepsilon}{\Delta t^2} e^{n-1} - \frac{1}{\Delta t} (J^{n+1} - J^n) \quad (17)$$

где $A, C^\sigma, C^\varepsilon$ - конечноэлементные матрицы, определяемые соотношениями: $A_{ij} = \int_\Omega \mu^{-1} rot N_i rot N_j \partial \Omega$, $C_{ij}^\sigma = \int_\Omega \sigma N_i N_j \partial \Omega$, $C_{ij}^\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon N_i N_j \partial \Omega$, где N_i - базисные edge- функции из пространства $V^h(rot, \Omega)$. Аналогичным образом для (17) получаем систему:

$$(A + i\omega C^\sigma - \omega^2 C^\varepsilon) e = -i\omega \mathbf{I} \quad (18)$$

СЛАУ (17) является действительной, симметричной и положительно определенной. Система (18), записанная в комплексной арифметике, также является симметричной.

3 Вычислительный эксперимент

Моделирование электрического поля проводилось на синтетической прямой задаче геоэлектрики. Расчетная область (рис. 1) представляет собой параллелепипед $8000 \times 8000 \times 4000$ м³, разделенный на две подобласти: "воздух" и "землю". На границе этих подобластей в центре параллелепипеда находится генераторная петля диаметром 250 м с током $I=100$ А. Электропроводность в воздухе равна $1e-6$ См/м, а вмещающей среды $1e-2$ См/м.

В качестве импульсов в генераторной петле использовались различные виды импульсов типа "меандр", вид которых приведен на рисунке 2. Рассчитанное поле измерялось электродом (точка М на рисунке 1), сдвинутым в положительную сторону на 325 метров по оси X и на 50 метров по оси Y относительно центра петли.

Для ускорения времени моделирования импульсов необходимо определить оптимальное количество частот, на которых следует считать гармонические задачи. Частичный набор частот из спектра исходного сигнала выбирался следующим образом. Частотный спектр сортируется по убыванию амплитуд и берется к первым частот. На оставшихся частотах

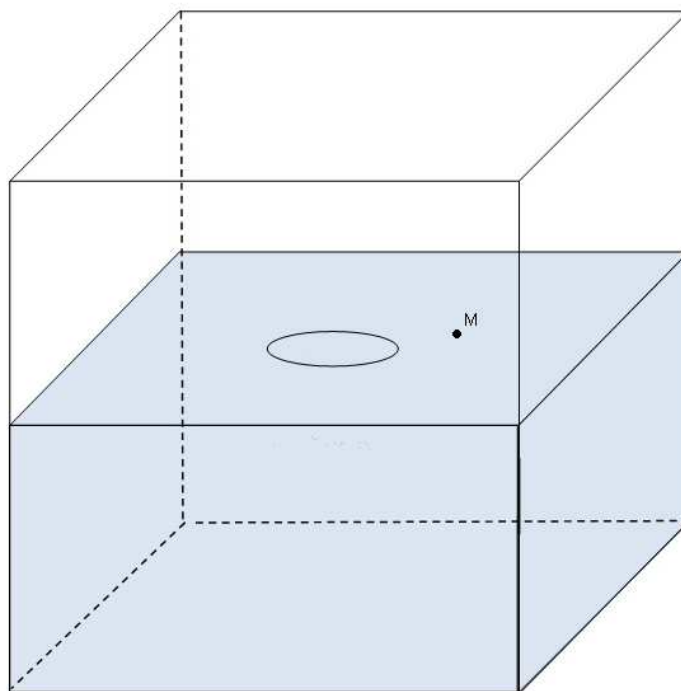


Рис. 1. Расчетная область.

полагаем, что амплитуда равна нулю, а значит и значение напряженности электрического поля также равно нулю. Количество частот k выбиралось таким образом, чтобы выполнялось условие(24):

$$\|J - J^*\| / \|J\| \leq eps \quad (19)$$

где J^* - распределение тока от времени, которое получено при обратном преобразовании Фурье для выборочного амплитудно-частотного спектра исходного сигнала, J - исходное распределение тока от времени, eps - задаваемый параметр точности.

Таким образом, в таблице 1 для каждого сигнала, изображенного на рисунке 2, приведено необходимое N_1 -количество частот с максимальной амплитудой для обратного FFT, которое является достаточным для восстановления исходного сигнала с $eps = 0.01$, N_2 - количество частот по которым выполнялось FFT, Δf - шаг, с которым выполняется частота дискретизации FFT.

Таблица 1. Количество частот с максимальной амплитудой, необходимых для восстановления исходного импульса с точностью меньше 1 %.

Тип сигнала	$\Delta f, \text{Гц}$	N_1	N_2
Меандр (рис. 2.а)	200	70	500
Меандр (рис. 2.б)	100.1	85	999
Меандр (рис. 2.с)	66.75	160	1498
Меандр (рис. 2.д)	66.75	160	1498

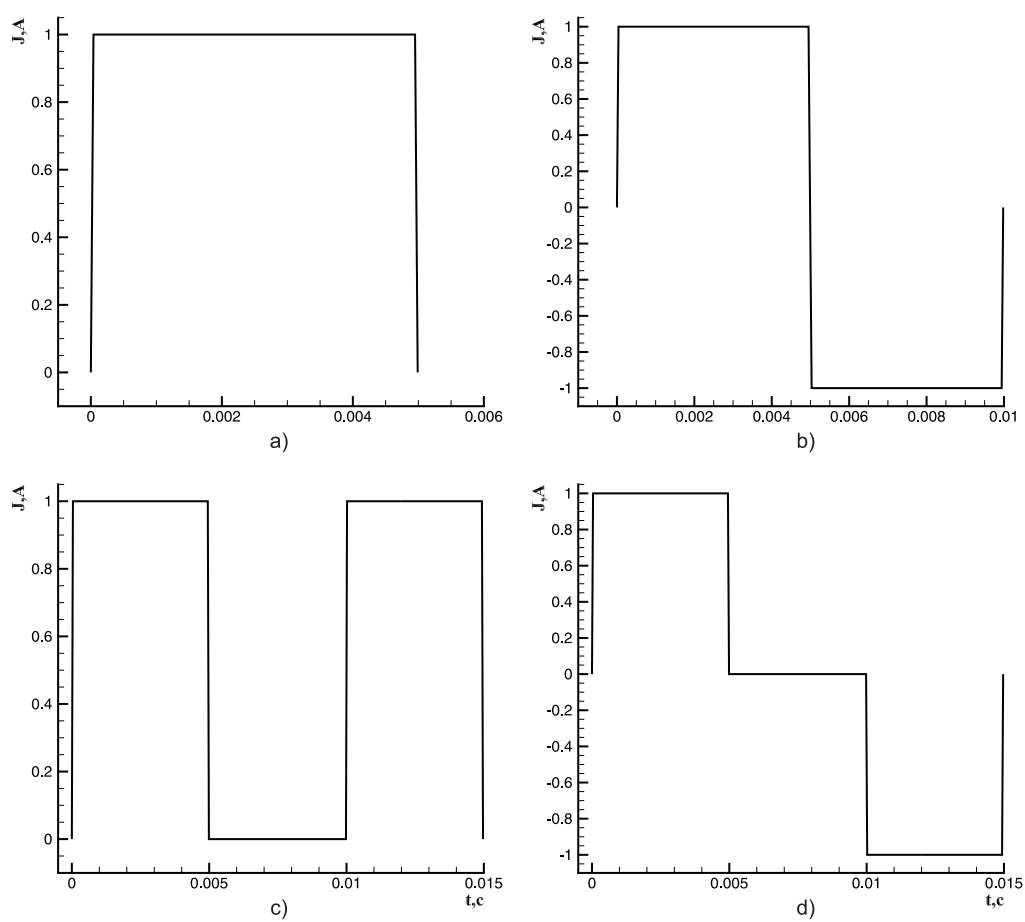


Рис. 2. Импульсы типа "меандр".

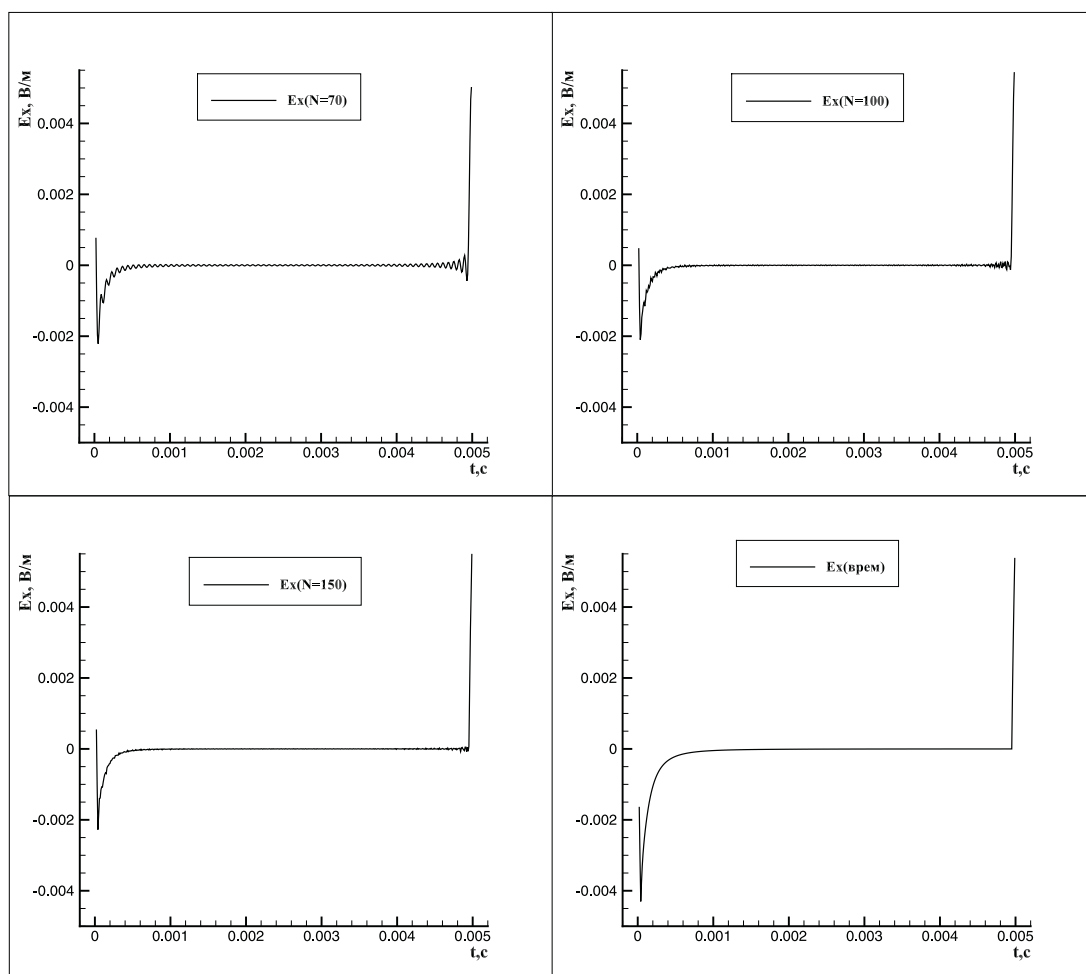


Рис. 3. Значение компоненты поля E_x от t в точке $(325,50,-0.01)$. Сравнение результатов временной задачи и данных, полученных обратным FFT из частотных задач. Источник тока - меандр (рис. 2.а).

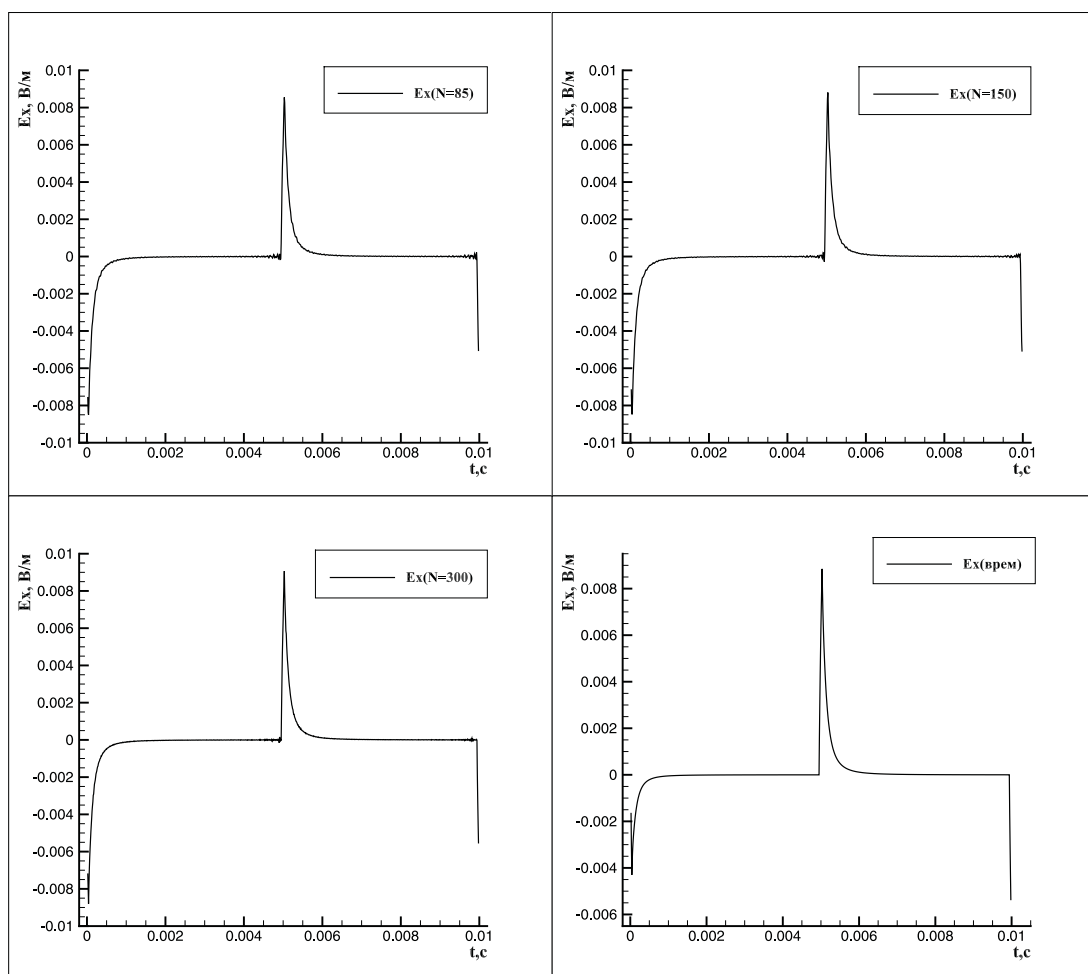


Рис. 4. Значение компоненты поля E_x от t в точке $(325,50,-0.01)$. Сравнение результатов временной задачи и данных, полученных обратным FFT из частотных задач. Источник тока - меандр (рис. 2.б).

На рисунках 3 и 4 приведены графики зависимости компоненты поля E_x от времени в точке M , построенные с помощью обратного преобразования Фурье с использованием разного количества частотных задач для меандров, представленных на рисунке 2.a и 2.b. Из рисунков видно, что минимального количества частот, необходимых для восстановления исходного сигнала, недостаточно для точного восстановления зависимости поля от времени. В полученном решении присутствуют малоамплитудные колебания на участках соответствующих постоянной части исходного сигнала. Повышение количества используемых в обратном преобразовании Фурье частот позволяет скомпенсировать эти колебания. Наилучший результат восстановления данных по сравнению с данными временной задачи достигается с использованием полного набора частот, полученном при разложении исходного сигнала. Однако, такой подход не является эффективным с точки зрения вычислительных и временных ресурсов. Авторы считают оптимальным использование около 60% частот исходного спектра сигнала для получения достаточно информативной и гладкой кривой зависимости поля от времени. Для меандров на рисунках 2.c, 2.d получены аналогичные результаты.

В таблице 2 приведено сравнительное время счета для различных импульсов задачи по времени и N_1 - частотных задач: $t_{вр}$ - общее время счета временной схемы, t_i - время счета N_1 - частотных задач на i - процессорах. Расчеты производились на вычислительном кластере К-100[14] с использованием технологии MPI. Размерность СЛАУ составляет 1283076 неизвестных. Элементы матрицы - вещественные для временной задачи и комплекснозначные для частотной. СЛАУ решалось с точностью 1.e-6. Из таблицы 2 видно, что при решении набора частотных задач, наблюдается практически линейная зависимость уменьшения времени моделирования пропорционально количеству процессоров. При количестве процессоров от 5 и больше, используемых при моделировании задачи удается существенно сократить время моделирования по сравнению с временной схемой.

Таблица 2. Время вычислений временной и частотных задач (на разном количестве процессоров с использованием технологии MPI) на кластере К-100.

Тип сигнала	$t_{вр}$, с	t_1 , с	t_5 , с	t_{10} , с
Меандр (рис. 2.a)	33849.89	85629.15	21876.26	13305.95
Меандр (рис. 2.b)	68828.96	119128.28	24189.59	15125.12
Меандр (рис. 2.c)	101517.92	193449.70	46309.94	26179.41
Меандр (рис. 2.d)	102585.07	194989.69	49852.72	25622.56

4 Заключение

В работе предложен подход к моделированию электрического поля в геологических средах при возбуждении поля сигналами типа меандр. Предложенная схема позволяет получать зависимости поля от времени, как результат параллельного решения ряда частотных задач. Определено минимальное и оптимальное количества частот необходимых для восстановления данных. Численные эксперименты на кластере К-100 показывают хорошую масштабируемость метода. При использовании 5 и более процессоров наблюдается выигрыш по времени счета по сравнению с исходной временной задачей.

Список литературы

1. Ваньян Л.Л. Электромагнитные зондирования. Москва: Научный мир, 1997. - 219 с.

2. Спичак В. В. Современные методы измерения, обработки и интерпретации электромагнитных данных. Электромагнитное зондирование Земли и сейсмичность. Издательство: ЛИБРОКОМ, 2009.- 304 с.
3. D. S. Parasnis. Principles of applied geophysics Springer, 1997 - P. 429.
4. Philip Kearey, M. Brooks, Ian Hill. An introduction to geophysical exploration. // Wiley-Blackwell, 2002 - P. 262.
5. Нечаев О.В., Шурина Э.П. Многосеточный алгоритм решения векторным методом конечных элементов трехмерного уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование. 2005. Т.17, №6, стр. 92-102.
6. Garry Rodrigue, Daniel White. A vector finite element time-domain method for solving Maxwell's equations on unstructured hexahedral grids// SIAM J. Sci. Comput. 2001. v. 35, p.315-341.
7. Шурина Э.П., Архипов Д.А. Многоуровневые алгебраические методы моделирования трехмерного электромагнитного поля // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014): Труды XII Международной конференции (г. Новосибирск, 2-4 октября 2014 г.): в 7 т. – 2014. – Т. 6. – С. 156-163
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.–656 с.
9. Cooley, J. W. and Tukey, O. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. // Math. Comput. N19. 1965. P. 297-301.
10. Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 504 с.
11. Nedelec J.C. Mixed finite elements in R^3 // Numerische Mathematik. 1980. Vol. 35, N 3. P. 315-341.
12. Nedelec J.C. A new family of mixed finite elements in R^3 // Numerische Mathematik. 1986. Vol. 50. P. 57-81.
13. Webb J.P. Edge elements and what they can do for you // IEEE Transaction on magnetic, 1993, № 2, p.1460-1465.
14. Гибридный вычислительный кластер К-100 –url:<http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>

Применение неконформных конечноэлементных методов для моделирования процессов с фазовыми переходами

Ю.И. Шокин¹, Э.П. Шурина², Н.Б. Иткина²

¹ Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
shurina@online.sinor.ru

Аннотация. В работе предлагается вычислительная схема решения задачи с подвижной границей на базе разрывного метода Галеркина. Анализируется возможность применения многомасштабного подхода и принципы реализации этого подхода на уровне вариационных постановок, выбора функционального пространства и построения специального многоуровневого решателя. Приводятся результаты вычислительных экспериментов на примере моделирования процесса горения прямоугольного образца.

Ключевые слова: процессы с фазовыми переходами, неконформный метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина, многомасштабные методы

1 Введение

Математическое моделирование физических процессов с фазовыми превращениями занимает значительный объем в исследованиях, определяемый широкой областью прикладных задач, таких как: задачи горения твердого топлива, моделирование процессов таяния и замерзания, задачи адсорбции и т.д. Особенности процедуры математического моделирования процессов с фазовыми переходами связаны с физической и геометрической неоднородностью среды, а именно, наличием разномасштабных включений с контрастными физическими свойствами и изменением конфигурации области моделирования. Учет этих особенностей определяет необходимость конструирования специальных вычислительных алгоритмов. Один из наиболее распространенных подходов к решению задач с подвижной границей - разработка специальных адаптивных сеток. Основные идеи построения неравномерных сеток для конечноразностных аппроксимаций изложены в работах Н.С. Бахвалова, Г.И. Шишкина, В.Д. Лисейкина и др. Существуют и другие успешно развивающиеся направления (Adaptive FEM), которые предлагают методику построения адаптивных конечноэлементных сеток. Разрывный метод Галёркина (DG-метод) один из наиболее перспективных численных методов решения задач в геометрически неоднородных областях с (D.Arnold, V.Cosburn, M.G.Larson, F.Brezzi)[1], [2]. Основное достоинство DG-метода для решения данного класса задач состоит в возможности гибкого применения p-h, h, p стратегий.

Понятие конформности и неконформности конечноэлементных методов можно интерпретировать следующим образом: 1) геометрическая неконформность, связанная с невозможностью точной аппроксимации криволинейных поверхностей симплексами и 2) функциональная неконформность, определяемая выбором пространства решения (пространство Лебега), не требующим выполнения условия непрерывности на межэлементных границах. Второй подход и послужил базой для развития различных модификаций разрывного метода Галеркина. Возможность определения разрывного решения исходной задачи (отсутствие требования непрерывности на межэлементных границах) естественным образом реализует процедуру построения несогласованных сеток [3], [4], [5] и др.

2 Постановка задачи

Горение - сложный физико-химический процесс превращения компонентов горючей смеси в продукты сгорания с выделением тепловой энергии. В данной работе математическая модель процесса горения представлена в виде нелинейного дифференциального уравнения

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + F(T), (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где Ω – область моделирования, T – температура, $F(T)$, – источник тепловыделения, c – теплоёмкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность вещества.

$$T = T_N(x, y) \in \partial\Omega,$$

$$T = T_0, t = 0,$$

где T_N – температура поджига, T_0 – температура окружающей среды.

3 Функциональные пространства

Введём триангуляцию τ_h области Ω на непересекающиеся открытые множества K такие, что $\bigcup_{K \in \tau_h} \bar{K} = \bar{\Omega}$, пространство $H^1(K)$ – множество функций, интегрируемых с квадратом на K вместе со своей первой производной со скалярным произведением $(u, v) = \int_K u(x)v(x) dx + \int_K u'(x)v'(x) dx$ и порождаемой им нормой $\|u\| = \left(\int_K u(x)^2 dx + \int_K (u'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ и пространства $H^1(\tau_h) = \{v(x) \in L^2(\Omega) : x \in \Omega, v(x)|_K \in H^1(K)\}$, $H_0^1(\tau_h) = \{v(x) : v \in H^1(\tau_h), v|_{\partial\Omega} = 0\}$, конечномерные подпространства пространств $H^1(\tau_h)$ и $H_0^1(\tau_h)$: $V_h = \{v \in H^1(K) : v|_K \in P^{p_K}(K) \forall K \in \tau_h\}$, $V_{h0} = \{v(x) \in V_h : v|_{\partial\Omega} = 0\}$, где $P^{p_K}(K)$ – множество полиномов степени не более p_K , определённых на K . А также векторное пространство $(H^1(\tau_h))^3 = \{q(x) : x \in \Omega, q|_K \in (H^1(K))^3 \forall K \in \tau_h\}$ и его конечномерное подпространство $\Sigma_h = \{q_h \in (L^2(\Omega))^3 : q_h|_K \in (P^{p_K}(K))^3 \forall K \in \tau_h\}$.

Определим поведение функций $u \in H^1(\tau_h)$ и $\sigma = \nabla u \in \Sigma_h$ на границах конечного элемента $K \in \tau_h$ как результат действия оператора следа $\hat{u}_K = (\hat{u}_K)_{K \in \tau_h} \in \operatorname{Tr}(\Gamma)$, где $\operatorname{Tr}(\Gamma) = \prod_{K \in \tau_h} L^2(\partial K)$, $\Gamma = \bigcup_{K \in \tau_h} \partial K$.

Существует множество способов определения конкретного вида операторов следа или так называемых численных потоков (см. [1]). В данной работе применяется способ Басси и др. [4]: $\hat{u} = \{u\}$, $\hat{\sigma} = \{\nabla u\} + \eta_e r(\{u\})$, где $\nabla u = \sigma$, $\Gamma = \bigcup_{K \in \tau_h} \partial K$, $T(\Gamma) = \prod_{K \in \tau_h} L^2(\partial K)$, η_e – некоторое неотрицательное число, e – грань конечного элемента, на котором определены численные потоки.

Обозначим $V = H^1(\tau_h)$, $V_c = H^1(\Omega)$, $V_d = H^1(\tau_h)$. Представим пространство V как прямую сумму подпространств с разрывными (V_d) и с непрерывными функциями (V_c): $V = V_c \oplus V_d$. Тогда

$$u \in V \iff u = u_c + u_d, u_c \in V_c, u_d \in V_d. \quad (2)$$

Конечномерные подпространства пространств V_c и V_d будем обозначать соответственно V_{ch} и V_{dh} .

Для пространства V_{ch} будем использовать обычный лагранжев базис. Для пространства V_{dh} – разрывные финитные функции, имеющие в качестве носителя один конечный элемент.

4 Вариационная формулировка задачи

Найти $u \in V$ такое, что

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

где $a(u, v)$ – билинейная форма разрывного метода Галёркина. Такой подход к задачам конвекции-диффузии рассмотрен в [4]. Для задач с подвижными границами декомпозиция пространства решений на «грубое» и «мелкое» подпространства реализована впервые. Применение разрывного метода Галёркина позволяет повысить точность и устойчивость решения, введение многомасштабности – значительно уменьшить размерность задачи.

С учётом декомпозиции (2) пространства V на два подпространства получим:

найми $u_c \in V_c$ и $u_d \in V_d$ такие, что

$$a(u_c, v_c) + a(u_d, v_c) = (f, v_c) \quad \forall v_c \in V_c, \quad (4)$$

$$a(u_c, v_d) + a(u_d, v_d) = (f, v_d) \quad \forall v_d \in V_d. \quad (5)$$

5 Билинейная форма разрывного метода Галёркина

Введём следующие обозначения [4]; [5]:

$$\Gamma_{int} = \Gamma \setminus \partial\Omega, \{ \cdot \} : T(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma_{int}),$$

– Оператор среднего: $\{ \cdot \} : [T(\Gamma)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3$:

$$\text{на внутренней грани } e_{int} \{v\} = \frac{1}{2}(v_K + v_N), \{q\} = \frac{1}{2}(q_K + q_N),$$

$$\text{на внешней грани } e_{bnd} \{v\} = v_K, \{q\} = q_K.$$

– Оператор скачка :

$$[\cdot] : T(\Gamma) \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, [\cdot] : [T(\Gamma)]^3 \rightarrow L^2(\Gamma_{int}):$$

$$\text{на внутренней грани } e_{int} [v] = v_K n_K + v_N n_N, [q] = q_K \cdot n_K + q_N \cdot n_N,$$

$$\text{на внешней грани } e_{bnd} [v] = v_K n_K, [q] = q_K \cdot n_K.$$

– Лифтинг-оператор $r : (L^2(\Gamma))^2 \rightarrow \Sigma_h$ определяется соотношением:

$$\int_{\Omega} r(q) \cdot \tau \, dx dy = - \int_{\Gamma} q \cdot \{\tau\} \, ds, \quad \tau \in \Sigma_h.$$

С учётом этих обозначений выпишем билинейную форму разрывного метода Галёркина (6):

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy - \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \lambda ([u] \cdot \{\nabla v\} + \{\nabla u\} \cdot [v]) \, ds - \\ & \sum_{e \in \Gamma_{int}} \eta_e \int_e \lambda \{r_e([u])\} \cdot [v] \, ds - \sum_{e \in \Gamma_D} \eta_e \int_e \lambda r_{e, g_D}([u]) \cdot v n \, ds + \\ & \int_{\Gamma_D} \lambda g_D n \cdot \nabla v \, ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда вариационная формулировка (4), (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \lambda \nabla u_c \cdot \nabla v_c dx + \sum_{e \in \Gamma_D} \eta_e \int_e \lambda r_{e,gD}(u_c) \cdot v_c n ds + \int_{\Gamma_D} \lambda g_D n \cdot \nabla v_c ds + \\
& \int_{\Omega} \lambda \nabla u_d \cdot \nabla v_c dx + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \lambda [u_d] \cdot \{\nabla v_c\} ds + \\
& \sum_{e \in \Gamma_D} \eta_e \int_e \lambda r_{e,gD}(u_d) \cdot v_c n ds + \int_{\Gamma_D} \lambda g_D n \cdot \nabla v_c ds = \\
& \int_{\Omega} f v_c dx \quad \forall v_c \in V_c, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \lambda \nabla u_c \cdot \nabla v_d dx + \sum_{e \in \Gamma_D} \eta_e \int_e \lambda r_{e,gD}([u_c]) \cdot v_d n ds + \int_{\Gamma_D} \lambda g_D n \cdot \nabla v_d ds + \\
& \int_{\Omega} \lambda \nabla u_d \cdot \nabla v_d dx - \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \lambda ([u_d] \cdot \{\nabla v_d\} + \{\nabla u_d\} \cdot [v_d]) ds - \\
& \sum_{e \in \Gamma_{int}} \eta_e \int_e \lambda \{r_e([u_d])\} \cdot [v_d] ds - \sum_{e \in \Gamma_D} \eta_e \int_e \lambda r_{e,gD}([u_d]) \cdot v_d n ds = 0 \quad \forall v_d \in V_d. \tag{8}
\end{aligned}$$

6 Алгоритм решения задачи

Область моделирования можно разделить на четыре подобласти: подобласть в окрестности источника, подобласть, включающая фронт реакции и области прореагировавшего вещества, область еще не прореагировавшего вещества. Специфика решаемой задачи:

1. резкое изменение решения в малой окрестности фронта реакции и достаточно гладкое решение в областях, в которых вещество уже полностью прореагировало или ещё не достигнуты необходимые условия превращения;
 2. необходимость максимально точного учёта движения границы раздела фаз определяет конструкцию многомасштабности: представление пространства решения в виде прямой суммы разрывной и непрерывной составляющих. Причём разрывная составляющая присутствует в подобласти, окружающей источник и в окрестности фронта реакции. Такой подход позволил использовать «стандартные» разбиения области моделирования: мелкую почти равномерную сетку в подобластях с разрывной составляющей и грубую сетку в подобластях с непрерывной составляющей решения. Согласованность сеток не требуется.
- Задать начальное условие $T|_{t=0} = T_0$ и подобласть с разрывной компонентой в окрестности источника;
 - Для каждого $i = 1 \dots N$:
 - на i -м шаге по времени находим решение $T(t_i)$ с использованием имеющегося разбиения расчётной области;
 - анализируя решение $T(t_i)$, задаём новое положение фронта реакции $\xi(t_i)$;
 - в соответствии с положением $\xi(t_i)$ определяем новую подобласть с разрывным решением и триангулируем её;
 - интерполируем полученное решение T_i на новую триангуляцию области.

Таким образом, на каждом шаге по времени при необходимости строится сетка не во всей области, а лишь в окрестности границы раздела фаз.

7 Результаты вычислительных экспериментов

На примере задачи горения прямоугольного образца рассматривались три различных вариационных постановки: 1) стандартный конформный метод конечных элементов, треугольные конечные элементы, квадратичные непрерывные лагранжевы базисные функции, сетка согласованная с локальными сгущениями в области горения; 2) неконформный метод конечных элементов (DG-метод), прямоугольная несогласованная сетка с локальными сгущениями в области горения, квадратичные разрывные лагранжевы базисные функции; 3) многомасштабный разрывный метод Галеркина, прямоугольная несогласованная сетка с локальными сгущениями в области горения, квадратичные разрывные и непрерывные лагранжевы базисные функции. Применение разрывного метода Галеркина и несогласованных прямоугольных сеток позволило сократить время генерации сетки в практически в 100 раз по сравнению с временем генерации согласованной треугольной сеткой для конформного метода конечных элементов (CG-метод) при одинаковой точности решения задачи. По сравнению с CG-методом примерно в три раза увеличилось время генерации глобальной матрицы СЛАУ, но общее время вычислений уменьшилось примерно в 2-2,5 раза. Использование многомасштабной вариационной постановки позволило сократить время вычислений примерно на треть.

8 Выводы

Применение MDG-метода к решению класса задач с движущимися границами позволило значительно упростить процедуру построения адаптивной сетки (не требуется согласованность разбиений, существует возможность использования стандартных сеток) и значительно сократить время решения задачи.

Список литературы

1. Arnold D.N., Brezzi F., Cocburn B., Marini D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems //SIAM J. Numer. Anal. – 2002.– V.39, №5.– pp.1749-1779.
2. Cocburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems //In High -Order Methods for Computational Physics. –1999.– v.9. – Springer. – pp.69-224.
3. Baumann C.E. and Oden J.T. A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems //Comput. Methods Appl. Mech. Eng.–1999. – v.175. – pp.311-341.
4. Larson M.G. and Niklasson A.J.. Analysis of a family of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems: the one dimensional case //Chalmers Finite Element Center. Preprint 2001-12. P.20.
5. Hughes T. J. R., Feijoo G. R., Mazzei L., Quincy J-B. The variational multiscale method a paradigm for computational mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.. - 1998 . - №166. – pp. 3-24.

Модификации многомасштабного метода конечных элементов для решения задач электромагнетизма на постоянном и переменном токе

М.И. Эпов¹, Э.П. Шурина^{1,2}, Е.И. Михайлова¹ и А.Ю. Кутищева^{1,2}

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
shurina@online.sinor.ru

Аннотация. В работе предлагаются многомасштабные модификации метода конечных элементов на симплицИАльных разбиениях применительно к решению стационарных и гармонических задач электромагнетизма. На постоянном токе формулируется скалярная задача, которая решается гетерогенным многомасштабным методом, на всех уровнях иерархии которого используется тетраэдральное разбиение. На переменном токе решается векторное уравнение Гельмгольца, для решения которого строится многомасштабный разрывный метод Галеркина, сочетающий классический векторный метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина и многомасштабный метод суперэлементов Федоренко. Моделирование выполняется в гетерогенных средах сложной внутренней структуры.

Ключевые слова: переменный ток, постоянный ток, метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина, многомасштабные методы

1 Введение

Большинство современных приложений требуют решения различных многомасштабных задач, причем многомасштабность может иметь различную природу. Одним из первых методов, позволяющих эффективно и параллельно решать такие задачи, считается метод конечных суперэлементов (МКСЭ), предложенный Стаховской Л.Г. и Федоренко Р.П. в 1974 г. [1], [2], [3]. Метод основан на разбиении всей области моделирования на специальные конечные носители – суперэлементы.

В 1983 г. был предложен обобщенный метод конечных элементов (Generalized FEM) [4] для решения одномерных задач с быстро осциллирующими коэффициентами: задачи о колебаниях [5], о распределении тепла [6] и др. Метод основан на построении конечноэлементного подпространства приближенных функций с использованием локальных данных о решении. Основное отличие от МКСЭ заключается в использовании для разбиения расчетной области «открытых» макроэлементов (т.е. с налеганием).

Наибольшее распространение многомасштабные методы получили после выхода статьи [7] в 1997 г., где был предложен многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ), который является неким обобщением уже имеющихся многомасштабных методов. Основной идеей является (по аналогии с МКСЭ) разделение масштабов решения путем введения разбиения на макроэлементы (суперэлементы в терминологии Р.П. Федоренко). Все многомасштабные методы строятся на специальных неполиномиальных функциях формы. В связи с этим появляются особенности работы с границами макроэлементов. Вопросу вычисления функций формы по границам макроэлементов посвящено несколько работ [7], [8]. В работе [7] для прямоугольного разбиения предлагаются линейные и осциллирующие краевые условия. При использовании линейных краевых условий на границах макроэлементов необходимо выполнение условий гладкости решения (аналогично МКСЭ). Осциллирующие

условия (решение дополнительных задач по границам) позволяют решать задачи с непрерывными масштабами включений.

Гетерогенный многомасштабный метод (НММ) впервые был рассмотрен в работах [9], [10] и представляет собой общую идеологию для построения алгоритмов решения многомасштабных и многофизических задач. В связи с большим разнообразием задач существуют различные модификации НММ. Одним из первых был предложен FE-НММ [11], [12], [13], [14], основанный на использовании классического метода конечных элементов для решения подзадач на всех уровнях решения. Оценки сходимости данного метода для задач диффузии приведены в [11], для адвекции-диффузии в [13], [15], для задач эластичности в [12]. Однако в литературе ранее не рассматривалось применение FE-НММ для трехмерных задач с симплицеальным разбиением на каждом уровне иерархии.

В 2005 г. в [16] была предложена модификация МКЭ в идеологии разрывного метода Галеркина (DG-MsFEM) для решения эллиптических двумерных задач. Предложенный метод получил развитие в работах [17], [18] и в настоящее время широко применяется для решения эллиптических задач с резко контрастными физическими коэффициентами. Однако следует отметить, что несмотря на возросший в последние годы интерес к DG-MsFEM, единый подход не выработан и реализаций для решения других классов задач (параболических, гиперболических, гармонических) не предлагается.

2 Задача электромагнетизма на постоянном токе

Рассмотрим образец кубической формы (рис. 1), состоящий из слабопроводящей матрицы (удельная электропроводность $\sigma_{matrix} = 0.7$ См/м) и сильнопроводящих включений ($\sigma_{incl} = 1e + 4$ См/м). Таким образом всю область моделирования Ω можно представить как объединение Ω_{matrix} (основная среда) и Ω_{incl} (неоднородности). К верхней и нижней граням приложены электроды, боковые грани изолированы ($\partial\Omega = \Gamma_A \cup \Gamma_B \cup \Gamma_C \cup \Gamma_{M-I}$).

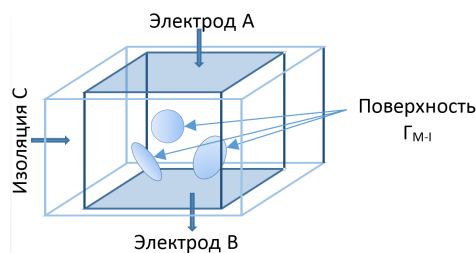


Рис. 1. Область моделирования

Таким образом, для того чтобы найти распределение напряженности электрического поля \mathbf{E} в области моделирования (рис. 1), необходимо решить однородное эллиптическое уравнение

$$-\nabla \cdot (\sigma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (1)$$

с краевыми условиями на границах расчетной области

$$u(x)|_{\Gamma_A} = 1 \quad (2)$$

$$u(x)|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_C} = 0 \tag{4}$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности Γ_C , $u(x)$ – скалярный потенциал ($\mathbf{E} = -\nabla u(x)$).

Также необходимо выполнение условия непрерывности на границах между подобластями с различной электропроводностью Γ_{M-I} (в данном случае между матрицей и включением). Математическая формализация физических условий согласования полей имеет следующий вид:

$$u(x)|_{\Gamma_{M-I}^+} = u(x)|_{\Gamma_{M-I}^-} \tag{5}$$

$$\sigma_{incl} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}^+} \Big|_{\Gamma_{M-I}^+} = \sigma_{matrix} \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}^-} \Big|_{\Gamma_{M-I}^-} \tag{6}$$

2.1 Гетерогенный многомасштабный метод конечных элементов (FE-HMM)

Вариационная постановка. Для решения краевой задачи (1)–(4) воспользуемся гетерогенным многомасштабным методом конечных элементов (FE-HMM). Введем гильбертовы пространства

$$H^1(\Omega) = \{u, v \in L^2(\Omega) : (u(x), v(x)) = \int_{\Omega} u(x)v(x) d\Omega, \forall x \in \Omega\} \tag{7}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \tag{8}$$

Тогда вариационная постановка для эллиптической краевой задачи (1)–(4): найти $u \in H_0^1(\Omega) + u_0(\partial\Omega)$ такую, что $\forall v(x) \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u(x), v(x)) = 0 \tag{9}$$

где $a(\cdot, \cdot)$ – непрерывная, коэрцитивная билинейная форма на пространстве $H^1(\Omega)$.

Дискретизация. Основная идея FE-HMM заключается в том, что вся многомасштабная информация (например, мелкомасштабные включения и их взаимодействие) содержится в неполиномиальных многомасштабных функциях формы, которые связываются через глобальную вариационную постановку (9), обеспечивающую приближение к точному решению. При этом такие неполиномиальные функции строятся как решение серии подзадач на более мелком уровне (т.е. в данном случае, на уровне микровключений). Поэтому необходимо использовать специальную иерархию сеток, которая формируется в соответствии с рис. 2.

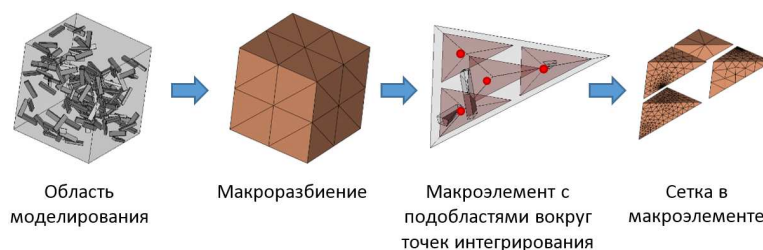


Рис. 2. Декомпозиция области моделирования

На начальном этапе вся область моделирования разбивается на конечные элементы (тетраэдры) с учетом только макромасштабной структуры (матрицы). Это разбиение называется макроразбиением, а конечные элементы — макроэлементами или суперэлементами (в терминологии Федоренко [2]). Далее в каждом макроэлементе выбираются точки интегрирования (в соответствии с квадратурными схемами Гаусса [19]) для последующего вычисления интегралов по объему. Затем вокруг каждой точки интегрирования выбирается некоторая область, в которой строится адаптивное симплицеальное микроразбиение с учетом мелкомасштабных особенностей.

Пусть \mathfrak{S}^{macro} — макроразбиение на тетраэдры. Введем конечномерное подпространство $V^{macro} \subset H_0^1$, состоящее из неполиномиальных непрерывных функций (многомасштабные функции формы), которые определены на конечном носителе $K \in \mathfrak{S}^{macro}$

$$V^{macro}(\Omega, \mathfrak{S}^{macro}) = span \{u_{i_K}^H \in H_0^1(\Omega) : i_K = \overline{1, N_K}, K \in \mathfrak{S}^{macro}\} \quad (10)$$

где N_K — количество степеней свободы макроэлемента $K \in \mathfrak{S}^{macro}$.

Таким образом билинейная форма на макроуровне для $u^H(x), v^H(x) \in V^{macro}(\Omega, \mathfrak{S}^{macro})$ примет вид:

$$a^{macro}(u^H(x), v^H(x)) = \sum_{K \in \mathfrak{S}^{macro}} \int_K \sigma(x) \nabla u^H(x) \nabla v^H(x) dx, \quad \forall x \in \Omega \quad (11)$$

На каждом макроэлементе $K \in \mathfrak{S}^{macro}$ выберем квадратурные точки $x_p \in K$, $p = \overline{1, P}$ и веса ω_p , $p = \overline{1, P}$ (в соответствии с формулами численного интегрирования [19] для вычисления интегралов в (11)). Вокруг каждой точки x_p определим некоторую подобласть $\tilde{K}_p \subset K$. Определим на $\tilde{K}_p \subset K$ микроразбиение \mathfrak{S}^{micro} , которое учитывает мелкомасштабные особенности (включения). Введем пространство

$$V^{micro}(\tilde{K}_p, \mathfrak{S}^{micro}) = span \{\varphi_i^{micro} \in H_0^1(\Omega) : i = 1, \dots, n\} \quad (12)$$

где n — количество степеней свободы в разбиении \mathfrak{S}^{micro} , φ_i^{micro} — классические базисные функции (1 и 2 порядков), определенные на конечных элементах разбиения \mathfrak{S}^{micro} . Определим многомасштабные функции формы в $\tilde{K}_p \subset K$ как $u_{\tilde{K}_p}^h(x), v_{\tilde{K}_p}^h(x) \in V^{micro}(\tilde{K}_p, \mathfrak{S}^{micro})$. Тогда получаем:

$$a^{macro}(u^H(x), v^H(x)) = \sum_{K \in \mathfrak{S}^{macro}} \sum_{p=1}^P \frac{\omega_p^K}{|\tilde{K}_p|} \int_{\tilde{K}_p} \sigma(x) \nabla u_{\tilde{K}_p}^h(x) \nabla v_{\tilde{K}_p}^h(x) dx, \quad \forall x \in \Omega \quad (13)$$

где $|\tilde{K}_p|$ — объем подобласти $\tilde{K}_p \subset K$.

Рассмотрим процедуру нахождения $u_{\tilde{K}_p}^h(x)$ в соответствии с классическими многомасштабными методами [7]. Пусть η_i^{lin} , $i = \overline{1, 4}$ — полиномиальные базисные функции 1 порядка, определенные на $K \in \mathfrak{S}^{macro}$.

1. Если ребро области \tilde{K}_p пересекается включением, то решается эллиптическая краевая задача на этом ребре (1D задача). В противном случае за решение принимается значение соответствующей функции η_i^{lin} , $i = \overline{1, 4}$ на текущем ребре.

2. Если грань области \tilde{K}_p пересекается неоднородностью, то решается эллиптическая краевая задача на этой грани (2D задача). В качестве краевых условий используется решение из п.1. В противном случае за решение принимается значение соответствующей функции η_i^{lin} , $i = \overline{1,4}$ на текущей грани.
3. Решается эллиптическая краевая задача на \tilde{K}_p (3D задача). В качестве краевых условий используется решение п.2. А именно,

$$-\nabla \cdot \left(\sigma(x) \nabla u_{\tilde{K}_p}^h(x) \right) = 0 \quad \text{на } \tilde{K}_p \quad (14)$$

$$u_{\tilde{K}_p}^h(x) \Big|_{\partial \tilde{K}_p} = \xi(x) \quad (15)$$

где $\xi(x)$ - некоторая функция, определенная на $\partial \tilde{K}_p$

3 Задача электромагнетизма на переменном токе

Рассматривается электромагнитное поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (16)$$

где $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота [Гц].

Поведение электромагнитного поля в частотной области описывается уравнением Гельмгольца относительно комплекснозначной величины напряженности электрического поля \mathbf{E}

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (17)$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$ - волновое число; ε - диэлектрическая проницаемость [Ф/м]; μ - магнитная проницаемость [Гн/м]; σ - электропроводность [См/м], $\Omega \subset R^3$ трехмерная область с Липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega = \partial\Omega_{PEC} \cup \partial\Omega_{PMC}$. Расчетная область Ω представляет собой гетерогенную среду, состоящую из матрицы и включений. Электрическое поле порождается неоднородными электрическими краевыми условиями, заданными на границе $\partial\Omega_{PEC}$ расчетной области Ω :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{\partial\Omega_{PEC}} = \mathbf{E}_0 \quad (18)$$

Неоднородные магнитные краевые условия заданы на границе $\partial\Omega_{PMC}$

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \times \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega_{PMC}} = -i\omega \mathbf{g} \quad (19)$$

где \mathbf{n} - внешняя нормаль.

В зависимости от соотношения действительной и мнимой части волнового числа, уравнение (1) описывает различные физические процессы:

- преобладание токов проводимости. Описывается затухающий процесс.

$$\omega\sigma \gg \omega^2\varepsilon \quad (20)$$

- преобладание токов смещения. Описывается волновой процесс

$$\omega\sigma \ll \omega^2\varepsilon \quad (21)$$

Поставленная задача (1)–(3) может быть решена векторным методом конечных элементов (ВМКЭ) [20]. Однако использование классического конформного ВМКЭ [21], [22] приводит к значительному увеличению вычислительных затрат при моделировании электромагнитного поля в гетерогенных средах, т.к. на одну длину волны должно приходиться не менее девяти тетраэдров [23].

Одним из путей решения данной проблемы является применение вычислительных схем на базе неконформных численных методов и многомасштабных технологий, которые обладают естественным параллелизмом и позволяют сводить решение задачи во всей расчетной области к решению задач меньшей размерности в отдельных подобластях.

Многомасштабные методы нашли широкое применение для решения скалярных задач [7]–[14], однако для решения векторных задач в функциональных пространствах с частичной непрерывностью $H(\text{rot}, \Omega)$ и $H(\text{div}, \Omega)$ [20] единого подхода, сочетающего в себе преимущества ВМКЭ и многомасштабных методов, не предлагается.

4 Модифицированный многомасштабный разрывный метод Галеркина

Модифицированный многомасштабный разрывный метод Галеркина [24] построен на основе многомасштабной идеологии [25], предполагающей введение макро- и микроуровней решения задачи. На макроуровне учет гетерогенных особенностей среды (включений, неоднородностей, трещин и т.д.) выполняется путем введения неполиномиального базиса, получаемого путем решения ряда специальным образом сформулированных задач на микроуровне.

Основными отличиями модифицированного многомасштабного разрывного метода Галеркина от предлагаемых в литературе ММКЭ методов [7] являются:

- построение вариационной постановки на макроуровне в пространстве с частичной непрерывностью $H(\text{rot}, \Omega)$

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \} \quad (22)$$

- использование векторных базисных функций [21], [22] на макроуровне и на микроуровне метода.

Решение задачи на макроскопическом уровне осуществляется в постановке разрывного метода Галеркина [26], [27].

Для модифицированного многомасштабного разрывного метода Галеркина в векторной постановке устанавливаются те же уровни иерархии, что и для многомасштабных методов, применяемых для решения скалярных задач и рассмотренных в разделе 2.

4.1 Постановка задачи на макроуровне

Вариационная постановка. Для построения вариационной постановки на макроуровне в Ω вводится функциональное пространство

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} \big|_{\partial\Omega} = 0 \} \quad (23)$$

с нормой и скалярным произведением.

Вариационная постановка принимает вид: найти $\mathbf{E} \in H_0(\text{rot}, \Omega) + \mathbf{E}_0$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\mu^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v})_{\Omega} + k^2(\mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} = -i\omega(\mathbf{g}, \mathbf{v})_{\partial\Omega_{PMC}} \quad (24)$$

Дискретная вариационная постановка. Для построения дискретной вариационной постановки выполняется разбиение расчетной области Ω на N непересекающихся макроэлементов-параллелепипедов.

$$Q_h = \left\{ \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \forall \Omega_i, \Omega_j \in Q_h, i \neq j, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \right\} \quad (25)$$

Разбиение на макроэлементы является геометрически согласованным, однако внутренние сеточные разбиения макроэлементов могут быть не согласованы по общей границе. Это приводит к необходимости использования специальных условий «сшивки» на границах между макроэлементами. «Сшивка» также можно осуществляться на уровне вариационной постановки путем введения на верхнем уровне иерархии метода дискретной вариационной постановки разрывного метод Галеркина.

Для построения дискретной вариационной постановки на разбиении Q_h введем функциональное пространство [26]

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{v}|_K \in P^l(K) \forall K \in Q_h \right\} \quad (26)$$

и базисные функции $\psi_i^k \in \mathbf{V}_h, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, M}$, где N – количество макроэлементов в разбиении Q_h , M – количество базисных функций на макроэлементе.

В постановках DG-метода базисные функции за пределами конечного элемента не определяются нулем, поэтому стандартные процедуры ассемблирования глобальной матрицы не используются. Для установления связи между соседними конечными элементами на границе между ними вводятся лифтинг-операторы: оператор «скачка»

$$[[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{v}^+|_T + \mathbf{n}^- \times \mathbf{v}^-|_T, \quad [[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \quad (27)$$

и оператор осреднения

$$\{\mathbf{v}\} = (\mathbf{v}^+|_T + \mathbf{v}^-|_T) / 2, \quad \{\mathbf{v}\} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \quad (28)$$

где $\partial\Omega$ – внешняя граница расчетной области, T – внутренние границы между конечными элементами.

Анализ различных постановок DG-метода применительно к решению задач электромагнетизма в широком диапазоне частот приведен в [27]. В данной работе предлагается использовать редуцированную IP постановку DG-метода, не содержащую осреднений. Тогда дискретная вариационная постановка формулируется следующим образом: найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{V}_h$ такое что для $\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h$ выполняется

$$a_h^{DG}(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega + k^2(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega = -i\omega(\mathbf{g}, \mathbf{v}^h)_{\partial\Omega_{PMC}} \quad (29)$$

Билинейная форма $a_h^{DG}(\cdot, \cdot)_\Omega$ определяется как

$$a_h^{DG}(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h)_\Omega = \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h \cdot \nabla \times \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{T} \mu^{-1} \alpha [[\mathbf{E}^h]]_T \cdot [[\mathbf{v}^h]]_T dS, \quad \alpha > 0 \quad (30)$$

где α – стабилизирующий коэффициент.

Следует отметить, что введенные для макроэлемента векторные функции ψ_i^k задаются не аналитически, как это принято в классическом ВМКЭ, а находятся численно из решения специальным образом сформулированных на макроэлементе задач (из решения задач на микроуровне). Построенный неполиномиальный базис отражает все микрособственности среды.

4.2 Постановка задачи на микроуровне

Вариационная постановка. Целью решения задачи на микроуровне является построение неполиномиальной функции формы для макроэлемента. Решается следующая задача

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \psi_j + k^2 \psi_j = 0 \quad \text{на } \Omega_i \quad (31)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{n} \times \psi_j|_{\partial\Omega_i} = \varphi_j \quad (32)$$

где φ_j определяет поведение неполиномиальной функции формы на границе макроэлемента и задается как векторная базисная функция на параллелепипеде. Вариационная постановка строится по аналогии с (24).

Дискретная вариационная постановка. На уровне макроэлемента сформулированная задача решается ВМКЭ на тетраэдральном адаптивном разбиении. Для построения дискретной вариационной формулировки вводится конечномерное подпространство $H_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset H_0(\text{rot}, \Omega)$ и базисные функции 3-го порядка $\mathbf{w}_i^k \in H_0^h(\text{rot}, \Omega)$ на тетраэдральных конечных элементах [21].

Дискретная вариационная постановка принимает вид: найти $\psi_j^h \in H(\text{rot}, \Omega_i) + \varphi_j$ такое что $\forall \mathbf{u}^h \in H(\text{rot}, \Omega_i)$ выполняется

$$\mu^{-1}(\nabla \times \psi_j^h, \nabla \times \mathbf{u}^h)_\Omega + k^2(\psi_j^h, \mathbf{u}^h)_\Omega = 0 \quad (33)$$

4.3 Численные эксперименты

Задача электромагнетизма на постоянном токе. Как было сказано выше, основная многомасштабная информация содержится в многомасштабных функциях формы, а значит точность глобального решения будет в значительной степени зависеть от того, с какой точностью строятся эти функции. Для того, чтобы уменьшить погрешность при построении многомасштабных функций формы в НММ существует несколько способов: измельчение сетки или повышение порядка базисных функций конечноэлементных разбиений на мелкомасштабном уровне (при решении серии дополнительных подзадач (14)); выбор схемы численного интегрирования (13); изменение размеров подобласти \tilde{K}_p .

Рассмотрим образец $10 \times 10 \times 10$ мм с включениями в форме параллелепипедов с размерами $0.25 \times 0.25 \times 1$ мм (рис. 3). Включения (удельная электропроводность $\sigma_{incl} = 1e+4$ См/м) распределены в материале ($\sigma_{matrix} = 0.7$ См/м) по равномерному закону с концентрацией 3.1% (500 включений). Краевые условия задаются в соответствии с рис. 1.

Для исследования влияния схемы численного интегрирования и выбора области вокруг точек численного интегрирования при построении многомасштабных функций формы на точность решения будем рассматривать квадратурные формулы Гаусса с $pi \in \{4, 5, 11\}$, где pi — узлы интегрирования в макроэлементе (в тетраэдре). Результаты приведены на рис. 4. Относительная погрешность решения вычисляется по формуле

$$\frac{\|u^H(x_l) - u^*(x_l)\|}{\|u^*(x_l)\|}, \quad (34)$$

где $u^H(x_l)$ — решение, полученное FE-НММ, $u^*(x_l)$ — «точное» решение (FEM на подробной сетке).

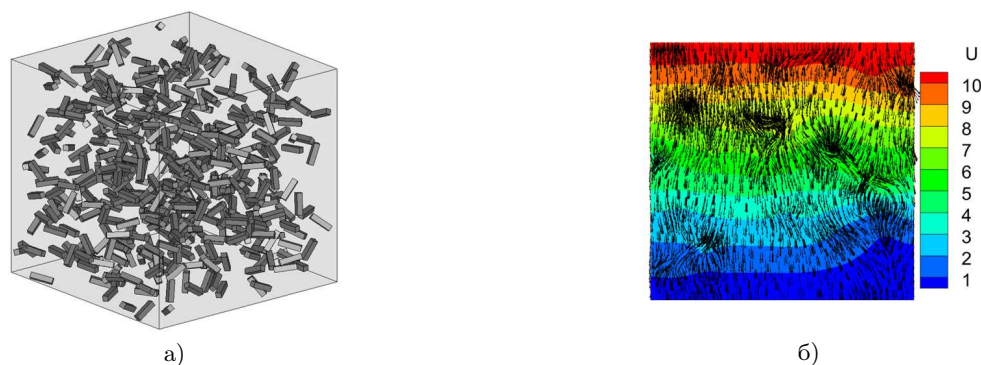


Рис. 3. Область и результаты моделирования (а – образец; б – распределение скалярного потенциала $u(x)$ в сечении и векторное поле плотности тока \mathbf{J})

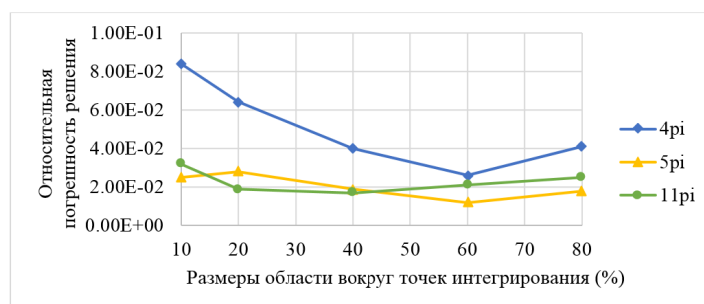


Рис. 4. Влияние схемы численного интегрирования и выбора области вокруг точек численного интегрирования при построении многомасштабных функций формы на точность решения (размеры областей вокруг точек интегрирования указаны в процентах от размера соответствующего макроэлемента)

Из вычислительного эксперимента (рис. 4.) следует, что лучшую точность дает использование схемы Гаусса с пятью и одиннадцатью точками. Однако применение одиннадцатиточечной схемы более затратно.

Одним из способов повышения точности многомасштабных конечноэлементных методов является повышение порядка базисных функций, на которых строятся многомасштабные функции формы. Для FE-НММ было получено, что использование квадратичных базисных функций в среднем уменьшает относительную погрешность решения на 1%, однако при этом время решения возрастает на порядок. Это связано со значительным увеличением количества степеней свободы в конечноэлементной сетке.

Задача электромагнетизма на переменном токе. Для верификации метода выполнялось сравнение с конформным ВМКЭ на базисных функциях 3-го порядка в однородной расчетной области: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e - 6$. За «точное» решение \mathbf{E}^{ext} принимался результат моделирования ВМКЭ. Вычисления производились на двух частотах: $f = 1$ кГц (волновой процесс не формируется) и $f = 3$ ГГц (волновой процесс сформирован). Была выполнена оценка относительной погрешности

$$\delta = \frac{\|\mathbf{E}_x^{ext} - \mathbf{E}_x\|}{\|\mathbf{E}_x^{ext}\|} \quad (35)$$

при $f = 1$ кГц $\delta^{1кГц} = 2.42e - 04$, при $f = 3$ ГГц $\delta^{3ГГц} = 1.07e - 04$. Предложенный метод показал хорошее согласование с классическим ВМКЭ.

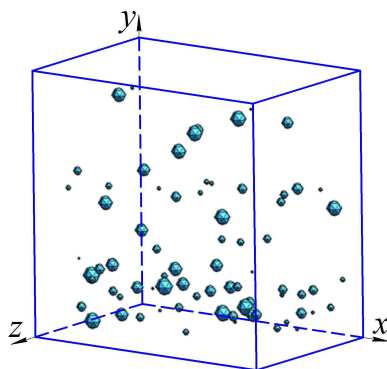
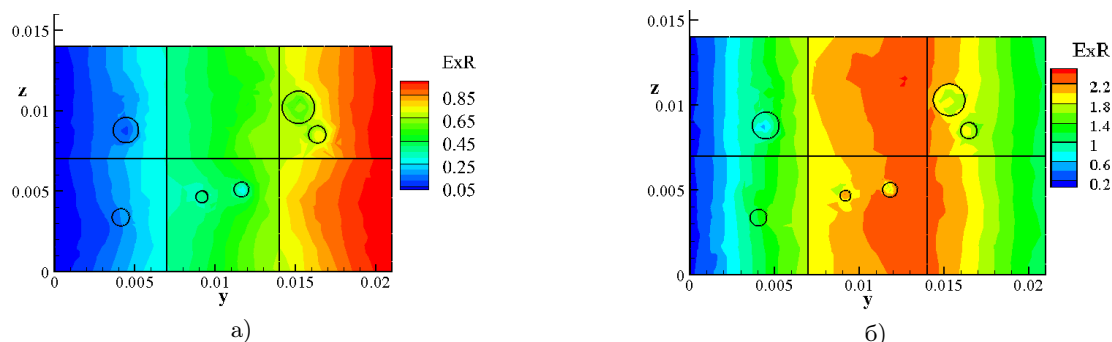


Рис. 5. Область моделирования

Рассмотрим область с гетерогенной внутренней структурой. Расчетная область 21×14 мм приведена на рис.5. Электрофизические характеристики матрицы: $\varepsilon = 4.5\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e - 6$. Электрофизические характеристики включений: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 1e + 7$. В области моделирования расположено 80 сферических включений, радиус которых варьировался от 0.11 мм до 0.7 мм.

Для расчетной области рис.5 применение конформного ВМКЭ привело к необходимости построения очень подробной сетки, резкому росту размерности СЛАУ и числа ее обусловленности. Решение получить не удалось. Предложенный в работе модифицированный неконформный разрывный метод Галеркина позволил получить решение для широкого диапазона частот. На рис. 6 приведены действительные компоненты \mathbf{E}_x в сечении $x = 0.0105$.

Рис. 6. Действительная компонента \mathbf{E}_x в плоскости YZ, $x = 0.0105$ (а – частота $f = 1$ кГц; б – частота $f = 3$ ГГц)

Заключение

В работе предлагается модификация FE-НММ, ориентированная на решение трехмерных задач электромагнетизма на постоянном токе в областях со сложной внутренней структурой (с большим количеством хаотично расположенных мелких включений). Исследована точность работы метода в зависимости от реализованной схемы численного интегрирования и порядка базисных функций на мелкомасштабном внутреннем разбиении.

На основе ВМКЭ, DG-метода и многомасштабной идеологии был разработан специальный численный метод моделирования трехмерных гармонических электромагнитных по-

лей. Данный метод ориентирован на моделирование электромагнитных полей в гетерогенных средах с контрастными разномасштабными включениями в широком диапазоне частот. Предложенный метод обладает естественным параллелизмом и позволяет свести решение задачи во всей области моделирования к решению задач меньшей размерности в отдельных подобластях, которое может выполняться параллельно. В то же время не наблюдается резкого падения точности по сравнению с ВМКЭ.

Список литературы

1. Стаховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одной специальной разностной схеме //Численные методы МСС. – 1974. – Т.5, № 1. – С. 149-163.
2. Федоренко Р.П., Страховская Л.Г. Об одном варианте метода конечных элементов //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т.19, № 4. – С. 950-960.
3. Федоренко Р.П., Введение в вычислительную физику. – М.: МФТИ. – 1994. – Т.4. – 517 с.
4. Babuska I., Osborn J.E. Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1983. – Vol.20, № 3. – pp. 510-536.
5. Arndt M., Sremin A., Machado R.D. The Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration of Framed Structures. – INTECH Open Access Publisher. – 2011.
6. Soghrati S., Aragyn A.M., Duarte C.A. and Geubelle P.H. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2012. – Vol.89, № 8. – pp. 991-1008.
7. Hou T.Y., Wu X.H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media //Journal of computational physics. – 1997. – Vol.134, № 1. – pp. 169-189.
8. Hou T., Wu X.H., Cai Z. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients //Mathematics of Computation of the American Mathematical Society. – 1999. – Vol.68, № 227. – pp. 913-943.
9. E W., Engquist B. The heterogenous multiscale methods //Communications in Mathematical Sciences. – 2003. – Vol.1, № 1. – pp. 87-132.
10. Ming P. Zhang P. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems //Journal of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 18, № 1. – pp. 121-156.
11. Abdulle A., Schwab C. Heterogeneous multiscale FEM for diffusion problems on rough surfaces //Multiscale Modeling and Simulation. – 2005. – Vol.3, № 1. – pp. 195-220.
12. Abdulle A. Analysis of a heterogeneous multiscale FEM for problems in elasticity //Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2006. – Vol.16, № 04. – pp. 615-635.
13. Abdulle A. Multiscale methods for advection-difusion problems //Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2005. – pp. 11-21.
14. Abdulle A. On a priori error analysis of fully discrete heterogeneous multiscale FEM //Multiscale modeling and simulation. – 2005. – Vol.4 – pp. 447-459.
15. Henning P., Ohlberger M. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift //NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA – 2010. – Vol.5, № 2. – pp. 711-744.
16. Aarnes J., Heimsund B.O. Multiscale discontinuous Galerkin methods for elliptic problems with multiple scales //Multiscale methods in science and engineering. – Springer Berlin Heidelberg. – 2005. – pp. 1-20.
17. Zhang Y., Wang W., Guzman J., Shu C. W. Multi-scale discontinuous Galerkin method for solving elliptic problems with curvilinear unidirectional rough coefficients //Journal of Scientific Computing. – 2014. – Vol.61, № 1. – pp. 42-60.
18. Elfverson D., Georgoulis E.H., Malqvist A., Peterseim D. Convergence of a discontinuous Galerkin multiscale method //SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2013. – Vol. 51, №. 6. – pp. 3351-3372.
19. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа. – 2000.
20. Nedelec J.-C. A new family of mixed finite elements in R3 //Numer.Math. – 1986. – Vol.50, № 1. – pp. 57-81.
21. Webb J.P. Hierarchal scalar and vector tetrahedra //IEEE Transactions on magnetics. – 1993. – Vol.29, № 2. – pp. 1495-1498.
22. Михайлова Е.И., Шурина Э.П. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного поля в волноводных устройствах //Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. – 2013. – Т.13, № 4. – С. 102-118.
23. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford University Press. – 2003. – 450 p.

24. Михайлова Е.И., Шурина Э.П. Решение уравнения Гельмгольца модифицированным неконформным методом Галеркина // XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Тюмень, 29-31 октября 2014 г.): Программа и тезисы докладов. – Тюмень, 2014. – С. 41-41
25. Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные сеточные методы: Многоуровневые методы. Применение многомасштабных методов. Учебное пособие. – Новосибирск: НГТУ. – 2012. – 100 с.
26. Houston P., Perugia I., Schotzau D. Mixed Discontinuous Galerkin Approximation of the Maxwell Operator //SIAM J. Numer. Anal. – 2004. – Vol.42, № 1. – pp. 434-459.
27. Эпов М.И., Шурина Э.П., Михайлова Е.И. Анализ вычислительных схем для моделирования электромагнитного поля в средах с контрастными включениями в широком диапазоне частот // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 6. – С. 108-121

Построение операторов индикатора разрывов тензорных полей малого ранга по их известным лучевым преобразованиям*

Е.Ю. Деревцов^{1,2}, С.В. Мальцева^{1,2}, И.Е. Светов^{1,2}

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
dert@math.nsc.ru, sv_maltseva@mail.ru, svetovie@math.nsc.ru

Аннотация. В работе предложены некоторые подходы к численному решению задачи восстановления множества точек разрыва скалярных, векторных и симметричных 2-тензорных полей (тензорных полей малого ранга), заданных в единичном круге, по их известным лучевым преобразованиям. Для решения поставленной задачи используются операторы обратной проекции, действующие на лучевые преобразования, и аппарат тензорного анализа. Построены операторы индикатора разрывов среды, позволяющие визуально выделять множество точек разрыва исследуемых полей. Предложены и реализованы алгоритмы решения поставленных задач.

Ключевые слова: томография, тензорное поле, разрыв, лучевое преобразование, оператор обратной проекции, тензорный анализ.

1 Введение

Условие гладкости является основным для получения многих результатов математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, теории обратных задач для уравнений математической физики и многих других. Однако, существуют важные естественно-научные и технические области, в которых объекты математически описываются величинами, терпящими разрыв. Такие объекты возникают и в томографии.

Известный алгоритм визуализации множества разрывов функции был предложен в статье Вайнберга с соавторами [1], опубликованной в 1985 г. Основная идея алгоритма состояла в предварительном двойном дифференцировании по переменной s ($|s|$ — расстояние от прямой, по которой производится интегрирование, до начала координат) томографических данных, представляющих собой двумерное преобразования Радона, с последующим применением оператора обратной проекции. В дальнейшем такая последовательность действий, приводящая к визуализации множества точек разрыва, получила название *оператора Вайнберга*. Следует подчеркнуть, что образ оператора Вайнберга не является разновидностью формул обращения. Оператор не дает искомую функцию и не позволяет судить о поведении гладкой составляющей объекта, но позволяет визуально выделить множество точек разрыва исходной функции. Действительно, в рамках упомянутого подхода нелокальный псевдодифференциальный оператор, используемый в формулах обращения, заменяется локальным дифференциальным оператором двойного дифференцирования, что существенно упрощает его программную реализацию, но не позволяет восстановить гладкую часть объекта. В дальнейшем “алгоритм Вайнберга” получил развитие, в частности в рамках локальной томографии, в работах таких авторов как А. Фаридани с соавторами [2], [3], А. К. Луиса и П. Маасса, [4], и многих других. Как уже отмечалось, основная цель исследований

* Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491-мол-а), Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 3630/ГФ4-2015)

состояла в визуализации множества точек разрывов, а также в возможности определения некоторых усредненных характеристик гладкой составляющей объекта.

В конце 90-х годов Д. С. Аниконовым был предложен иной подход [5] к решению задачи восстановления разрывов функции по ее известным лучевым преобразованиям, основанный на теории многомерных сингулярных интегралов [6]. Применяя к преобразованию Радона оператор обратной проекции, получаем сингулярный интеграл (с искомой разрывной функцией под интегралом) со слабой особенностью. Дифференцирование полученного выражения по пространственным переменным приводит тогда к его логарифмическому возрастанию при стремлении точки к линии разрыва. В частности, можно использовать оператор $|\nabla(\cdot)|$ и ряд других. Подобные операторы, действующие на лучевые преобразования и дающие функции (зависящие от пространственных переменных), значения которых стремятся к бесконечности при стремлении точки к линии или точке разрыва исходной функции, можно называть *индикаторами разрыва*.

Следуя логике развития постановок и методов решения “классической задачи восстановления разрывов”, кратко изложенной выше, мы предлагаем ее обобщение как в постановочной части, так и в части методов, привлекаемых для ее решения. Ставится задача по определению множества точек разрыва не только скалярных полей, но и векторных и симметричных 2-тензорных полей (тензорных полей малого ранга). Цель данной работы состоит в построении операторов индикатора разрывов, позволяющих, исходя из лучевых преобразований полей, выделять множество их точек разрыва. Для решения поставленной задачи используются дифференциальные операторы тензорного анализа, интегральные операторы углового момента и обратной проекции.

2 Предварительные сведения

Преобразование Радона, рассматриваемое как оператор, действующий на функции, имеет тривиальное ядро и поэтому обратим для широкого класса функций. В то же время операторы продольного, поперечного и смешанных лучевых преобразований, действующих на векторные и симметричные 2-тензорные поля, обладают ненулевыми ядрами. Так, ядро оператора продольного лучевого преобразования, действующего на векторные поля, состоит из потенциальных векторных полей с потенциалом, обращающимся в нуль на границе области. Ядром же поперечного лучевого преобразования (векторных полей) является множество соленоидальных векторных полей с нулевой нормальной, к границе области, составляющей. Таким образом, принимая во внимание разложение симметричного тензорного поля на потенциальную и соленоидальную части [7], приходим к выводу, что по известному продольному лучевому преобразованию векторного поля можно однозначно восстановить лишь его соленоидальную часть. Если же известно поперечное лучевое преобразование поля, то однозначно восстановить можно лишь его потенциальную часть. По этой причине задача восстановления разрывов векторного поля рассматривается в двух вариантах. Именно, требуется восстановить разрывы либо соленоидальной части исходного поля по его известному продольному лучевому преобразованию, либо его потенциальной части — по известному поперечному преобразованию. Несколько сложнее ситуация с симметричными тензорными полями второго ранга. Она будет описана ниже уже в строгих рамках соответствующего математического аппарата.

Пусть $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — круг единичного радиуса с центром в начале декартовой прямоугольной системы координат, $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — единичная окружность. Через $Z = \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi], s \in [-1, 1]\}$ обозначаем цилиндр $[-1, 1] \times [0, 2\pi]$; через $\xi \in \partial B$, $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\eta := \xi^\perp \in \partial B$, $\eta = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ — единич-

ные векторы. Обозначение $L_{\xi,s}$ принято для прямой, задаваемой нормальным уравнения $x \cos \alpha + y \sin \alpha - s = 0$; через $S^1(B)$, $S^2(B)$, $S^m(B)$ обозначаем множества определенных в B векторных, симметричных 2-тензорных полей, симметричных m -тензорных полей, соответственно.

Опишем классы разрывных функций, векторных и симметричных 2-тензорных полей, которые будут рассматриваться в дальнейшем. Пусть область $D \subset R^2$ (возможно, многосвязная) такая, что $\bar{D} \subset B$, состоит из конечного числа непересекающихся подобластей $\{D_i\}$, $i = 1, \dots, N$, таких что объединение $D_0 = \cup D_i$ этих подобластей плотно в \bar{D} , а их границы гладкие класса C^1 . Нетрудно заметить, что $\partial D \subset \partial D_0$, а граница ∂D_0 совпадает с объединением границ $\cup D_i$ подобластей D_i , $i = 1, \dots, N$. Требование к границам состоит в том, что они не содержат прямолинейных участков. Зададим в $\bar{D} \subset B$ три класс функций. Первый $C^{-1}(B)$ содержит разрывные в точках множества $(x, y) \in \partial D_0$ функции. Первый класс функций служит для описания разрывных скалярных полей. Второй класс $C^0(B)$ состоит из непрерывных функций, первые производные которых терпят разрыв в точках множества $(x, y) \in \partial D_0$. Этот класс функций служит потенциалами для разрывных векторных полей. Наконец, третий класс $C^1(B)$ состоит из непрерывных функций с непрерывными первыми производными, но обладающими вторыми частными производными, терпящими разрыв в точках множества $(x, y) \in \partial D_0$. Эти функции служат потенциалами для разрывных симметричных 2-тензорных полей. Все разрывы предполагаются разрывами первого рода, что ясно из физических соображений. Далее значок “ B ” в обозначениях классов функций опускается. Уточним описания потенциалов. Потенциалы $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$, ... из C^k , $k = -1, 0, 1$, определены в B , обращаются в 0 на множестве $B \setminus \bar{D}$, а их носитель совпадает с замыканием D , $\text{supp } \varphi = \bar{D}$. В точках $(x, y) \in D$ области D потенциалы бесконечно дифференцируемы. В силу своей гладкости в области D потенциалы обладают частными производными любого порядка. Что касается точек, принадлежащих ∂D_0 , то в них все частные производные $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^j \partial y^{l-j}}$, $l = 0, \dots, k$, $j \leq l$, до порядка k включительно непрерывны, $k = 0, 1$, а производные порядка $k + 1$ терпят разрыв 1-го рода. Будем говорить, что функция φ является *потенциалом гладкости* C^k , или C^k -*потенциалом* в R^2 . Напомним, что k принимает значения от -1 (описываются разрывные функции) до 1, посредством таких потенциалов описываются разрывные симметричные 2-тензорные поля. Вообще говоря, при увеличении k будет увеличиваться и гладкость соответствующих скалярных, векторных и 2-тензорных полей. Общие свойства полей будут формулироваться для произвольных k , разумеется ограниченных снизу некоторым целым числом, которое обычно будет указываться.

Известно [7], что как потенциальные, так и соленоидальные векторные поля, заданные на плоскости, определяются своими потенциалами. Напомним, что векторное поле u *потенциально*, если существует потенциал φ , такой что $u = \nabla \varphi = (\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial y)$. Векторное поле v *соленоидально*, если $\text{div } v = 0$. Таким образом, потенциальное поле u (соленоидальное поле v) имеет вид

$$(u_1, u_2) = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad \left((v_1, v_2) = \nabla^\perp \varphi = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right),$$

где через ∇^\perp обозначен оператор *ортогонального градиента*. Наряду с оператором дивергенции δ , $\delta w = \partial w_1 / \partial x + \partial w_2 / \partial y$ определим оператор *ортогональной дивергенции*, δ^\perp , $\delta^\perp w = -\partial w_1 / \partial y + \partial w_2 / \partial x$. Обобщениями операторов градиента и \perp -градиента являются операторы внутреннего дифференцирования d и d^\perp . Оператор внутреннего дифференцирования $d : C^k(S^m) \rightarrow C^{k-1}(S^{m+1})$, $k \geq 0$, действует на симметричное m -тензорное поле w и дает

симметричное $(m + 1)$ -тензорное поле u по правилу

$$u_{i_1 \dots i_m j} := (dw)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m + 1} \left(\frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Оператор $d^\perp : \mathcal{C}^k(S^m) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(S^{m+1})$, $k \geq 0$, внутреннего ортогонального дифференцирования действует по правилу

$$v_{i_1 \dots i_m j} := (d^\perp w)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m + 1} \left((-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{3-j}} + \sum_{k=1}^m (-1)^{i_k} \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{3-i_k}} \right).$$

Здесь $w \in \mathcal{C}^k(S^m)$, $u, v \in \mathcal{C}^{k-1}(S^{m+1})$, $k \geq 0$. Операторы дивергенции δ и ортогональной дивергенции δ^\perp , $\delta, \delta^\perp : \mathcal{C}^k(S^m) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(S^{m-1})$, $k \geq 0$, действуют на симметричные m -тензорные поля w ,

$$u_{i_1 \dots i_{m-1}} := (\delta w)_{i_1 \dots i_{m-1}} = \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} j}}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 2}}{\partial x^2},$$

$$v_{i_1 \dots i_{m-1}} := (\delta^\perp w)_{i_1 \dots i_{m-1}} = (-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} j}}{\partial x^{3-j}} \equiv -\frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 1}}{\partial x^2} + \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 2}}{\partial x^1},$$

и дают симметричные тензорные поля u, v валентности $m - 1$.

Существует три типа симметричных 2-тензорных полей [8]. Ниже используем “векторную” форму записи (w_{11}, w_{12}, w_{22}) симметричного 2-тензорного поля w_{ij} . Потенциальное симметричное 2-тензорное поле $u \in \mathcal{C}^{k-2}(S^2)$, $k \geq 1$,

$$(u_{11}, u_{12}, u_{22}) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

задается потенциалом $\psi \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Потенциальное симметричное 2-тензорное поле $\tilde{u} \in \mathcal{C}^{k-2}(S^2)$, $k \geq 1$, обладает компонентами

$$\tilde{u}_{11} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \tilde{u}_{12} = \tilde{u}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{u}_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

и определяется потенциалом $\chi \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Соленоидальное симметричное 2-тензорное поле $v \in \mathcal{C}^{k-2}(S^2)$, $k \geq 1$, с компонентами

$$v_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad v_{12} = v_{21} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad v_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{3}$$

задается потенциалом $\varphi \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Можно показать [9], что всякое тензорное поле $w \in \mathcal{C}^k(S^2)$, $k \geq -1$ единственным образом разлагается в сумму

$$w = v + u + \tilde{u}$$

полей, заданных соотношениями (1), (2), (3) и порождаемых потенциалами $\psi, \chi, \varphi \in \mathcal{C}^{k+2}$, $k \geq -1$.

Преобразование Радона функции φ определяется соотношением

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{L_{\xi, s}} \varphi(x, y) dL = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\eta) dt. \tag{4}$$

Здесь $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ нормальный, а $\eta \in \partial B$, $\eta = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ — направляющий векторы пучка параллельных прямых, по которым производится интегрирование. Параметр s , $-1 < s < 1$ характеризует расстояние $|s|$ от прямой до начала координат. Оператор *обратной проекции* (ООП) $\mathcal{R}^\#$ действует на образ оператора Радона $(\mathcal{R}\varphi)(\xi(\alpha), s)$, определенный в цилиндре Z , по правилу

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{R}\varphi)(\xi(\alpha), s(x, y, \alpha)) d\alpha \quad (5)$$

дает в результате функцию $\mu(x, y)$, определенную всюду в R^2 .

Пусть $w = (w_i)$ векторное поле с носителем в B , а ζ — вектор единичной длины. Обозначим кратко $w_i \zeta^i$ (по индексу i подразумевается суммирование от 1 до 2) через $\langle w, \zeta \rangle$. Операторы *продольного лучевого преобразования* и *поперечного лучевого преобразования*, действующие на заданное в единичном круге B векторное поле $w_i(x, y)$, определяются соотношениями

$$(\mathcal{P}w)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle w(s\xi + t\eta), \eta \rangle dt, \quad (\mathcal{P}^\perp w)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle w(s\xi + t\eta), \xi \rangle dt, \quad (6)$$

соответственно. Операторы обратной проекции, обозначаемые $(\mathcal{P})^\#$, $(\mathcal{P}^\perp)^\#$, действуют на образы $(\mathcal{P}w)(\eta, s)$, $(\mathcal{P}^\perp w)(\xi, s)$ продольного и поперечного лучевых преобразований по правилу

$$\mu_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^j (\mathcal{P}w)(\eta, s) d\alpha, \quad \lambda_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^k (\mathcal{P}^\perp w)(\xi, s) d\alpha, \quad (7)$$

$j, k = 1, 2$, $\eta = \eta(\alpha)$, $\xi = \xi(\alpha)$, $s = s(x, y, \alpha)$, и в результате дают соленоидальное и потенциальное, соответственно, поля, определенные на всей плоскости.

Существуют три вида лучевых преобразований симметричных 2-тензорных полей. Это *продольное*, *смешанное* и *поперечное*. Приведем общее определение для лучевых преобразований, действующих на симметричные m -тензорные поля, и положим $m = 2$. Операторы лучевых преобразований $\mathcal{P}^{(j)} : \mathcal{C}^k(S^m) \rightarrow \mathcal{C}^k(Z)$, $j = 0, 1, 2$, $k \geq -1$, действующие на поле $w = (w_{i_1 \dots i_m})$ и переводящие его в функции $g^{(j)}(\xi(\alpha), s)$, определенные в цилиндре Z , задаются соотношениями

$$(\mathcal{P}^{(j)} w)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{i_1 \dots i_m} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt. \quad (8)$$

$\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\eta = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. При $j = 0$ это продольное лучевое преобразование \mathcal{P} , и под интегралом участвуют только компоненты направляющего вектора (прямой, вдоль которой производится интегрирование) η . При $j = 2$ это поперечное лучевое преобразование \mathcal{P}^\perp , и подынтегральное выражение содержит только компоненты нормального вектора ξ . Наконец, при $j = 1$ это смешанное лучевое преобразование \mathcal{P}^\dagger ; содержит под интегралом как компоненты нормального, так и направляющего векторов.

Приведем формулу для оператора дифференцирования образа лучевого преобразования (8). Для $(\mathcal{P}^{(j)} w)(\xi, s) \in \mathcal{C}^k(Z)$, $k \geq 0$, $l \leq k + 1$,

$$D_s^{(l)} := \frac{\partial^l (\mathcal{P}^{(j)} w)(\xi, s)}{\partial s^l}. \quad (9)$$

Для каждого из трех типов лучевых преобразований существует “свой” оператор обратной проекции, $(\mathcal{P})^\#$, $(\mathcal{P}^\perp)^\#$, $(\mathcal{P}^\dagger)^\#$. Образы ООП, действующих на продольное и поперечное лучевые преобразования, симметричные 2-тензорные поля λ и μ ,

$$\mu_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^j \eta^k (\mathcal{P}w)(\eta, s) d\alpha, \quad \lambda_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^j \xi^k (\mathcal{P}^\perp w)(\xi, s) d\alpha, \quad (10)$$

представляют собой поля типа (3) (соленоидальное) и (1) (потенциальное). Поле

$$\nu_{jk}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^j \eta^k (\mathcal{P}^\dagger w)(\xi, s) d\alpha, \quad (11)$$

также потенциальное типа (2). Напомним, что в последних соотношениях $j, k = 1, 2$, $\eta = \eta(\alpha)$, $\xi = \xi(\alpha)$, $s = s(x, y, \alpha)$.

В качестве исходных данных для задачи восстановления разрывов выступают преобразование Радона (4); продольное и поперечное лучевые преобразования (6) векторных полей; продольное, поперечное и смешанное лучевые преобразования (8) симметричных 2-тензорных полей.

Процедура построения операторов индикатора разрывов состоит в последовательном применении — в разном порядке — операторов дифференцирования по s (9), при некотором l ; операторов обратной проекции (5), (7), (10), (11), применяемых к преобразованию Радона и “своим” типам лучевых преобразований; дифференциальных операторов d , d^\perp , δ , δ^\perp и их композиций. Последовательность перечисленных операторов должна быть такой, чтобы образуемый оператор индикатора разрывов давал особенность логарифмического типа при стремлении точки $(x, y) \in B$ к линии (или точке) разрыва скалярного, векторного или 2-тензорного поля.

3 Примеры индикаторов разрывов

Скалярное поле. Рассмотрим задачу, решение которой проясняет суть применения дифференциальных операторов для восстановления разрывов функций. Для этого построим и исследуем поведение индикатора разрывов для характеристической функции круга,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12)$$

где $C > 0$ — константа. Преобразование Радона функции (12) известно,

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = 2\sqrt{1-s^2}. \quad (13)$$

Пусть $(x, y) \in B$. Расстояние от прямой, проходящей через точку (x, y) и задаваемой нормальным вектором $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, равно $s = |x \cos \alpha + y \sin \alpha|$. Положим $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$ для $0 \leq \gamma < 2\pi$, $\rho < 1$. Тогда $\sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-\rho^2 \cos^2(\alpha-\gamma)}$. Применение оператора $\mathcal{R}^\#$ обратной проекции к (13), замена $\alpha = \pi/2 + \gamma - \chi$ и свойства полученной подынтегральной функции дают для функции μ выражение

$$\mu = \frac{4C}{\pi} \mathbf{E}(\rho) = \frac{4C}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \chi} d\chi, \quad (14)$$

интеграл в котором представляет собой полный эллиптический интеграл второго рода $\mathbf{E}(\rho)$. Его разложение в ряд по переменной ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, [10] показывает, что $\mathbf{E}(\rho) \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow 1$.

Это предельное равенство позволяет сделать выводы о поведении значений ООП при стремлении точки к границе носителя функции, а именно $\mu \rightarrow 4C/\pi$ при $\rho \rightarrow 1$. Такой же вывод можно сделать, если в (14) положить $\rho = 1$. Тогда интеграл выражается через элементарные функции, и мы получаем то же значение для μ , что было получено в результате предельного перехода.

Исследуем поведение частных производных $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ и производной по нормали $\frac{\partial \mu}{\partial \rho}$, имеющих вид

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{4Ct}{\pi} I(\rho), \quad \text{при } t = x, y, \rho.$$

Интеграл

$$I(\rho) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \chi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi}} d\chi,$$

входящий в последнее равенство, выражается через полные эллиптические интегралы первого

$$\mathbf{K}(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi}}$$

и второго $\mathbf{E}(\rho)$ рода (14) следующим образом,

$$I(\rho) = -\frac{\mathbf{E}(\rho)}{\rho^2} + \frac{\mathbf{K}(\rho)}{\rho^2}.$$

Обращаясь к разложению в ряд функции $\mathbf{K}(\rho)$ [10], получаем, что $\mathbf{K}(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1$ обладает логарифмической особенностью, а именно $\mathbf{K}(\rho) \sim \ln 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\rho) \rightarrow +\infty$. Следовательно, $I(\rho) \sim -\ln(1-\rho) \rightarrow +\infty$ при $\rho \rightarrow 1$, и, таким образом, при $\rho \rightarrow 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -\frac{4C}{\pi} t I(\rho) \sim \frac{4C}{\pi} t \ln(1-\rho) \rightarrow \begin{cases} -\infty, & t > 0, \\ +\infty, & t < 0, \end{cases} \quad t = x, y, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho} &= -\frac{4C}{\pi} \rho I(\rho) \sim \frac{4C}{\pi} \rho \ln(1-\rho) \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Стремление к $\pm\infty$ частных производных $\partial\mu/\partial x$, $\partial\mu/\partial y$ позволяет использовать в качестве индикатора разрыва скалярного поля оператор $|\mathbf{d}(\cdot)|$. На основании (15) получаем, что оператор $|\mathbf{d}(\cdot)|$ обладает логарифмической особенностью вблизи границы и $|\mathbf{d}\mu| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2} \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 1$. Отметим важное обстоятельство: при таком поведении ρ полученный результат не зависит от величины константы C .

Векторное поле. Рассмотрим C -потенциал (обладает разрывными производными первого порядка на границе ∂B),

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2), & \text{при } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Преобразование Радона потенциала (16) известно, $(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \frac{4}{3}(1-s^2)^{3/2}$, где $-1 < s < 1$ и $(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = 0$ при $|s| \geq 1$. Частная производная от $\mathcal{R}\varphi$ по s есть

$$\frac{\partial(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s)}{\partial s} = -4s \sqrt{1-s^2}.$$

Из свойств лучевых преобразований следует приведенная выше производная дает как продольное лучевое преобразование соленоидального поля $v = (2y, -2x)$, так и поперечное лучевое преобразование потенциального поля $u = (-2x, -2y)$.

Рассмотрим, для определенности, продольное лучевое преобразование соленоидально-го поля v . Пусть точка с координатами $(x, y) \in B$. $x^2 + y^2 < 1$, произвольна. Так как $s = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, то полагая $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, получим $s = \rho \cos(\alpha - \gamma)$, $\sqrt{1 - s^2} = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(\alpha - \gamma)}$. Выражения для компонент векторного поля μ , полученного в результате действия оператора обратной проекции, примут вид (напомним, что $\eta^1 := (\xi^\perp)^1 = -\sin \alpha$, $\eta^2 := (\xi^\perp)^2 = \cos \alpha$)

$$\begin{aligned}\mu_1(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha (\rho \cos(\alpha - \gamma)) \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(\alpha - \gamma)} d\alpha, \\ \mu_2(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha (\rho \cos(\alpha - \gamma)) \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(\alpha - \gamma)} d\alpha.\end{aligned}$$

Замена переменной $\beta = \alpha - \gamma$ (при этом $\alpha = \beta + \gamma$, $d\alpha = d\beta$), после очевидные преобразования, и еще одна замена $\chi = \pi/2 - \beta$ приводят к выражениям

$$\begin{aligned}\mu_1(x, y) &= \frac{8y}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \chi \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi} d\chi = \frac{8y}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) \\ \mu_2(x, y) &= -\frac{8x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \chi \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi} d\chi = -\frac{8x}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho)\end{aligned}\tag{17}$$

Интеграл $\mathbf{I}_1(\rho)$ в правых частях (17) выражается [10], стр. 172, 2.583(4),

$$\mathbf{I}_1(\rho) = \frac{1 - \rho^2}{3\rho^2} F(\pi/2, \rho) - \frac{1 - 2\rho^2}{3\rho^2} E(\pi/2, \rho)$$

через эллиптические интегралы [10], стр. 818–819, 8.111, первого и второго рода,

$$F(\delta, \rho) = \int_0^\delta \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \alpha}}, \quad E(\delta, \rho) = \int_0^\delta \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \alpha} d\alpha,$$

соответственно. Известно, что $F(\pi/2, \rho) = \mathbf{K}(\rho)$, $E(\pi/2, \rho) = \mathbf{E}(\rho)$, где через \mathbf{K} и \mathbf{E} обозначены уже полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Таким образом,

$$\mathbf{I}_1(\rho) = \frac{1 - \rho^2}{3\rho^2} \mathbf{K}(\rho) - \frac{1 - 2\rho^2}{3\rho^2} \mathbf{E}(\rho)$$

Заметим, что $\mathbf{E}(\rho) \rightarrow 1$, $(1 - \rho^2)\mathbf{K}(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$. Следовательно, $\mathbf{I}_1(\rho) \rightarrow \frac{1}{3}$, и поэтому $\mu_1 \rightarrow 8 \sin \gamma / 3\pi$, $\mu_2 \rightarrow -8 \cos \gamma / 3\pi$ при $\rho \rightarrow 1$. Эти выводы легко получить на основе разложений в ряд функций $\mathbf{K}(\rho)$, $\mathbf{E}(\rho)$ [10]. Если в формулах (17) положить $\rho = 1$, то получим интегралы, выражающиеся в элементарных функциях. Далее простые вычисления дают те же выражения для μ_1 , μ_2 , которые были получены в результате предельного перехода.

В дальнейшем, при вычислении производных векторного поля μ , нам потребуется величина

$$\mathbf{I}_2(\rho) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \chi d\chi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi}}.$$

Соответствующий неопределенный интеграл есть [10], стр. 176, 2.584(11)

$$\mathbf{I}_2(\chi, \rho) = \frac{\sin \chi \cos \chi}{3\rho^2} \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \chi} + \frac{2 + \rho^2}{3\rho^4} F(\chi, \rho) - \frac{2(1 + \rho^2)}{3\rho^4} E(\chi, \rho).$$

Свойства тригонометрических функций и эллиптических интегралов дают

$$\mathbf{I}_2(\rho) = \frac{2 + \rho^2}{3\rho^4} \mathbf{K}(\rho) - \frac{2(1 + \rho^2)}{3\rho^4} \mathbf{E}(\rho). \quad (18)$$

Используя представление (18) и разложения в ряд [10] для $\mathbf{K}(\rho)$ и $\mathbf{E}(\rho)$, исследуем поведение величины \mathbf{I}_2 при $\rho \rightarrow 1$. Предварительно заметим, что полный эллиптический интеграл 1-го рода $\mathbf{K}(\rho) \sim \ln \frac{4}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim \ln 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\rho) \rightarrow +\infty$ при $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$. Отсюда, используя (18), получаем что $\mathbf{I}_2(\rho) \rightarrow +\infty$ при $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$. Напомним, что ранее было установлено, что $\mathbf{I}_1(\rho) \rightarrow \frac{1}{3}$. Так как $d\mathbf{I}_1(\rho)/d\rho = -\rho\mathbf{I}_2(\rho)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} &= -\frac{8xy}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho), & \frac{\partial \mu_1}{\partial y} &= \frac{8}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) - \frac{8y^2}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho), \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x} &= -\frac{8}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) + \frac{8x^2}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho), & \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &= \frac{8xy}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho), \end{aligned} \quad (19)$$

откуда следует, что при $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} &\rightarrow -\infty, & x \neq 0, & y \neq 0, & \frac{\partial \mu_1}{\partial y} &\rightarrow -\infty, & y \neq 0, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x} &\rightarrow +\infty, & x \neq 0, & & \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &\rightarrow +\infty, & x \neq 0, y \neq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, установлено поведение частных производных при приближении к точкам окружности изнутри. Заметим, что случаи $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$ и, одновременно, $x \rightarrow 0$ или $y \rightarrow 0$ требуют особого анализа. Очевидно, результат будет зависеть от соотношения скоростей сходимости величины ρ и переменных x, y к точкам окружности.

Рассмотрим поведение производных $\partial \mu_1 / \partial \rho, \partial \mu_2 / \partial \rho$ векторного поля μ по нормали к окружности, $\rho \rightarrow 1$. Поскольку

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho} = \frac{8 \sin \gamma}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) - \frac{8\rho^2 \sin \gamma}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho), \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho} = -\frac{8 \cos \gamma}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) + \frac{8\rho^2 \cos \gamma}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho),$$

то $\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho} \rightarrow -\infty, \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho} \rightarrow +\infty$. При $x \neq 0, y \neq 0$ частные производные $\partial \mu_1 / \partial x, \partial \mu_1 / \partial y$ стремятся к $-\infty$, а $\partial \mu_2 / \partial x, \partial \mu_2 / \partial y$ стремятся к $+\infty$ при $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$.

В качестве индикаторов разрывов векторного поля могут выступать, в частности, такие операторы как $|d\mu|, |\delta\mu|, |\delta^\perp \mu|$. Действительно, на основании (19), (20) получаем

$$|\nabla \mu| = \left(\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow \infty,$$

при $\rho < 1, \rho \rightarrow 1$,

$$|\delta^\perp \mu| = \left| \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right| \rightarrow \infty,$$

$\rho < 1, \rho \rightarrow 1$. Эти операторы, в силу поведения частных производных, обладают логарифмической особенностью вблизи границы.

Особый интерес представляет оператор δ и, соответственно, индикатор разрывов $|\delta\mu|$. Заметим, что (соотношения (19))

$$\delta\mu = \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2}{\partial y} = -\frac{8xy}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho) + \frac{8xy}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho) = 0, \quad \rho < 1.$$

и, по определению, поле μ соленоидально. Таким образом, оператор δ , единственный среди всех остальных, “аннулирует” поле μ в круге B . Тем не менее численные эксперименты с использованием данного оператора показали хорошее качество визуализации разрывов векторного поля и разрывов его производных. По-видимому, этот неочевидный эффект возникает за счет дискретизации задачи. Поэтому при численной реализации, с использованием оператора δ , следует соблюдать определенную осторожность вблизи точек границы. Точно так же действует и оператор δ^\perp , но на образ оператора обратной проекции, действующего на поперечное лучевое преобразование потенциального векторного поля. Отметим, что

$$\delta^\perp \mu \equiv \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{\partial \mu_1}{\partial y} = -\frac{16}{\pi} \mathbf{I}_1(\rho) + \frac{8\rho^2}{\pi} \mathbf{I}_2(\rho).$$

Симметричное 2-тензорное поле. Возьмем потенциал, обладающий разрывными вторыми производными на границе единичного круга

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^2, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Преобразование Радона этого потенциала легко вычисляется,

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{-t_0}^{t_0} (1 - s^2 - t^2)^2 dt = \frac{16}{15} (1 - s^2)^{5/2}, \quad (21)$$

где $t_0 = \sqrt{1 - s^2}$. Вторая частная производная от (21) по s : $\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \frac{16}{3} \sqrt{1 - s^2} (4s^2 - 1)$. Она совпадает, в частности, с продольным лучевым преобразованием соленоидального симметричного 2-тензорного поля, образованного потенциалом φ .

Промежуточные рассуждения и вычисления аналогичны использованным в случае векторного поля, но более технически сложны и громоздки. Мы их опускаем, и приводим лишь некоторые выводы.

Запишем предельное поведение частных производных поля μ при $\rho \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x} &\sim -x \mathbf{K}(\rho), & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x} &\sim y \mathbf{K}(\rho), & \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x} &\sim -x^3 \mathbf{K}(\rho), \\ \frac{\partial \mu_{11}}{\partial y} &\sim -y^3 \mathbf{K}(\rho), & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial y} &\sim x \mathbf{K}(\rho), & \frac{\partial \mu_{22}}{\partial y} &\sim -y \mathbf{K}(\rho), \end{aligned}$$

которое дает представление о поведении частных производных (либо $+\infty$, либо $-\infty$) при попадании точки в одну из четвертей и на оси координат.

Получаем, что

$$\frac{\partial \mu_{11}}{\partial \rho} \sim -\mathbf{K}(\rho), \quad \frac{\partial \mu_{12}}{\partial \rho} \sim \cos \gamma \sin \gamma \mathbf{K}(\rho), \quad \frac{\partial \mu_{22}}{\partial \rho} \sim -\mathbf{K}(\rho),$$

при $\gamma \neq \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Стремление к $\pm\infty$ частных производных при $\rho \rightarrow 1$ позволяет использовать, например, оператор $|d(\cdot)|$ в качестве индикатора разрыва. Действительно, по определению имеем

$$|d\mu|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial y} \right)^2 \rightarrow \infty$$

при $\rho \rightarrow 1$. Ниже, в следующей секции, мы приведем и другие операторы индикатора разрывов. Разумеется, это неполный список. Так, мы не включили в список операторов индикатора разрывов (тензорного поля) операторы дифференцирования по s .

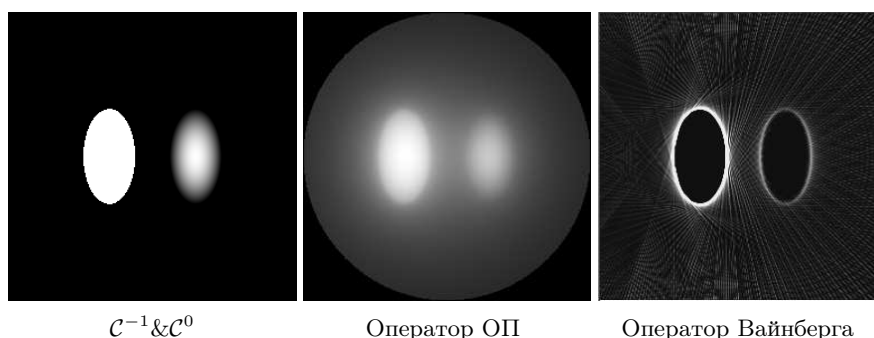
4 Численные эксперименты

Тест 1.: *Разрывная функция и функция с разрывами в первых производных.*

Оператор Вайнберга на различает разрывы функций и разрывы ее первых производных.

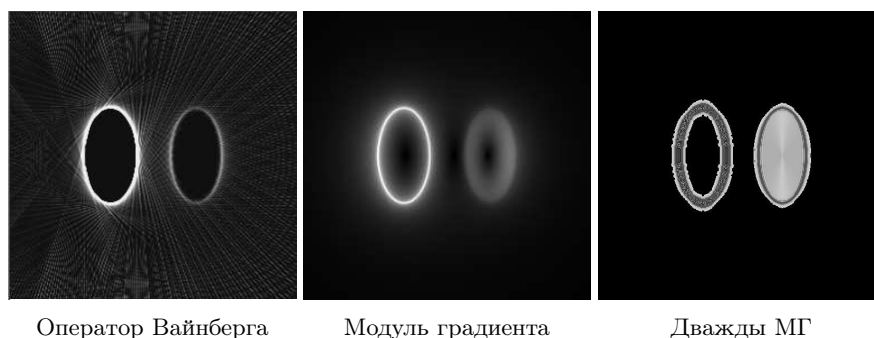
Оператор Вайнберга — это следующая последовательность действий:

$$\mathcal{R}\varphi \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{R}\varphi) \rightarrow \mathcal{R}^\# \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{R}\varphi) \right) = g(x, y).$$



Оператор “модуль градиента”, примененный к оператору обратной проекции:

$$\mathcal{R}\varphi \rightarrow \mathcal{R}^\#(\mathcal{R}\varphi) \rightarrow |\nabla(\mathcal{R}^\#(\mathcal{R}\varphi))| = g(x, y).$$



Оператор двойного “модуля градиента”, начиная с последней функции g предыдущей цепочки (модуль градиента):

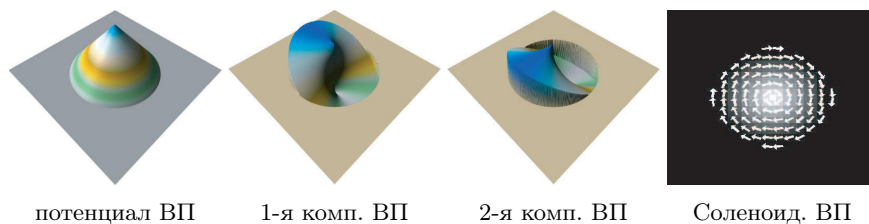
$$g(x, y) \rightarrow \nabla g \rightarrow |\nabla g| = h(x, y).$$

Выводы вполне очевидны. Оператор Вайнберга не отличает разрывы функции и разрывы ее первых производных. С математической точки зрения этот оператор “аппроксимирует” δ -функция, которая возникает на линии разрыва после двойного дифференцирования по s . Оператор “модуль градиента” действует более аккуратно. Из рисунка видно, что никакой особенности у непрерывной функции с разрывами первого рода в производных, не возникает, но разрывы разрывной функции хорошо проявляются.

Тест 2.: *Разрывное соленоидальное векторное поле.*

Векторное поле образуется из потенциала $\varphi(x, y) = h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 < R^2$ и $\varphi(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 \geq R^2$:

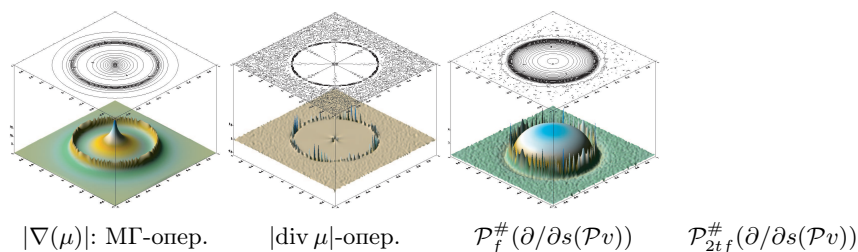
$$v = (v_1, v_2) = \left(\frac{h}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{h}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$



Продольное лучевое преобразование рассматриваемого соленоидального векторного поля

$$(\mathcal{P}v)(\eta, s) = -s \frac{h}{R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - s^2}}{R - \sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Результаты действия различных операторов индикатора разрывов.



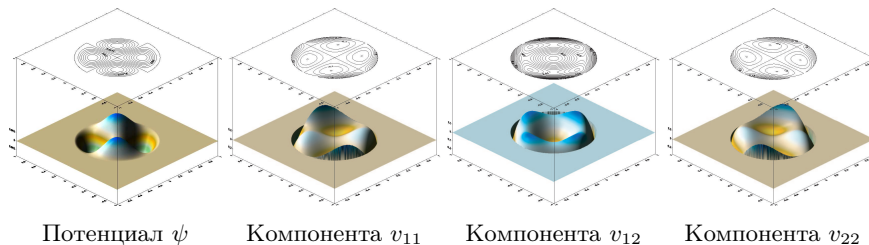
Операторы индикаторов разрывов соленоидального векторного поля кратко описываются следующими последовательными цепочками простых операторов.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}v &\rightarrow \mathcal{P}_{1tf}^{\#}(\mathcal{P}v) = (\mu_1, \mu_2) \rightarrow \nabla\mu = (v_{ij}) \rightarrow |\nu(x, y)|; \\ \mathcal{P}v &\rightarrow \mathcal{P}_{1tf}^{\#}(\mathcal{P}v) = (\mu_1, \mu_2) \rightarrow |\operatorname{div} \mu(x, y)|; \\ \mathcal{P}v &\rightarrow \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{P}v) = g(\eta, s) \rightarrow |\mathcal{P}_f^{\#}(\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{P}v))(x, y)|; \\ \mathcal{P}v &\rightarrow \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{P}v) = g(\eta, s) \rightarrow |\mathcal{P}_{2tf}^{\#}(\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{P}v))(x, y)|. \end{aligned}$$

Как видно из рисунка, операторы $|\nabla(\mu)|$ и $|\operatorname{div} \mu|$ выделяют изолированную сингулярность в начале координат. Если же вначале применяется оператор дифференцирования по s , а затем операторы обратной проекции, то эта точка теряется, хотя линия разрыва проявляется хорошо.

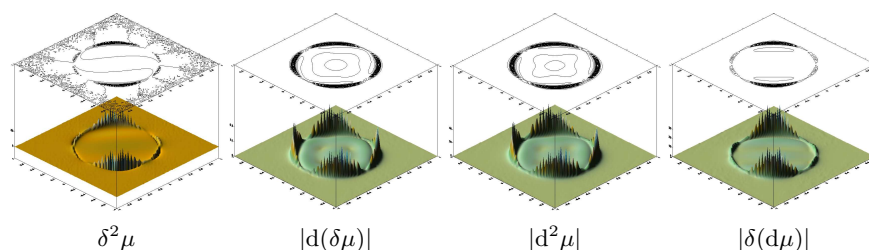
Тест 3.: Разрывное соленоидальное симметричное 2-тензорное поле.

Следующий потенциал генерирует разрывное соленоидальное симметричное 2-тензорное поле: $\psi(x, y) = xy(R^2 - x^2 - y^2)^2$, при $x^2 + y^2 < R^2$ и $\psi(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 \geq R^2$,



Один из операторов индикатора разрывов — это $|\operatorname{d}^2\mu|$. Более подробно, вычисляется $Q_{11ij}(x, y) = \operatorname{d}^2\mu_{11}(x, y)$, $Q_{12ij}(x, y) = \operatorname{d}^2\mu_{12}(x, y)$, $Q_{22ij}(x, y) = \operatorname{d}^2\mu_{22}(x, y)$, и тогда функция $Q(x, y) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 (|Q_{11ij}|^2 + |Q_{12ij}|^2 + |Q_{22ij}|^2)}$ выделяет линии разрыва симметричного 2-тензорного поля (v_{11}, v_{12}, v_{22}) .

Приведем примеры других операторов индикатора разрывов. Это $Q(x, y) := |d(\delta\mu)|$, или $Q(x, y) := |\delta(d\mu)|$, или $Q(x, y) := |\delta^2\mu|$. На рисунке ниже приведены результаты применения указанных четырех операторов.



Как видим, если последний применяемый оператор δ , то гладкая часть поля обращается в нуль, как и следовало ожидать. Если же последний оператор d , то гладкая часть ненулевая, но линия разрыва, тем не менее, проявляется хорошо.

Список литературы

1. Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L. X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features // Soviet J. Nondest. Test. — 1985. — Vol. 21. — P. 106–113.
2. Faridani A., Ritman E. L., Smith K. T. Local tomography // SIAM J. Appl. Math. — 1992. — Vol. 52, № 2. — P. 459–484.
3. Faridani A., Finch D. V., Ritman E. L., Smith K. T. Local tomography II // SIAM J. Appl. Math. — 1997. — Vol. 57, № 4. — P. 1095–1127.
4. Louis A. K., Maass P. Contour Reconstruction in 3-D X-Ray CT // IEEE Trans. Med. Imag. — 1993. — Vol. 12, № 4. — P. 764–769.
5. Аниконов Д. С. Использование особенностей решения уравнения переноса в рентгеновской томографии // Доклады РАН. — 1994. — Vol. 335, № 6. — С. 702–704.
6. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 256 с.
7. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — ОНТИ, Гос. технико-теоретическое изд., Ленинград-Москва, 1934. — 456 с.
8. Деревцов Е. Ю. Некоторые задачи не скалярной томографии // Сиб. Электронные Матем. Известия, Труды первой международной молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”, Часть I. — 2010. — Т. 7. — С. 81–111.
9. Деревцов Е. Ю. Томография сложных сред: модели, методы, алгоритмы. Часть II. Модели векторной и тензорной томографии. — Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2010. — 84 с.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, ГФМЛ, 1971. — 1108 с.

О применимости корреляционного анализа для случайных сигналов с нелинейной регрессией

В.В. Губарев, Р.В. Терехов и С.А. Пушкарева

Новосибирский Государственный Технический Университет, Новосибирск, Россия
gubarev@vt.cs.nstu.ru, stealth-709@yandex.ru, neliko3@rambler.ru

Аннотация. Изложены опасения, касающиеся неверной интерпретации случайных процессов (СП) с нелинейной регрессией, если для их анализа используются средства традиционного корреляционного и спектрального анализа. Приводятся известные и вновь выявленные свойства и особенности авто-(собственных) и взаимных функций регрессии СП. Дается статистическая интерпретация результатов замены функции регрессии среднеквадратичной прямой регрессии и скедастической функцией - их "среднеквадратическими аналогами" и поясняются к чему это приводит при традиционном корреляционно-спектральном анализе процессов с нелинейной регрессией. Рассматривается перечень задач разведочного анализа данных, необходимость и пригодность его при обработке случайных сигналов, временных рядов, имеющих нелинейные регрессии.

Ключевые слова: Случайный процесс, корреляция, корреляционный анализ, регрессия, регрессионный анализ, разведочный анализ данных

1 Постановка задачи

Как правило, корреляционно-спектральный анализ случайных сигналов, т.е. сигналов, модельно математически описываемых случайными процессами (СП), проводят, не задумываясь о виде их функции регрессии (ФР). Однако хорошо известно, что корреляционный анализ случайных величин X и Y , как элементов случайного вектора в частности представляющего собой временные отсчёты $X(t_1)$ и $Y(t_2)$ случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$, репрезентативен строго говоря, лишь тогда и только тогда, когда эти величины X и Y линейно статистически, в частности функционально, связаны. Если эта связь нелинейная, то по значению коэффициентов корреляции и, следовательно нормированных корреляционных функций (НКФ) $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ и $\rho_{XY}(t_1, t_2)$ случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ можно лишь приближенно судить о степени связи X и Y или $X(t_1)$ и $X(t_2)$ либо $X(t_1)$ и $Y(t_2)$. Степень точности или приближенности функций зависит от того, насколько функции регрессии $m_Y(x)$, $m_X(y)$ величин X , Y или $m_X(x; t_1, t_2) = \mathbf{M}\{X(t_2)|X(t_1) = x\}$, $m_Y(x; t_1, t_2) = \mathbf{M}\{Y(t_2)|X(t_1) = x\}$, $m_X(y; t_1, t_2) = \mathbf{M}\{X(t_2)|Y(t_1) = y\}$, где $\mathbf{M}\{Y|X = x\}$ - оператор условного математического ожидания, а также $m_X(x; t_2, t_1)$, $m_Y(x; t_2, t_1)$, $m_X(y; t_2, t_1)$ для $X(t)$, $Y(t)$ отличны от линейных в области вероятных значений X и Y . В ряде случаев (см., например примеры в [1-3]) выводы по значениям $\rho_{XX}(t_1, t_2)$, $\rho_{XY}(t_1, t_2)$ могут привести к ложным заключениям о характере связи между X и Y или между отсчетами $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_1)$, $Y(t_2)$. Поскольку нормированные спектральные плотности мощности $s_{XX}(\omega)$, $s_{XY}(\omega)$ стационарных СП линейно связаны с НКФ $\rho_{XX}(\tau)$ и $\rho_{XY}(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$, через экспоненциальное преобразование Фурье, отсюда следует возможность возникновения неверных суждений по значениям $s_{XX}(\omega)$, $s_{XY}(\omega)$ о тех частотных спектральных особенностях СП, которые мы пытаемся использовать (исследовать) при решении конкретной прикладной задачи.

В связи с изложенным, в докладе рассматриваются особенности функций авторегрессии $m_X(x; t_2, t_1)$ СП $X(t)$ по сравнению с ФР случайных величин X , Y и степень репрезентативности КФ для характеристик связи отсчетов стационарного СП с нелинейной авторегрессией.

2 Особенности функций регрессии случайных процессов

Для упрощения далее будем рассматривать только стационарные на уровне всех рассматриваемых характеристик СП $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, и детерминированные (безынерционные) преобразования $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$. Прежде всего, приведем известные [1] и вновь выявленные особенности ФАР, в том числе ФАР СП. Это свойства: вырожденности, симметрии, пропорциональности. Заменяем для стационарных СП $m_X(x; t_1, t_2) = m_X(x; t_2 - t_1) = m_X(x; \tau)$, $m_X(y; t_1, t_2) = m_X(y; \tau)$ и т.д. Свойства вырожденности математически представляются равенствами: $m_X(x; t, t) = x$, $\sigma_X^2(x; t, t) = 0$; $m_Y(x; t, t) = f(x)$, $\sigma_Y^2(x; t, t) = 0$, если $Y(t) = f[X(t)]$, когда f – однозначная функция, и,

Свойство симметрии ФАР означает, что для стационарных СП $m_X(x; \tau) = m_X(x; -\tau)$. Свойства пропорциональности относятся к СП $X(t)$, $Y(t)$ с линейной регрессией и если $m_X(x; \tau) = \mathbf{M}\{X(t + \tau)|X(t) = x\} = m_X + \varphi_X(x; \tau)$; $m_X(y; \tau) = \mathbf{M}\{X(t + \tau)|Y(t) = y\} = m_X + \varphi_X(y; \tau)$; $m_Y(x; \tau) = \mathbf{M}\{Y(t + \tau)|X(t) = x\} = m_Y + \varphi_Y(x; \tau)$, то (3):

$$\begin{cases} \mathbf{M}\{\dot{X}(t)\varphi_X[X(t + \tau); \tau]\} = \mathbf{M}_X\{\varphi_X^2(X; \tau)\}, \\ \varphi_X(x; 0) = x - m_X; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}\{\dot{X}(t)\varphi_X[Y(t + \tau); \tau]\} = \mathbf{M}_Y\{\varphi_X^2(Y; \tau)\}, \\ \varphi_X(y; \tau_0) = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y)\text{sign}\rho_{XY}(\tau_0) \mid |\rho_{XY}(\tau_0)| = 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}\{\dot{Y}(t)\varphi_Y[X(t + \tau); \tau]\} = \mathbf{M}_X\{\varphi_Y^2(X; \tau)\}, \\ \varphi_Y(x; \tau_0) = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X)\text{sign}\rho_{XY}(\tau_0) \mid |\rho_{XY}(\tau_0)| = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Верхние выражения в (1)-(3) справедливы для ЛР-процессов при всех τ , для всех ФР при $\tau = 0$ для (1) и для τ_0 , где τ_0 определяется равенством $|\rho_{XY}(\tau_0)| = 1$ для (2) и (3), т.е., опять таки, для ЛР-случая. Кроме того всегда $\mathbf{M}_X\{m_X(x; \tau)\} = m_X$, $\mathbf{M}_Y\{m_X(y; \tau)\} = m_X$, $\mathbf{M}_X\{m_Y(x; \tau)\} = m_Y$.

3 Статистическая интерпретация результатов замены функции регрессии её "среднеквадратическими аналогами"

Использование традиционного корреляционного анализа для случайных сигналов (процессов) по сути дела равноценно статистической линеаризации регрессии. Поэтому исследуем подобные линеаризации. Для этого помимо функций авторегрессии $m_X(x; \tau)$ СП $X(t)$ и $m_Y(y; \tau)$ СП $Y(t) = f[X(t)]$ и взаимной регрессии $X(t)$ и $Y(t) = f[X(t)]$, например $m_Y(x; \tau)$, будем рассматривать также условные среднеквадратические отклонения $\sigma(\cdot)$ или (скедастические функции) $\sigma^2(\cdot)$, а именно, $\sigma_X(x; \tau)$, $\sigma_Y(y; \tau)$, $\sigma_Y(x; \tau)$, а также «эквивалентные» «линейные» среднеквадратические отклонения $\tilde{\sigma}(\cdot)$, где

$$\tilde{D}_X(x; \tau) = \tilde{\sigma}_X^2(x; \tau) = \mathbf{M}\{[X(t + \tau) - \tilde{m}_X(x; \tau)]^2|X(t) = x\} \quad (4)$$

$$\tilde{D}_Y(x; \tau) = \tilde{\sigma}_Y^2(x; \tau) = \mathbf{M}\{[Y(t + \tau) - \tilde{m}_Y(x; \tau)]^2|X(t) = x\} \quad (5)$$

где $\tilde{m}_X(x; \tau)$, $\tilde{m}_Y(x; \tau)$ – соответствующие среднеквадратические прямые регрессии СП, например,

$$\tilde{m}_Y(x; \tau) = m_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}(\tau)(x - m_X) \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{D}_Y(x; \tau) = \sigma_Y^2(x; \tau) + [m_Y(x; \tau) - m_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}(\tau)(x - m_X)]^2 \quad (7)$$

$$\tilde{D}_X(x; \tau) = D_X(x; \tau) + [m_X(x; \tau) - x\rho_{XX}(\tau) + m_X(1 - \rho_{XX}(\tau))]^2 \quad (8)$$

Для центрированных $X(t)$, $Y(t)$, т.е. при $m_X = m_Y = 0$ из (7), (8) получаем

$$\tilde{D}_Y(x; \tau) = \sigma_Y^2(x; \tau) + [m_Y(x; \tau) - m_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY}(\tau)]^2 \quad (9)$$

$$\tilde{D}_X(x; \tau) = D_X(x; \tau) + [m_X(x; \tau) - x\rho_{XX}(\tau)]^2 \quad (10)$$

Из (7)-(10) следует очевидное, если $X(t)$ и $Y(t)$ имеют линейную регрессию, то

$$\tilde{D}_Y(x; \tau) = D_Y(x; \tau), \tilde{D}_X(x; \tau) = D_X(x; \tau) \quad (11)$$

Из (8), (10) также следует, что всегда когда рассматриваемые моменты существуют, $\tilde{D}_X(x; 0) = 0$. Это равенство может использоваться как проверочное для определения верности аналитического выражения для $\tilde{D}_X(x; \tau)$. Заметим, что неотрицательное правое слагаемое в (7)-(10) показывает, насколько может возрасти условный квадрат разброса (размаха) $Y(t+\tau)$ или $X(t+\tau)$ для $X(t) = x$ по отношению к прямой среднеквадратической регрессии по сравнению с квадратом разброса по отношению к истинной нелинейной функции регрессии. В этом и состоит суть статистической интерпретации ущербности обычного корреляционного анализа при нелинейной авторегрессии СП. Для числовой оценки коэффициента «ложного» увеличения условного рассеяния $\pm\alpha\hat{\sigma}_Y(x; \tau)$, $\pm\alpha\hat{\sigma}_X(x; \tau)$ значения $X(t+\tau)$ при $X(t) = x$ вокруг $m_Y(x; \tau)$ или $m_X(x; \tau)$, когда мы заменяем истинную ФР $m_Y(x; \tau)$ или $m_X(x; \tau)$ прямой среднеквадратической регрессии (СКР) $\tilde{m}_Y(x; \tau)$ или $\tilde{m}_X(x; \tau)$, по сравнению с истинным условным рассеянием $\pm\alpha\sigma_Y(x; \tau)$, $\pm\alpha\sigma_X(x; \tau)$, где $\alpha > 0$ – заданное число, вокруг истинной ФР $m_Y(x; \tau)$ или $m_X(x; \tau)$ можно использовать показатель – условный коэффициент относительного ложного рассеяния $\zeta_{Y|X}$ и $\zeta_{X|X}$ вида

$$\zeta_{Y|X}^2(x; \tau) = \frac{\tilde{D}_Y(x; \tau) - D_Y(x; \tau)}{D_Y(x; \tau)}, \quad (12)$$

$$\zeta_{X|X}^2(x; \tau) = \frac{\tilde{D}_X(x; \tau) - D_X(x; \tau)}{D_X(x; \tau)}. \quad (13)$$

Для количественной оценки степени ложного увеличения рассеяния вдоль всех значений x можно ввести коэффициенты ложности рассеяния $\xi_{Y|X}$ и $\xi_{X|X}$ вида

$$\xi_{Y|X}^2(\tau) = \frac{\mathbf{M}\{\tilde{D}_Y(x; \tau)\} - \mathbf{M}\{D_Y(x; \tau)\}}{\mathbf{M}\{D_Y(x; \tau)\}}. \quad (14)$$

Аналогично вводится $\xi_{X|X}^2(\tau)$. Используя корреляционные отношения $\xi_{Y|X}$ и $\xi_{X|X}$, где [1-4]

$$\xi_{Y|X}^2(\tau) = \frac{1}{\sigma_Y^2} \mathbf{M}\{[m_Y(x) - m_Y]^2\} = \sqrt{\frac{D\{m_Y(x)\}}{D\{Y\}}}, \quad (15)$$

Из (14) получаем

$$\xi_{Y|X}^2(\tau) = \frac{\eta_{Y|X}^2(\tau) - \rho_{XY}^2(\tau)}{1 - \eta_{Y|X}^2(\tau)}. \quad (16)$$

Из (20) следует, что $\xi^2(\tau) \in [0; \infty]$. При линейной регрессии $\eta_{Y|X}^2(\tau) = \rho_{XY}^2(\tau)$ и $\xi_{Y|X}^2(\tau) = 0$ для всех τ . В то же время, если $Y(t) = f[X(t)]$ и $f(\cdot)$ – однозначная функция, то $\xi_{Y|X}^2(0) = 1$.

При этом ρ_{XY} может иметь любое значение из диапазона $[-1; 1]$, а $\eta_{Y|X}^2$ любые значения из диапазона $[0; 1]$, зависимость от τ вида обратной функции $X = \varphi(Y)$, и, во-вторых от закона распределения $w_X(x)$ (см. примеры в [2-4]). Ясно, что при этом для любых $\rho_{XY}^2 \neq 1$ (т.е. не для линейных в области значений X функций $f(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ $\xi^2 = \infty$). Это понятно, поскольку при этом $\sigma_Y^2(x) = 0$ для всех x , т.е. $\mathbf{M}\{D_Y(x; \tau)\} = 0$. В то же время для ЛР- процессов, для которых $\eta_{Y|X}^2(\tau) = \eta_{X|Y}^2(\tau) = \rho_{XY}^2(\tau)$ всегда $\xi_{Y|X}^2(\tau) = \xi_{X|Y}^2(\tau) = 0$, что следует из (16)-(18). Чтобы избежать бесконечных относительных значений «ложности» введем вместо (12), (13)

$$\sigma_{Y|X}^2 = \frac{\tilde{D}_Y(x; \tau) - D_Y(x; \tau)}{\tilde{D}_Y(x; \tau)}, \quad (17)$$

$$\sigma_{X|X}^2 = \frac{\tilde{D}_X(x; \tau) - D_X(x; \tau)}{\tilde{D}_X(x; \tau)}, \quad (18)$$

а вместо (15)

$$\nabla_{Y|X}^2(\tau) = \frac{\mathbf{M}\{\tilde{D}_Y(x; \tau)\} - \mathbf{M}\{D_Y(x; \tau)\}}{\mathbf{M}\{D_Y(x; \tau)\}} = \frac{\eta_{Y|X}^2(\tau) - \rho_{XY}^2(\tau)}{1 - \rho_{XY}^2(\tau)} \in [0; 1] \quad (19)$$

Понятно, что чем η^2 будет ближе к ρ^2 , т.е. чем ближе функция регрессии $m_Y(x; \tau)$ или $m_X(x; \tau)$ на интервале τ будет к линейной, тем меньше будет $\nabla_{Y|X}^2(\tau)$. И, наоборот, при неважнооднозначных преобразованиях $Y(t) = f[X(t)]$ $\nabla_{Y|X}^2(\tau)$ может достигать значения 1, в частности при $\tau = 0$.

4 Место и роль разведочного анализа при обработке случайны сигналов с учетом вида функции регрессии

В обобщенном понимании разведочный анализ **Данных** = (сигналов \vee данных \vee знаний как носителей информации) состоит из следующих разделов [5]:

- РАД-1 – построение верифицированных апостериорных моделей и гипотез по ним, обеспечение правильной постановки задачи исследования **Данных**;
- РАД-2 – построение апостериорных моделей согласованности **Данных** с постановкой задачи с используемыми средствами и технологиями из получения и анализа;
- РАД-3 – построение апостериорных кумодных моделей **Данных**, отвечающих на вопросы «Как?», «Каким образом устроены данные?», «Что они собой представляют?»;
- РАД-4 – построение квантовых («Сколько?», «На сколько?») апостериорных моделей **Данных**: исследование потенциальных возможностей **Данных** и используемых для их анализа средств;
- РАД-5 – построение квалитасных («Каково качество?») апостериорных моделей **Данных**; повышение качества первичных «сырых» данных;
- РАД-6 – исследование данных для интерпретации результатов их анализа: выявление и дополнение метаданных (данных о данных);
- РАД-7 – построение обучающихся апостериорных моделей **Данных** и знаний об объекте: использование опыта анализа **Данных** при решении прикладных задач.

Перечень показывает, что, согласно РАД-2, РАД-6 и изложенному в п. 1-4, если сигналы и данные типа временного ряда подвергаются корреляционно-спектральному анализу, то их необходимо обязательно проверить на линейность или нелинейности функции регрессии. Поскольку известно, что для случайных векторов одна из функций регрессии может

быть линейно даже в случае, когда вторая не является линейной проверять следует именно нелинейность ФР. Для этого предлагается следующий трёхэтапный способ. Пусть необходимо проверить на нелинейность функции регрессии случайного процесса $X(t)$.

На первом этапе находим оценки $\hat{R}_{XX}(\tau)$ или, лучше, $\hat{\rho}_{XX}(\tau)$. На втором этапе подвергается $X(t)$ однозначному нелинейному преобразованию $f(\cdot)$, т.е. получаем $Y(t) = f[X(t)]$, и находим оценку $\hat{R}_{XY}(\tau)$ или $\hat{\rho}_{XY}(\tau)$. Для повышения достоверности выводов можно этот этап проделать для нескольких разных функций $f(\cdot)$ обобщив или усреднив полученные при этом результаты. На третьем этапе проверяем пропорциональны ли значения $\hat{\rho}_{XY}(\tau)$ значениям $\hat{\rho}_{XX}(\tau)$ для тех же τ или вдоль всех τ для одной или разных $f(\cdot)$. Если нет, то ФР процесса $X(t)$ не является линейной. В качестве одной из критериальных статистик гипотезы нелинейности ФР предлагается статистика

$$\Psi = \frac{(\int_0^\infty [\hat{\rho}_{XX}(\tau) - A\hat{\rho}_{XY}(\tau)]^2 d\tau)}{\int_0^\infty \hat{\rho}_{XX}^2(\tau) d\tau}, \quad (20)$$

где A выбирается теоретически при известных $f(\cdot)$ и функциях распределения $X(t)$ либо подбирается из условия минимума Ψ по A . В дискретной форме статистика Ψ имеет вид

$$\Psi = \frac{\sum_0^\infty [\hat{\rho}_{XX}(k\delta\tau) - A\hat{\rho}_{XY}(k\delta\tau)]^2}{(\sum_0^\infty \hat{\rho}_{XX}^2(\tau))}. \quad (21)$$

Если $\Psi \geq \Psi_0$, то считается, что ФР СП $X(t)$ нелинейная. Значение Ψ_0 назначается либо исходя из сути решаемой прикладной задачи, либо по правилам статистической проверки гипотез. Второй вариант, построение функций регрессии между $\hat{\rho}_{XX}(\tau)$ и $\hat{\rho}_{XY}(\tau)$ для разных τ или $|\rho(\tau)| \in [a, b]$, где $[a, b]$ – диапазон возможных значений $\rho(\tau)$ и проверке её на линейность или визуально по диаграмме рассеяния.

5 Заключение

Представленная работа является одной из работ в серии посвященной исследованию случайных процессов с нелинейной регрессией. В работе приведены опасения, касающиеся неверной интерпретации результатов применения традиционного корреляционного анализа данных в случае его некорректного применения при исследовании случайных процессов с нелинейной регрессией. Приведены известные и вновь выявленные свойства и особенности авто- и взаимных функций регрессии случайных процессов. В результате выполнения работы проведена статистическая интерпретация результатов замены функции регрессии среднеквадратичной прямой регрессии и скедастической функцией - их "среднеквадратическими аналогами основанная на оценке условного разброса $Y(t + \tau)$ или $X(t + \tau)$ для $X(t) = x$ по отношению к прямой среднеквадратической регрессии по сравнению с квадратом разброса по отношению к истинной нелинейной функции регрессии. Рассмотрены перечень задач разведочного анализа данных, необходимость и пригодность его при обработке случайных сигналов, временных рядов, имеющих нелинейные регрессии. Предложен трёхэтапный способ проверки на нелинейность функции регрессии случайного процесса.

В дальнейших работах в первую очередь требуется исследовать влияние авто и взаимных функции регрессии на значения авто- и взаимных КФ. Далее на примере различных нелинейных преобразований СП исследовать влияние видов преобразования и распределения $X(t)$ и их параметров на изменения КФ. А также выполнить обобщение полученных результатов на спектральный анализ сигналов.

Список литературы

1. Райбман Н.С., Капитonenко В.В., Овсепян Ф.А., Варлаки П.М. Дисперсионная идентификация. – М.: Наука, 1981. –366 с.
2. Губарев В.В. Алгоритмы спектрального анализа случайных сигналов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. –660 с.
3. Губарев В.В. Введение в теоретическую информатику. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. –Ч. 1.–420 с.
4. Губарев В.В. Вероятностные модели: Справочник. В 2-х ч. – Новосибирск: НЭТИ, 1992. –Ч. 1.–196 с; –Ч. 2.–с. 197-421;
5. Губарев В.В., Терехов Р.В., Федоров Е.И. Обобщенное понимание терминов "Интеллектуальный"и "Разведочный "анализы данных: тез. докл. науч.-техн. конф. С. 62-64. [Электрон. ресурс]. – 2014. – URL: <http://info.diag.ru/uploads/swfupload/files/db42150d1de362fd40a68c2acc8a8b76bf6bd261.pdf> (дата обращения: 20.05.2015).

Математическая модель двумерного осесимметричного движения газожидкостной смеси в газлифтной скважине

Н.М. Темирбеков, А.К. Тураров

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д.Серикбаева,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан
temirbekov@rambler.ru, t010183@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется задача о движении газа и газожидкостной смеси в газлифтных скважинах. Предложена новая двумерная модель, основанная на уравнениях Навье-Стокса в цилиндрических координатах, которая более подробно описывает физические процессы, протекающие в нефтяном пласте. Исходя из принципа работы газлифтной скважины вычислительная область разделена на три подобласти, в каждой из которых учитываются характеристики соответствующей среды. Предлагается вычислительный алгоритм численной реализации модели, основанный на применении двухшагового метода Лакса-Вендроффа. Приведены результаты вычислительных экспериментов, проведенных для одномерной и двумерной тестовых задач.

Ключевые слова: газлифтный процесс, двумерная модель, газожидкостная смесь

1 Введение

Газлифтный процесс играет важную роль при добыче нефти после фонтанного процесса. Моделированию процесса нефтедобычи газлифтными (вторичными) способами посвящено множество работ зарубежных и отечественных ученых. В работах [1,2,3] рассматривается математическая модель работы нефтяных скважин, эксплуатируемых газлифтным способом, по пузырьковой структуре.

Для решения данной задачи в работах [1,2,3] используется метод прямых, с помощью которого исходные уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой ставится задача построения оптимальных траекторий и управлений при добыче нефти. Принимая в качестве управления давление и объем закачиваемого газа, данная задача сводится к линейно-квадратичной задаче оптимального управления.

В работе [1,2,3,4,5] рассматриваются одномерные модели.

Все вышеназванные работы основаны на классических работах Н.Е. Жуковского о гидравлическом ударе в водопроводных трубах, которые до сих пор лежат на основе всех исследований данного направления. Стоит отметить, что в вышеназванных работах используются одномерные модели и одномерность рассматриваемых процессов заключается в большей разности между диаметрами труб и высотой скважины. Насколько нам известно, двумерные модели, описывающие движение газа и газожидкостной смеси в газлифтных скважинах, не исследовались.

В данной работе предлагается двумерная модель движения газа и газожидкостной смеси в газлифтных скважинах с помощью уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в осесимметричных координатах. Предлагается эффективный алгоритм численного решения данной задачи, основанный на двухшаговой схеме Лакса-Вендроффа. На модельной задаче показывается адекватность предложенной двумерной модели.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приведена одномерная модель работы газлифтной скважины, предложенная в работах [1,2,3]. В третьем разделе предлагается двумерная модель и алгоритм численного решения данной задачи. В четвертом

разделе приведены результаты моделирования для предложенных моделей и проводится анализ вычислительных экспериментов.

2 Одномерное моделирование работы газлифтной скважины

В данном разделе приводится одномерная модель работы газлифтной скважины, изученная в работе [1]. В одномерной ограниченной области Ω рассматривается следующая задача движения газа и газожидкостной смеси в кольцевом пространстве и подъемнике:

$$\begin{aligned} -F_\alpha \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial t} + 2a_i Q, \\ -F_\alpha \frac{\partial P}{\partial t} &= C_i^2 \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$P(x, 0) = 0, \quad P(0, t) = P_0(t), \quad Q(x, 0) = 0, \quad Q(0, t) = Q_0(t), \quad 0 \leq x \leq 2l, \quad (2)$$

где P - давление, Q -объем газа и газожидкостной смеси в соответствующих трубах, D_i , F_i - соответственно, эффективный диаметр и площадь поперечного сечения, a_i , C_i - параметры.

Алгоритм определения давления и объема газа и газожидкостной смеси состоит из двух этапов. На первом этапе из уравнений (1) при $\alpha = 1$ с начальными условиями (2), находится $P_1(x, t)$. На втором этапе, принимая $\alpha = 2$, из (1) находится $P_2(x, t)$, $Q_2(x, t)$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} P_{i+1j} &= P_{ij} - \frac{h}{F_\alpha} \left(\frac{Q_{ij} - Q_{ij-1}}{\tau} + 2a_i Q_{ij} \right), \\ Q_{i+1j} &= Q_{ij} - \frac{h \cdot F_\alpha}{C_\alpha^2 \cdot \tau} (P_{ij} - P_{ij-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 2, 3, \dots, K - 1,$$

Выберем h и τ так, чтобы выполнялись условия $\frac{h}{F_\alpha} < 1$, $\frac{h \cdot F_\alpha}{C_\alpha^2 \cdot \tau} < 1$, $\frac{2ha_i}{F_\alpha} < 1$, где дебит $Q(2l, t) = Q_2(2l, t)$ является результатом решения уравнений (1).

Используя условия $Q(x, 0) = 0$ и $P(x, 0) = 0$ при $t = 0$, найдем $\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ и $\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$. При $x = 0$, учитывая условия (2), находим:

$$-F_\alpha \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial Q_0}{\partial t} + 2aQ_0, \quad C_\alpha^2 \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=0} = -F_\alpha \left. \frac{\partial P_0}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Приведенная модель позволяет описать принцип работы газлифтной скважины с рядом упрощающих предположений относительно физических данных месторождения.

Однако, описанная одномерная модель не учитывает физические свойства среды, такие как пористость, проницаемость, а также характеристики нефти, например, вязкость. Эти факторы ограничивают использование приведенной модели в нефтяной промышленности.

В следующем разделе предлагается усовершенствованная модель, которая учитывает приведенные недостатки одномерной модели.

3 Двумерное осесимметричное моделирование движения газа и газожидкостной смеси в газлифтной скважине

В данном разделе исследуется двумерная задача о движении газа и газожидкостной смеси в прискважинной зоне пласта. Принцип работы газлифтной скважины представлен на рисунке 1. Газлифтная установка представляет собой две концентрические трубы с длинами L и l и радиусами R и r_0 , где $L > l$, $R > r_0$. Через входную границу кольцевого пространства нагнетается газ со скоростью f_1 . При контакте нагнетаемого газа с пористой средой, образовавшаяся газожидкостная смесь движется вверх по подъемной трубе.

Таким образом, вычислительная область разделена на три подобласти, представленные на рисунке 1: D_1 - кольцевое пространство скважины, D_2 - пористая среда, D_3 - внутренняя (подъемная) труба. В качестве расчетной области принимается осевое сечение ОАВС цилиндрической фигуры.

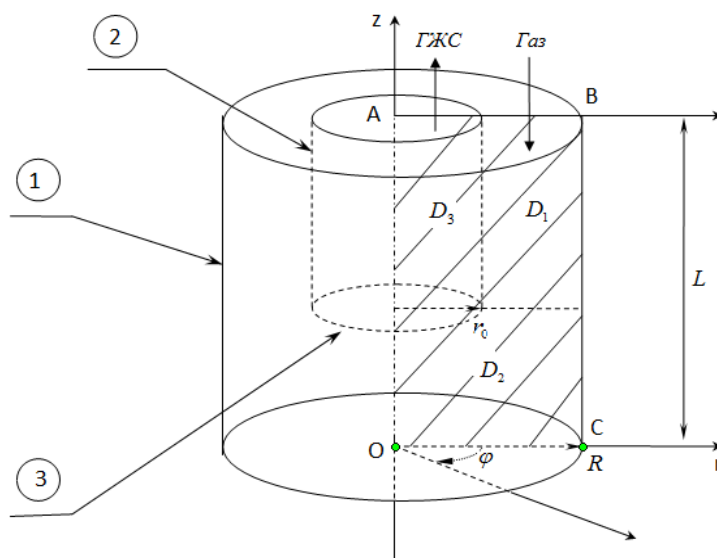


Рис. 1. Схематическое изображение отрезка скважины. 1 - внешняя труба, 2 - внутренняя (подъемная) труба, 3 - вход в подъемную трубу

Движение газа и газожидкостной смеси в области $D = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L\}$, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho w)}{\partial z} \right] = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\rho u^2)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho u w)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2u}{3r} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] - \mu \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - ku, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\rho u w)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho w^2)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(r\mu \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{3r} \right) \right) \right] + \rho g - kw. \end{aligned} \quad (6)$$

$$P = \rho RT, \quad (7)$$

здесь t - время; ρ - плотность; u, w - составляющие скорости в координатных направлениях r, z ; P - давление; T - температура; μ - коэффициент вязкости; g - ускорение свободного падения.

Начальные значения $\rho_{ij}, p_{ij}, u_{i+1/2j}, w_{i+1/2j}$ предполагаются известными. Уравнения (4)-(6) замыкаются следующими граничными условиями: на входной границе скважины задана скорость нагнетания газа $w(r, z) = f_1(r)$, на внешней стенке кольцевого пространства и стенке подъемной скважины $w(r, z) = 0, u(r, z) = 0$. На оси симметрии $\frac{\partial w(r, z)}{\partial r} = u(r, z) = 0$.

Вязкость газа и газожидкостной смеси $\mu(r, z)$ и коэффициент проницаемости пористой среды $k(r, z)$ определяются следующим образом:

$$\mu(r, z) = \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{R}{d} \right), k(r, z) = \frac{k_0 \cdot (1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{R}{d}$$

где ε - параметр описывающий пористость среды, R - радиус внешней скважины, d - диаметр капилляра.

Для численного решения начально-краевой задачи (4)-(7) в области D определим равномерные разностные сетки по r и z в следующем виде:

$$W_{h_1} = \{r_i = ih_1, i = 1, \dots, N_1, h_1 n = R\},$$

$$W_{h_2} = \{z_j = jh_2, j = 1, \dots, N_2, h_2 n = L\}$$

где h_1 и h_2 - шаги расчетной сетки по r и z , соответственно.

Для численного решения задачи (4)-(6) с указанными выше начальными и граничными условиями применяется разностная схема двухшагового метода Лакса-Вендроффа [6].

Запишем конечно-разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (4)-(6):

$$\frac{\rho_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau} + \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{r_{i+1} \rho_{i+1, j+1/2}^n u_{i+1, j+1/2}^n - r_i \rho_{i, j+1/2}^n u_{i, j+1/2}^n}{h_1} +$$

$$+ \frac{\rho_{i+1/2, j+1}^n w_{i+1/2, j+1}^n - \rho_{i+1/2, j}^n w_{i+1/2, j}^n}{h_2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\rho_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} u_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2, j+1/2}^n u_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau} =$$

$$- \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{r_{i+1} \rho_{i+1, j+1/2}^n (u_{i+1, j+1/2}^n)^2 - r_i \rho_{i, j+1/2}^n (u_{i, j+1/2}^n)^2}{h_1} -$$

$$- \frac{\rho_{i+1/2, j+1}^n u_{i+1/2, j+1}^n w_{i+1/2, j+1}^n - \rho_{i+1/2, j}^n u_{i+1/2, j}^n w_{i+1/2, j}^n}{h_2}$$

$$- \frac{2}{3r_{i+1/2}} \frac{\mu_{i+1, j+1/2} u_{i+1, j+1/2}^n - \mu_{i, j+1/2} u_{i, j+1/2}^n}{h_1} +$$

$$+ \frac{2\mu_{i+1/2, j+1/2}}{3r_{i+1/2}} \left[\frac{u_{i+1, j+1/2}^n - u_{i, j+1/2}^n}{h_1} - \frac{w_{i+1/2, j+1}^n - w_{i+1/2, j}^n}{h_2} \right] - \frac{p_{i+1, j+1/2}^n - p_{i, j+1/2}^n}{h_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} w_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2, j+1/2}^n w_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau} = \\
= & \frac{1}{r_{i+1/2}} \frac{r_{i+1} \rho_{i+1, j+1/2}^n u_{i+1, j+1/2}^n w_{i+1, j+1/2}^n - r_i \rho_{i, j+1/2}^n u_{i, j+1/2}^n w_{i, j+1/2}^n}{h_1} - \\
& \frac{\rho_{i+1/2, j+1}^n (w_{i+1/2, j+1}^n)^2 - \rho_{i+1/2, j}^n (w_{i+1/2, j}^n)^2}{h_2} - \\
& \frac{2}{3r_{i+1/2}} \frac{\mu_{i+1/2, j+1} u_{i+1/2, j+1}^n - \mu_{i+1/2, j} u_{i+1/2, j}^n}{h_2} - \\
& \frac{p_{i+1/2, j+1}^n - p_{i+1/2, j}^n}{h_2}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Аналогично записывается разностный аналог второго шага схемы Лакса-Вендроффа.

Расчеты проводятся согласно следующему алгоритму: из уравнения неразрывности находится $\rho_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$, используя которое определяется $u_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$. Используя найденное значение $u_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$ находится $w_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}$. Далее, в указанном порядке вычисляются значения плотности и компонентов скоростей на целом временном шаге. На заключительном этапе поле давления определяется из уравнения состояния $P_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{n+1} \cdot T_{i,j}^{n+1} \cdot R$. Итерационный процесс завершается при достижении заданной точности δ :

$$\max_{ij} \left| w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n \right| < \delta.$$

Численное решение вышеизложенной разностной задачи позволяет прогнозировать динамику изменения газовой и газожидкостной среды, давления и объема газожидкостной смеси в осесимметричной газлифтной скважине.

4 Результаты расчетов и обсуждение модели

Для проверки предложенных алгоритмов проведены вычислительные эксперименты. Первая серия расчетов была выполнена по известной одномерной модели, рассмотренной в разделе 2. Исходные данные, использованные в вычислительных экспериментах, приведены в таблице 1.

Таблица 1- Исходные данные для расчетов по одномерной модели

Величина	Движение в кольцевом пространстве, $\eta = 1$	Движение в подъемнике, $\eta = 2$
Длина скважины l , м.	1485	
Время T , с.	1750	
Плотность газа и нефти ρ , кг/м ³	0.717	700.0
Радиус кольцевого пространства и подъемной трубы	0,114	0.065
Среднее давление на пласте \bar{P} , МПа	1,733	

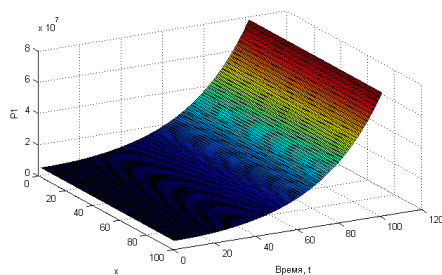


Рис. 2. Давление $P(x, t)$, $0 \leq x \leq 2l$

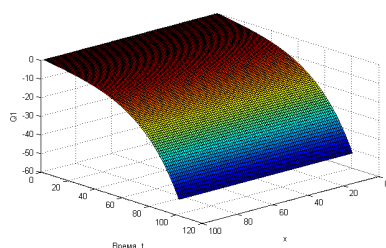


Рис. 3. Давление $P(x, t)$, $0 \leq x \leq 2l$

На рисунках 2 и 3 представлены графики для давления $P(x, t)$ и объема $Q(x, t)$ в кольцевом пространстве.

На рисунках 4-5 приведены результаты вычисления давления и объема газа в подъемнике. Из рисунка 5 видно, что $P(x, t)$ и $Q(x, t)$ уменьшается, что подтверждает адекватность модели.

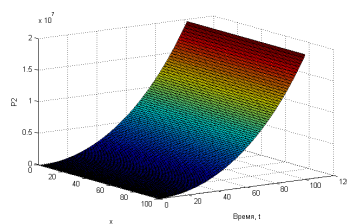
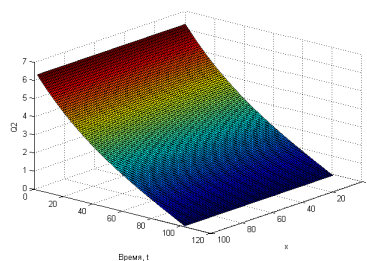


Рис. 4. Давление $P(x, t)$, $l \leq x \leq 2l$

Известно, что когда подаваемый газ увеличивается до определенного оптимального значения, дебит увеличивается, а после оптимального значения дебит начинает уменьшаться, несмотря на увеличение подаваемого газа в устье газлифтного устройства.

Вторая серия расчетов проведена по двумерной модели, предложенной в разделе 3. Выбрана прямоугольная сетка размером 101×101 узлов. Шаг по времени был выбран равным 0,001. Параметр ε выбран в следующем виде:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & (r, z) \in D_1 \\ 0.5, & (r, z) \in D_2 \\ 0.7, & (r, z) \in D_3 \end{cases}$$

Рис. 5. Дебит $Q(x, t)$, $l \leq x \leq 2l$

Поле вектора скорости движения газа в подобластях D_i , $i = 1, 2, 3$ представлено на рисунке 6. В связи с малым сопротивлением среды в области D_1 , вектор скорости направлен горизонтально вниз. При входе нагнетаемого газа в пористую среду (область D_2), нагнетаемый газ смешивается с нефтью. Образовавшаяся газожидкостная смесь поступает в подъемную трубу D_3 .

На рисунке 7 представлены результаты определения функции тока.

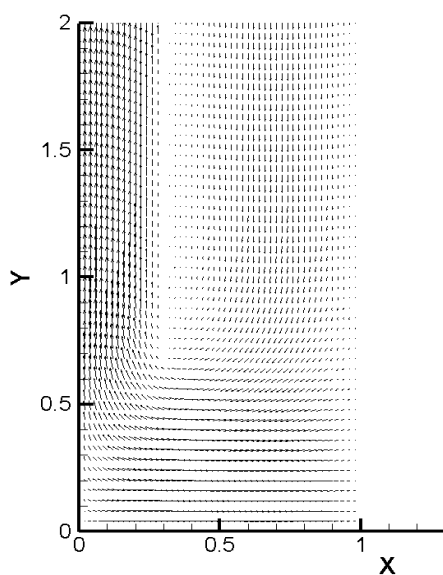


Рис. 6. Поле вектора скорости

5 Заключение

В данной работе исследована известная одномерная и предложена двумерная модель движения газа и газожидкостной смеси в газлифтной скважине. В основном в одномерной модели применяется метод прямых и вариационный метод. Основываясь на этих исследованиях, в данной работе разработано двумерная модель. Предложенная модель более подробно и детально описывает физический процесс в нефтяном пласте. В этой работе предлагается единая двумерная модель движения газа и газожидкостной смеси в газлифтных скважинах с помощью уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в осесимметричных координатах.

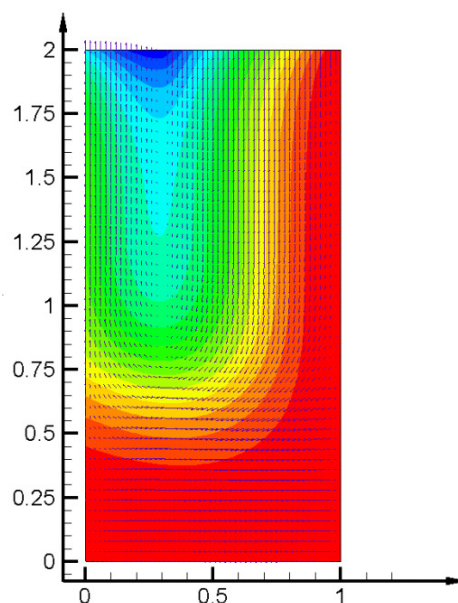


Рис. 7. Поле вектора скорости и функции тока

Предлагается эффективный алгоритм численного решения данной задачи, основанный на двухшаговой схеме Лакса-Вендроффа. На модельной задаче с помощью графиков иллюстрируется адекватность предложенной двумерной модели.

Список литературы

1. Алиев Ф.А., Гулиев А.П., Ильясов М.Х., Алиев Н.А., Алгоритм решения задачи определения движения пространственного газлифтного процесса // Труды института прикладной математики, Т.2, №1, 2013. – С. 91-98.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклад НАН Азерб., №4, 2008. - С. 107-116.
3. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом // Доклады НАН Азербайджана, т. 55, № 5, 2009. - С.9-18.
4. Барашкин Р.Л., Самарин И.В., Разработка модели и алгоритмов функционирования газлифтной скважины как объекта системы оперативного управления. - Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина - Москва, 2011. - 152 с.
5. Шуров В.И. Технология и техника добычи нефти. - М., Недра, 1983. - 510 с.
6. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - Т1, Издательство "Мир 1990. - 385 с.

Численное моделирование размыва грунта у основания платформ гравитационного типа

Ю.Н. Захаров, Н.А. Гейдаров и К.С. Иванов

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия
zaxarovyn@rambler.ru, geidarovn@gmail.com, topspin83@mail.ru

Аннотация. В настоящее время активно используются прибрежные мелководные части морей в процессе добычи нефти и газа, для чего применяются платформы гравитационного типа, которые устанавливаются на дно водоёма. При проектировании и эксплуатации таких платформ одной из основных задач является обеспечение устойчивости. Потеря устойчивости платформы может происходить из-за размыва грунта у ее основания под действием придонного течения. В процессе решения задачи о размыве грунта при обтекании платформы наиболее важным этапом является моделирование и последующий расчет возникающих течений. В данной работе проведены численные расчеты движения жидкости вблизи платформ двух типов, а также расчеты размыва донного материала у ее основания.

Ключевые слова: размыв грунта, уравнения Навье-Стокса, перепад давления

1 Введение

В настоящее время активно используются прибрежные мелководные части морей в процессе добычи нефти и газа. Для этого применяются платформы гравитационного типа, которые устанавливаются непосредственно на дно водоёма.

При проектировании и эксплуатации таких платформ одной из основных задач является обеспечение устойчивости. Потеря устойчивости платформы может происходить из-за размыва грунта у ее основания под действием придонного течения, постоянного или возникающего во время шторма. Определение величины размыва грунта вблизи опорных оснований установок представляет собой актуальную проблему, которая в настоящее время далека от своего решения вследствие сложности процессов взаимодействия придонных волновых и постоянных течений с донным материалом и препятствиями в виде установленных сооружений, а также с отсутствием достаточного количества экспериментальных данных.

В процессе решения задачи о размыве грунта при обтекании платформы наиболее важным этапом является моделирование и последующий расчет возникающих течений. В данной работе проведены численные расчеты движения жидкости вблизи платформ двух типов, а также расчеты размыва донного материала у ее основания.

2 Гидродинамика

В работе рассматриваются математические модели для ламинарных и турбулентных течений, представляющие собой систему нестационарных уравнений Навье-Стокса.

2.1 Ламинарное течение

Основные уравнения, описывающие пространственное течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в безразмерном виде имеют следующий вид (см. [1]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta V, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad (2)$$

где V – вектор скорости, P – скалярная функция давления, Re – число Рейнольдса. Течение жидкости происходит в области G с границей ∂G на временном промежутке $[0, T]$.

Без ограничения общности будем считать, что в начальный момент времени жидкость покоится, т.е. для системы (1), (2) ставятся однородные начальные условия для компонент вектора скорости и давления. Граница ∂G представляет собой объединение двух типов границ: твердые стенки (Γ_1) и участки протекания (Γ_2). На Γ_1 задаются условия прилипания и непроницаемости для компонент вектора скорости, условия для давления на твердых стенках отсутствуют. На Γ_2 либо заданы условия для компонент вектора скорости первого или второго рода (постановка задачи в скоростях), либо известны значения функции давления (постановка задачи в давлениях).

Для численного интегрирования по времени системы (1), (2) используется схема расщепления по физическим факторам [2]:

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} = (V^n \cdot \nabla)V^* - \frac{1}{Re} \Delta V^*, \quad (3)$$

$$\Delta P^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}(V^*), \quad (4)$$

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} = -\nabla P^{n+1}, \quad (5)$$

Для дискретизации системы (1),(2) по пространственным переменным используется метод конечных разностей на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов (см. [3]): давление и дивергенция скорости определяются в центрах ячеек сетки, а компоненты вектора скорости – на границах ячеек. Применение разнесенной сетки позволяет связать значения скорости и давления в соседних узлах и избежать появления осцилляций в решении, которые возникают при использовании центральных разностей на совмещенной сетке. Также шахматное расположение узлов позволяет автоматически удовлетворить дискретному представлению уравнения неразрывности (2), которое явно не входит в схему (3)-(5).

Численная реализация схемы (3)-(5) состоит из 3-х этапов. Сначала по известным значениям скорости с предыдущего временного слоя находится промежуточное поле скорости. Для этого численно решается дискретная система (3) с применением схемы стабилизирующей поправки [4]. На втором этапе определяется новое поле давления. Для численного решения дискретной системы (4) используется метод бисопряженных градиентов [5]. И на последнем этапе восстанавливается окончательное поле вектора скорости по явным формулам (5), удовлетворяющее дискретному условию соленоидальности.

2.2 Турбулентное течение

Для учета турбулентного режима течения жидкости используется методика LES (см. [6], [7], [8]), в результате применения которой отфильтрованные уравнения движения и неразрывности принимают вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0, \quad (7)$$

где u_i , p – фильтрованные компоненты вектора скорости и давление, τ_{ij} – тензор остаточных напряжений. Для моделирования подсеточной турбулентности используется модель Смогаринского:

$$\begin{aligned} -\left(\tau_{ij}^r - \frac{2}{3}k^r \delta_{ij}\right) &= 2\nu_{SGS} \left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{ij}\right), \\ \nu_{SGS} &= l_S^2 |\bar{S}| = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|, \end{aligned} \quad (8)$$

где k^r – остаточная кинитическая энергия, ν_{sgs} – подсеточная вязкость, S – фильтрованный тензор скоростей деформаций, Δ – величина фильтра, C_s – константа Смогаринского.

3 Модель размыва

Известно несколько популярных подходов к расчету размыва грунта на дне. В [9] транспорт грунта рассчитывается для каждой ячейки вычислительной сетки исходя из влияния силы тяжести, трения и сдвиговой силы, вызванной движением среды. Другие авторы (см. [10], [11]) основывают вычисления на значениях сдвиговых напряжений на поверхности дна. Применяемая в настоящей работе модель размыва грунта основана на используемой в [10]. В рамках данной численной модели движение частиц происходит вследствие воздействия на них потока течения жидкости и образующихся неровностей дна (рис. 1).

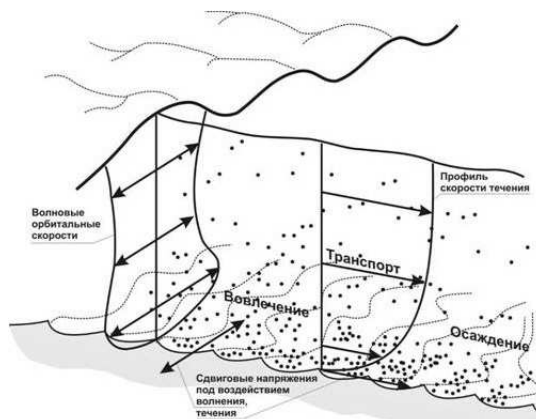


Рис. 1. Обобщенная схема транспорта наносов в прибрежной зоне (Soulsby R., Dynamics of marine sands, Thomas Telford Publications, London, 1997).

На каждом слое сначала вычисляются сдвиговые напряжения на дне, затем производится расчет движения частиц на поверхности дна и решается уравнение баланса масс.

На поверхности дна вводится двумерная система координат (x_1, x_2) . Для вычисления вектора напряжения τ_b находится произведение тензора напряжений и нормали к поверхности, затем полученный вектор проецируется на поверхность. Далее находится вектор транспорта донного материала в единицу времени и на единицу длины, i -я компонента которого находится по формуле

$$q_i = q_0 \frac{\tau_i}{\tau_b} - q_0 C \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (9)$$

Здесь первое слагаемое представляет составляющую транспорта, вызванную течением в водоеме, а второе слагаемое – перенос грунта, возникающий из-за неровностей дна. Множитель

$$q_0 = \begin{cases} 12\sqrt{g(s-1)d^3}\Theta(\Theta - \Theta_{cr}), & \Theta > \Theta_{cr}, \\ 0, & \Theta \leq \Theta_{cr} \end{cases} \quad (10)$$

является величиной транспорта по горизонтальному дну, равной нулю в случае, когда параметр Шильдса не превосходит критического значения Θ_{cr} . Для расчета изменений дна, возникающих вследствие переноса грунта, далее решается уравнение баланса масс

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1 - \epsilon} \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (11)$$

записанное относительно функции высоты дна h ; здесь ϵ - пористость донного материала.

4 Результаты расчетов

Для тестирования и апробации применяемых в работе математических моделей были проведены численные расчеты размыва дна в результате действия внутренних течений, а также совместного влияния внутренних течений и волнений на поверхности водоема. Кроме того были проведены полномасштабные численные эксперименты.

4.1 Размыв в результате внутренних течений

Приведем результаты расчетов в случае учета влияния на размыв грунта лишь внутренних течений. Первая серия расчетов связана с исследованием течений вблизи платформы «Приразломная» (рис. 2).

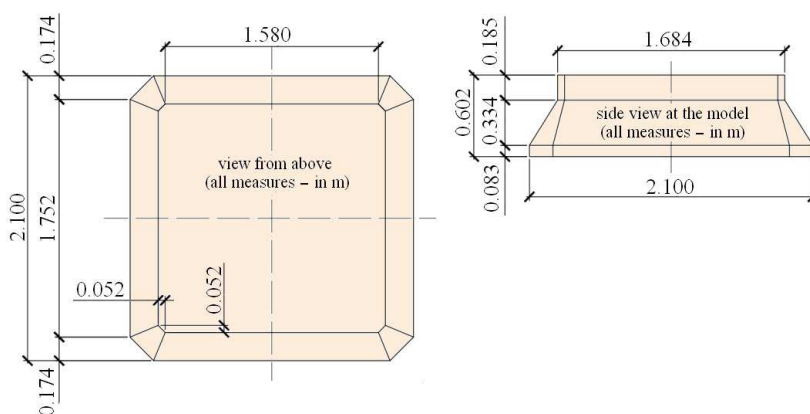


Рис. 2. Платформа "Приразломная".

На рис. 3, представлены мгновенные линии тока течения жидкости, а также контуры функции давления на поверхности дна. Расчет проводился в области, длина и ширина которой составляют 6.3м., а высота 0.3м. Для сравнения с лабораторным экспериментом был установлен перепад давления таким образом, чтобы средняя по глубине скорость оказалась

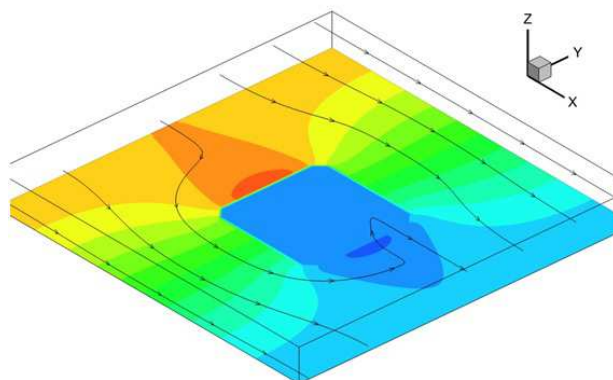


Рис. 3. Линии тока течения и контуры функции давления на поверхности дна.

равной 0.352 м/с. Расчет проводился в течение 540 тыс. слоев по времени, что соответствует 1.5 часам расчетного времени.

На рисунке 4 приведены результаты экспериментов, а также численных расчетов размыва грунта вблизи платформы

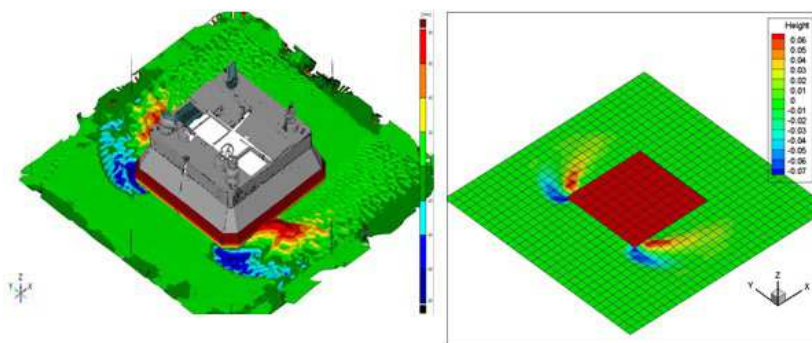


Рис. 4. Сопоставление численного и натурального эксперимента: картина размыва.

Для более детального сравнения было выбрано несколько точек на поверхности дна (рис. 5). Результаты сравнения приведены в таблице 1. В точках №1 и №2 была зафиксирована максимальная и минимальная глубина размыва.

Таблица 1. Сопоставление численного и натурального эксперимента: результаты сравнения

Данные	Эксперимент, мм.	Расчет, мм.
Точка 1: максимальная глубина размыва	-77.75	-75.84
Точка 2: максимальная высота наноса	74.64	71.81
Точка 3	31.39	33.09
Точка 4	-34.42	-31.19
Точка 5	10.21	11.17

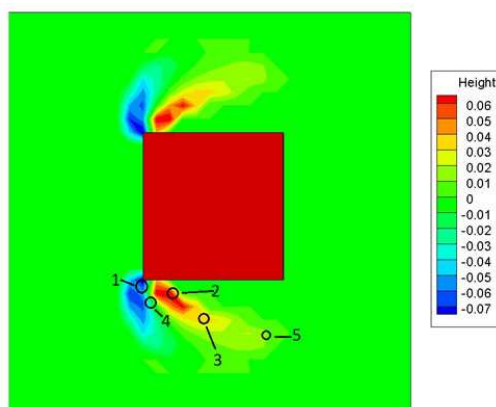


Рис. 5. Сопоставление численного и натурального эксперимента: выбор точек.

Отметим хорошее совпадение результатов численного и лабораторного эксперимента: точность составляет порядка 5%.

На рисунках ниже представлены результаты размыва дна при обтекании препятствий типа «Баржа» (рис. 6) при различном их расположении – вдоль потока либо поперек потока (течение во всех случаях направлено слева направо). Расчеты проводились в безразмерных величинах.

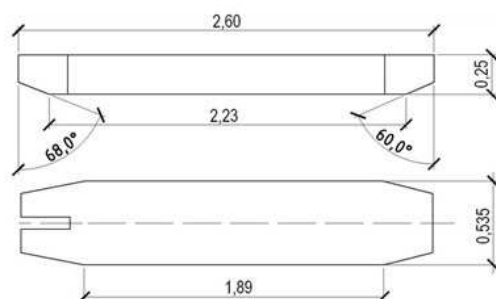


Рис. 6. Платформа типа "Баржа".

Для картины размыва, показанной на рисунке 7, перепад давления составляет 2. Для рисунка 8 перепад давления равен 10. На рисунке 9 платформа расположена поперек течения, перепад давления 1. В случае перепада давления 2 (рис. 7) основные области размыва расположены вблизи углов, а намыв – сразу за кормой. Размыв происходит именно в том месте, где течение, огибая «Баржу», имеет более высокую скорость течения и намыв возникает в том месте, где течение имеет минимальную скорость, т.е. сразу за кормой.

Если же увеличить перепад давления до 10 и тем самым увеличить скорость движения жидкости, то картина размыва существенно меняется (см. рис. 8). Вблизи препятствия возникает волнообразное течение, которое переносит грунт не только за область размыва, углов «Баржи», но и за корму. При этом, как глубина размыва, так и величина намыва больше чем в случае более медленного течения (перепад давления 2).

Аналогичная картина наблюдается и при расположении препятствия «Баржа» поперёк потока (см. рис. 9). Здесь также размыв происходит в тех областях, где скорость потока

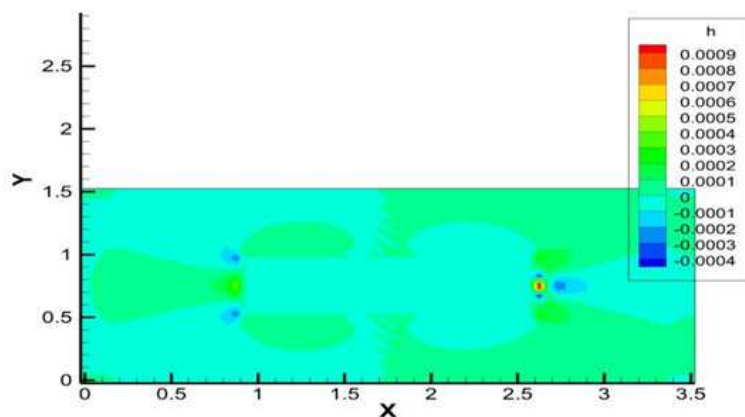


Рис. 7. Платформа типа «Баржа». Расположение вдоль потока. Перепад давления 2.

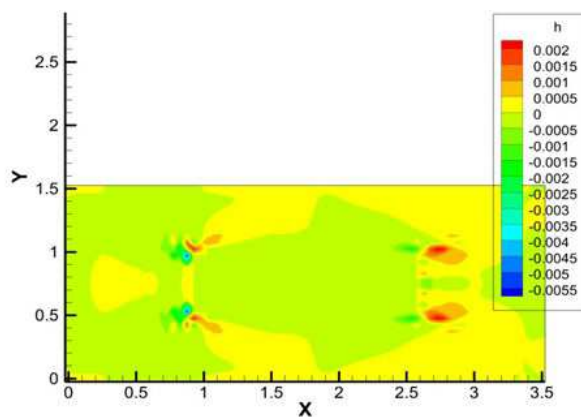


Рис. 8. Платформа типа «Баржа». Расположение вдоль потока. Перепад давления 10.

достаточно большая для переноса частиц грунта (на переднем фронте вблизи углов) и намыв – в тех областях, где скорость потока падает (в теневой части «Баржи»).

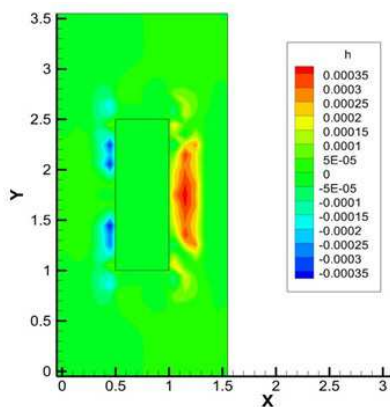


Рис. 9. Платформа типа «Баржа». Расположение поперек потока. Перепад давления 1.

4.2 Размыв в результате волнений на поверхности

Приведем результаты расчетов в случае учета совместного влияния на размыв грунта как внутренних течений, так и волнения на поверхности водоема. На рисунке ниже показано рассчитанное течение при наличии волн на поверхности. Расчет (рис. 10) проводился с параметрами, соответствующими лабораторному эксперименту: в прямоугольной области 6.3м.х6.3м., глубина воды на рабочем участке 0.33м. Был установлен перепад давления таким образом, чтобы средняя по глубине скорость оказалась равной 0.067 м/с. Высота волн составляла 0.095 м., а период 1.8 секунд. Расчет проводился в течение 540 тыс. слоев по времени, что соответствует 1.5 часам расчетного времени.

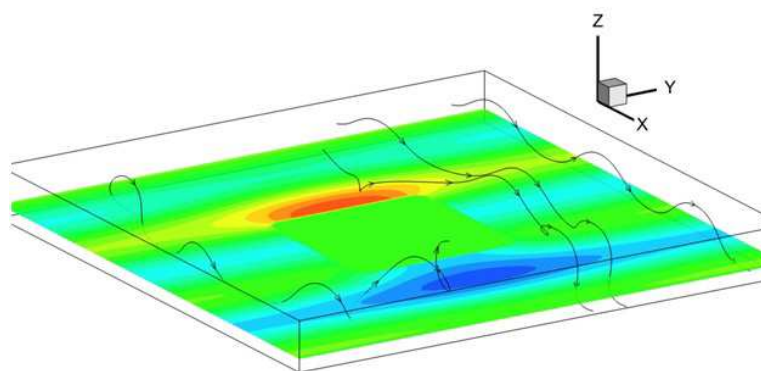


Рис. 10. Линии тока течения и контуры функции давления на поверхности дна.

На рисунке 11 представлены результаты лабораторного опыта, моделирующего течение с волнами, а также численного эксперимента, соответствующего данному опыту. По всему периметру основания платформы располагаются зоны наносов, а вблизи фронтальной части платформы по центру располагается зона размыва. Отметим хорошее качественное и количественное совпадение результатов.

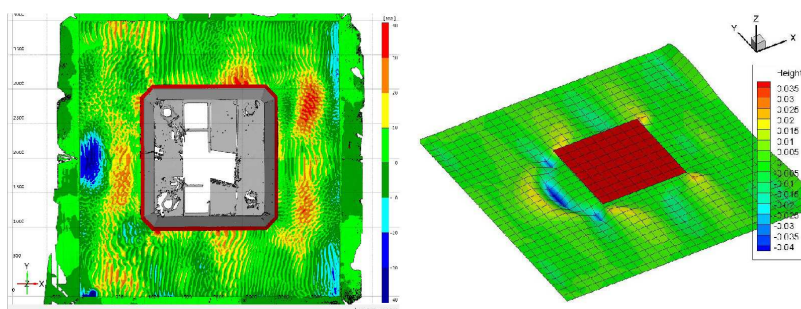


Рис. 11. Платформа "Приразломная". Высота волн 0.095 м., период 1.8 сек. Сопоставление результатов численного и натурального экспериментов.

Далее (рис. 12) представлены результаты лабораторного опыта с более высокими и частыми волнами, а также численного эксперимента, соответствующего данному опыту. Здесь высота волн составляла 0.11 м., а период 1.3 секунд.

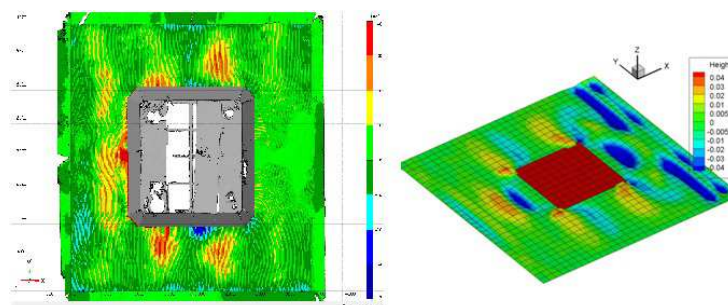


Рис. 12. Платформа "Приразломная". Высота волн 0.11 м., период 1.3 сек. Сопоставление результатов численного и натурального экспериментов.

4.3 Полноразмерная модель

Несмотря на очевидные трудности в проведении натурального эксперимента непосредственно с платформой «Приразломная», численный эксперимент позволяет проведение полноразмерного расчета. Был выполнен расчет, моделирующий реальную ситуацию: основание платформы – квадрат с обрезанными углами, сторона которого составляет 120 метров, а течение рассматривалось в квадратной области со стороной 320 метров. Был задан перепад давления, соответствующий средней скорости набегающего потока 10 м/с.

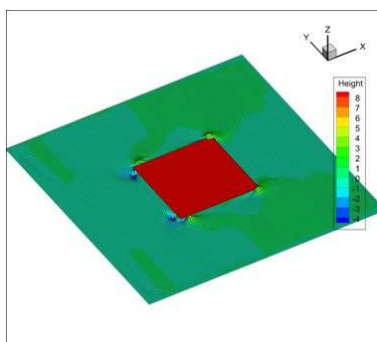


Рис. 13. Платформа "Приразломная". Полноразмерная модель.

Здесь также образуются зоны размыва вблизи углов передней стенки платформы, рядом с ними возникают наносы. Также наносы возникают при углах задней стенки платформы. Максимальная величина размыва составляет 1.4м.

5 Заключение

В работе рассмотрена задача размыва дна у основания платформы гравитационного типа, расположенной на мелководье. Приводятся используемые гидродинамическая модель и модель размыва дна, а также результаты численных экспериментов. Правильность получаемых в результате обтекания препятствия течений подтверждена многочисленными тестовыми расчетами. Характеристики размыва дна, полученные численно, сопоставлены с результатами лабораторных экспериментов. В случае влияния внутренних течений, можно отметить хорошее количественное совпадение результатов. В более сложном случае поверхностных волн получается хорошее качественное соответствие. Отметим, что максимальная

глубина размыва возрастает с увеличением скорости потока, при этом также изменяется и картина размыва. Волны также существенно меняют картину размыва: появляются наносы у боковых стенок, размывы и наносы вблизи центральной части передней стенки платформы.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 1.630.2014/к – «Моделирование течений с переменной плотностью и вязкостью при решении прикладных задач». По результатам работы был подготовлен и зарегистрирован программный комплекс [12].

Список литературы

1. Роч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Наука, 1980. –618 с.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Физматлит, 1994. –448 с.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. –152 с.
4. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. –197 с.
5. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем: учеб. пособие. – В 2-х томах. – М.: Издательство Московского университета, 2013. –197 с.
6. Germano M. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model / Germano M. and Piomelli U., Moin P., Cabot W.H. // *Physics of Fluids*. – 1991. – V 3 – № 7. – P. 1760-1765.
7. Germano M. Turbulence: the filtering approach // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1992. – V 238 – P. 325-336.
8. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений – М.: Физматлит, 2008. –365 с.
9. Roulund A. Numerical and experimental investigation of flow and scour around a circular pile / Roulund A., Sumer B. M, Fredsøe J., Michelsen J. // *J. Fluid Mech.* – 2005. – V 534 – P. 351-401.
10. Brørs B. Numerical modeling of flow and scour at pipelines // *J. Hydraul. Eng.* – 1999. – V 125 – P. 511-523.
11. Hartvig P.A. The reverse approach for monopile scour. Preprint. – Aalborg University.: 2011
12. Гейдаров Н.А., Захаров Ю.Н. Иванов К.С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для расчета размыва грунта при действии волн и течения для различных геологических условий» // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – № 2015612750; опубл. 26.02.2015.

Процесс затвердевания шликера оксида бериллия с учетом фазового перехода

Узак К. Жапбасбаев*, Гаухар И. Рамазанова*, Замира К. Саттинова**, Сергей А. Шахов***

* АО «Казахстанско-Британский технический университет», Алматы, Казахстан

** Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева, Астана, Казахстан

*** Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск, Россия

{uzak.zh, sattinova_zamira, sashakhov}@mail.ru, gaukhar.ri@gmail.com

Аннотация. Приводятся результаты экспериментов и расчетов процесса затвердевания термопластичного шликера оксида бериллия в кристаллизаторе установки горячего литья в зависимости от режимных параметров. Температурное поле устанавливает переход шликерной массы из состояния жидкого в твердопластичное. Термопластичный шликер представляет собой высококонцентрированную структурированную среду, где минеральная фаза – порошок оксида бериллия, жидкая фаза – органическая связка (парафин, олеиновая кислота и пчелиный воск). Теплота фазового перехода определяется методом кажущейся теплоемкости. Расчетные данные температуры шликера в зоне фазового перехода шликера находятся в согласии с результатами экспериментов.

Ключевые слова: термопластичный шликер, затвердевание, вязкопластичное состояние, твердопластичное состояние, теплота фазового перехода

1 Введение

Развитие новых областей науки и направлений техники выдвигает повышенные требования к уровню свойств и качеству керамических изделий. Все в большей степени становятся востребованными изделия сложной конфигурации из новых (высокотеплопроводных, бескислородных, сверхпроводящих и др.) неметаллических материалов [1-3]. Особую сложность представляет получение методом горячего литья керамических изделий из дисперсных материалов с аномальными физическими свойствами, таких как оксид бериллия BeO [4,5]. Трудности получения качественных изделий в данном случае вызваны в первую очередь теплофизическими свойствами BeO , в частности, его уникальной теплопроводностью [4,5]. Совершенно очевидно, что устранить имеющиеся технологические ограничения и проблемы невозможно без развития на базе всего накопленного опыта и знаний теоретических представлений о закономерностях и механизмах регулирования теплового режима литья на процесс формообразования отливки.

2 Опытные данные процесса затвердевания шликера оксида бериллия

Опытная фильера (рис. 1) по конструкции близка к производственным аналогам и предназначена для литья круглой трубки с наружным диаметром 20 мм, внутренним – 12 мм [4]. Дорн и кристаллизатор были изготовлены из стали марки X18H10T. Толщина стенки кристаллизатора составила 0,003 м. Общая высота цилиндрической части кольцевой полости была равна $H = 0,028$ м, высота горячей зоны полости – $h_1 = 0,008$ м, высота холодной зоны – $h_2 = 0,020$ м.

В верхний (горячий) контур кристаллизатора подавалась вода с температурой $T_w = 60-80$ °С, в нижний (холодный) контур – вода с температурой $T_w = 15-20$ °С. Максимальная пропускная способность контуров кристаллизатора по воде составила 1500 л/час.

Входная коническая часть фильеры соединяется с рабочим баком установки литья, где находится шликерная масса. Шликер оксида бериллия является высококонцентрированной средой, где минеральной фазой является порошок оксида бериллия, а жидкой фазой – органическая связка (парафин, олеиновая кислота и пчелиный воск). Шликер с начальной температурой $t_0 = 80\text{ }^\circ\text{C}$ вытекает из рабочего бака во входную коническую часть фильеры, и по мере движения в кольцевой полости кристаллизатора охлаждается и затвердевает.

Процесс затвердевания изучался посредством замера температуры шликера с помощью термопар, установленных на различных уровнях по высоте кристаллизатора (рис. 1). На основе полученных данных строились зависимости положения границы затвердевания шликера от различных параметров литья. Форма кривой поверхности затвердевания, в зависимости от параметров литья, определялась с учетом допущения о том, что температура по высоте и радиусу кристаллизатора на коротких участках изменяется линейно.

В экспериментах было определено влияние скорости литья на тепловой режим регулирования отливки. В таблице 1 приведены данные по расходу и температуре воды в контурах охлаждения. В опытах скорость литья изменялась от 20 до 100 мм/мин. На рисунке 2 показаны положения зоны отвердевания шликера в зависимости от скорости литья. Изотерма «солидуса» АВ соответствует температуре $54\text{ }^\circ\text{C}$, а изотерма «солидуса» CD – температуре $40\text{ }^\circ\text{C}$ (рис. 2).

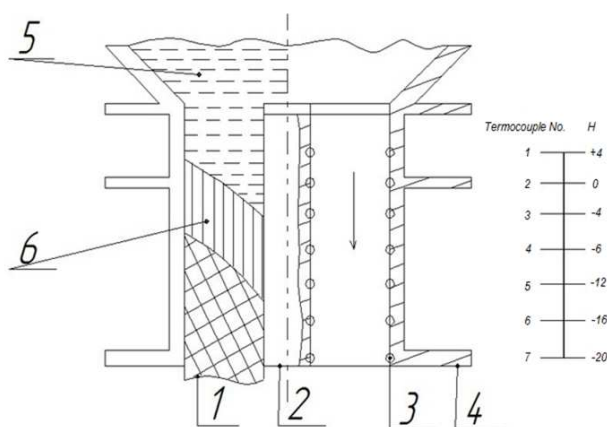


Рис. 1. Схема процесса отвердевания отливки и установки термопар в фильере: 1 – шликер в твердопластичном состоянии, 2 – дорн, 3 – термопара, 4 – кристаллизатор, 5 – жидкий шликер, 6 – зона затвердевания.

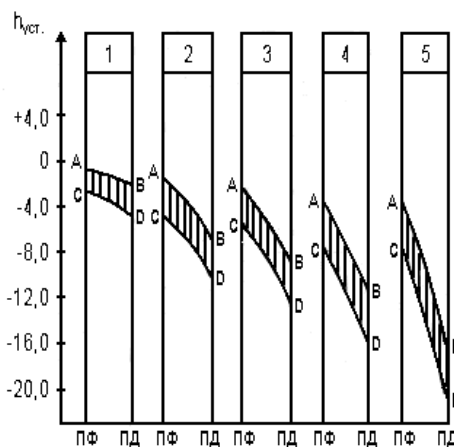


Рис. 2. Положение зоны отвердевания в зависимости от скорости литья: АВ – изотерма «солидуса» ($54\text{ }^\circ\text{C}$), CD – изотерма «солидуса» ($40\text{ }^\circ\text{C}$), ПФ – поверхность фильеры, ПД – поверхность дорна.

Таблица 1. Режимы опытов в зависимости от скорости литья

№ диаграммы		1	2	3	4	5
Режим литья	Расход горячей воды, л/час	500	500	500	500	500
	Расход холодной воды, л/час	1500	1500	1500	1500	1500
	Скорость литья, мм/мин	20	40	60	80	100
	Температура горячей воды, $^\circ\text{C}$	80	80	80	80	80
	Температура холодной воды, $^\circ\text{C}$	20	20	20	20	20

Как видно из рисунка 2, увеличение скорости литья приводит к расширению зоны затвердения и ее перемещению в область теплосъема холодного контура. Это объясняется тем, что с ростом скорости литья теплосъем на стенках кольцевой полости не успевает охладить шликер, и зона затвердевания вытягивается и смещается вниз по направлению скорости литья.

Таким образом, опытные данные показывают, что процесс отвердевания происходит в зоне перехода, где температура шликера оксида бериллия изменяется от 54 до 40 °С.

3 Математическая модель процесса затвердевания шликера оксида бериллия

Как было показано в опытах, затвердевание шликера оксида бериллия происходит в интервале температур от 54 до 40 °С. Это связано с тем, что находящаяся в аморфном состоянии шликерная связка в зоне затвердевания переходит из жидкого аморфного состояния в твердое аморфное [4-7]. Общее количество тепла, выделяющееся в процессе затвердевания единицы массы шликера, определяется изменением энтальпии ΔH в переходной зоне. В этой зоне изменяется теплоемкость шликера, и увеличение энтальпии при фазовом переходе может быть определена методом кажущейся теплоемкости [8-13].

В этом методе скрытая теплота учитывается за счет увеличения теплоемкости в интервале температур изменения фазы шликера [8-10]:

$$c_p = \begin{cases} c_s, & t < t_s \text{ -- в твердой фазе;} \\ c_{in}, & t_s \leq t \leq t_l \text{ -- в переходной зоне;} \\ c_l, & t > t_l \text{ -- в жидкой фазе.} \end{cases} \quad (1)$$

где $c_{in} = \left(\int_{t_s}^{t_l} c(t) dt + H_{1 \rightarrow 2} \right) / (t_l - t_s)$, $H_{1 \rightarrow 2}$ – удельная энтальпия фазового перехода шликера оксида бериллия находится по опытным данным, и равна $H_{1 \rightarrow 2} = 7800$ Дж/кг [14].

В работах [11,12] считая, что в зоне перехода температура изменяется линейным образом, выражение теплоемкости определяется в виде:

$$c_p = c(t) + H_{1 \rightarrow 2} \frac{\partial f_{sl}}{\partial t} \quad (2)$$

где функция фазового перехода f_{sl} линейно зависит от температуры:

$$f_{sl} = \begin{cases} 0, & t < t_s \text{ -- в твердой фазе;} \\ \frac{t-t_s}{t_l-t_s}, & t_s \leq t \leq t_l \text{ -- в переходной зоне;} \\ 1, & t > t_l \text{ -- в жидкой фазе.} \end{cases} \quad (3)$$

В платформе COMSOL Multiphysics [13] для учета теплоты фазового перехода вводится функция $\alpha(\bar{t})$ в зоне перехода, и изменение теплоемкости шликера выражается в виде:

$$c_p = c_s \cdot (1 - \alpha(\bar{t})) + c_l \cdot \alpha(\bar{t}) + H_{1 \rightarrow 2} \frac{d\alpha}{dt} \quad (4)$$

где c_s – теплоемкость шликера в твердом состоянии, c_l – теплоемкость шликера в жидком состоянии, $\alpha(\bar{t})=0$ для шликера в твердом состоянии и $\alpha(\bar{t})=1$ для шликера в жидком состоянии, \bar{t} – безразмерная температура шликера.

По опытным данным шликера оксида бериллия с массовой долей связки $\omega=0,117$ функция $\alpha(\bar{t})$ имеет вид $\alpha(\bar{t}) = 5.714 \cdot \bar{t} - 2.857$.

Указанные варианты метода кажущейся теплоемкости (1)–(4) позволяют учитывать теплоту фазового перехода в математической модели, и удобны для проведения расчетов, так как положение зоны перехода заранее неизвестно и определяется в результате расчетов.

Реологические свойства шликера оксида бериллия с массовой долей связки $\omega = 0,117$ зависят от температуры, и выражаются эмпирическими формулами [4, 15]:

$$\mu(t) = 293,6259 \cdot \exp(-0,05816 \cdot t), \quad \text{Па} \cdot \text{с} \quad (5)$$

$$\tau_0(t) = 11,4 + 11,41 \cdot \exp(-(t - 70,05)/5,47), \quad \text{Па} \quad (6)$$

Плотность термопластичного шликера определяется концентрациями порошка оксида бериллия и связующего вещества:

$$\rho = \rho_{mb} \cdot \rho_{cb} / ((1 - \omega)\rho_{cb} + \omega \cdot \rho_{mb}), \quad \text{г/см}^3 \quad (7)$$

где ρ_{mb} – плотность оксида бериллия, ρ_{cb} – плотность связки, ω – относительное массовое содержание связки в долях единицы.

Плотность связки при $\omega = 0,117$ определяется по формуле:

$$\rho_{cb}(t) = 0,852 + 0,0725 \cdot \cos(0,05612 \cdot (t + 273,15) - 16,7361), \quad \text{г/см}^3 \quad (8)$$

Плотность оксида бериллия составляет $\rho_{mb} = 3,02 \text{ г/см}^3$. В диапазоне температур $80 \div 40 \text{ }^\circ\text{C}$ плотность связки изменяется от $0,7797$ до $0,9010 \text{ г/см}^3$, и по мере отвердевания плотность шликера возрастает от $2,2457$ до $2,3553 \text{ г/см}^3$ для данного содержания связки.

Теплопроводность шликера зависит от температуры, и для $\omega=0,117$ имеет вид [14]:

$$\lambda = 1,6 + 4,8 \cdot \exp(-0,017 \cdot t), \quad \text{Вт/(м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)} \quad (9)$$

Задача исследуется в цилиндрической системе координат с осями z и r . Ось Z направлена по оси фильеры (рис. 1), а ось OR – радиально к ней (r_1 – радиус дорна, r_2 – радиус фильеры, $(r_2 - r_1)$ – толщина кольцевой полости). Скорость литья направлена вертикально вниз по оси OZ . Движение шликера считается установившимся, и для его изучения используются уравнения движения неньютоновской жидкости с привлечением модели Шведова-Бингама [15]:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_0) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

В отличие от уравнения движения (10) по мере отвердевания шликера перенос тепла за счет теплопроводности будет существенным. Поэтому уравнение энергии для стационарного процесса формования с использованием выражения для теплоемкости (3) записывается в виде [12, 13]:

$$\rho u c_p \frac{\partial t}{\partial z} + \rho v c_p \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (12)$$

В уравнениях (10)–(12) приняты следующие обозначения: z , r – осевая и радиальная координаты; u , v – компоненты вектора скорости; p , ρ , t , τ_0 , c_p , μ , λ – давление, плотность, температура, касательное напряжение сдвига, коэффициенты кажущейся теплоемкости, вязкости и теплопроводности шликера, соответственно.

Для удобства сравнения с опытными данными температура в уравнении (12) рассчитывается по шкале Цельсия.

Условие сохранения массового расхода определяет градиент давления для выдавливания шликера из кольцевой полости [16]:

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho u r dr = \pi(r_2^2 - r_1^2) \rho_0 u_0 \quad (13)$$

где r_1 , r_2 – радиусы дорна и фильеры, соответственно.

Распределения скорости и температуры на входе в кольцевую полость принимаются постоянными по сечению, соответственно, будут постоянными все теплофизические свойства шликера:

$$\text{при } z = 0: \quad u = u_0, \quad v = 0, \quad t = t_0 \quad (14)$$

На стенках полости в области жидкого шликера для скорости ставится условие прилипания:

$$\text{при } z > 0, \quad r = r_i: \quad u_i = v_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

а в области твердопластичного состояния шликера – условия непротекания и скольжения:

$$\text{при } z > 0, \quad r = r_i: \quad v_i = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

Считается, что поток тепла от горячего шликера передается к стенкам дорна и фильеры. Тогда на стенке дорна ставится условие теплообмена [17]:

$$\text{при } z > 0, \quad r = r_1, \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_d (t_c - t_d) \quad (17)$$

где α_d – коэффициент теплообмена между шликером и стенкой дорна, t_c – средняя температура шликера на поперечном сечении полости, t_d – температура шликера на стенке дорна.

Теплопередача на внешней стенке происходит в зависимости от температуры воды в контурах охлаждения полости. Обозначая температуру воды в горячем и холодном контурах через t_1 и t_2 , получим граничные условия для температуры на стенке фильеры:

$$\text{при } z > 0, \quad r = r_2, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = k (t - t_i), \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

где k – коэффициент теплопередачи на стенке фильеры.

На выходном сечении полости для температуры накладывается условие:

$$\text{при } z = l, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

Для удобства решения система уравнений (10)–(13) и граничные условия (14)–(19) приводятся к безразмерным переменным. Координаты z и r делятся на r_1 , компоненты скорости u и v на u_0 , давление p на динамический напор $\rho_0 u_0^2$, температура t на t_0 , плотность, предел текучести, коэффициенты теплоемкости, вязкости, теплопроводности на значения этих величин при температуре t_0 . В безразмерных переменных систему уравнений входят критерии Рейнольдса Re и Прандтля Pr .

Система уравнений (10)–(13) с граничными условиями (14)–(19) решается численным методом [16]. Рассматриваемая область разбивается на элементарные ячейки со сторонами Δz_i , Δr_j . Разностные аналоги уравнений движения (10) и энергии (12) получены по схеме Кранка-Никольсона, а разностный аналог уравнения (11) – двухслойной схемой второго порядка точности [16]. Градиент давления определяется методом расщепления [16] из условия сохранения массового расхода (13).

4 Определение коэффициента теплопередачи на стенках полости

Определение коэффициентов теплообмена и теплопередачи на стенках полости представляет значительные трудности. Коэффициенты теплообмена α_d на стенке дорна и теплопередачи k на стенке фильеры были определены путем сравнения опытных и расчетных данных (рис. 3). Обобщение опытных и расчетных данных дает возможность определить зависимость коэффициентов теплопередачи и теплообмена от скорости литья.

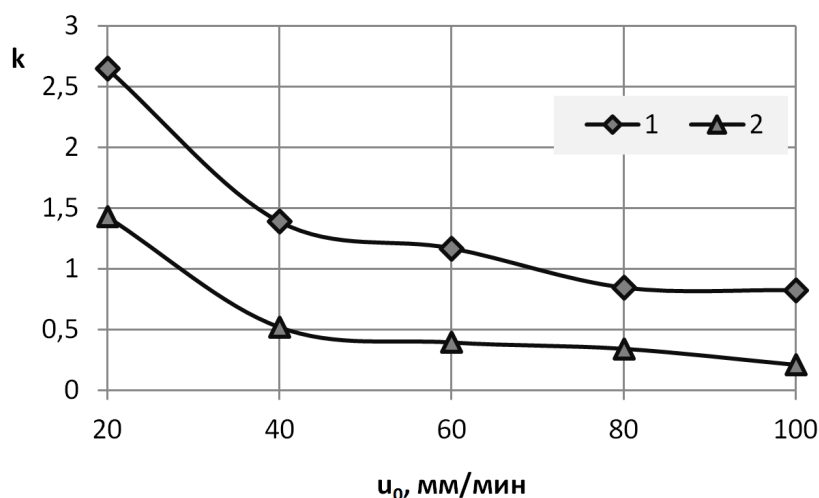


Рис. 3. Зависимость коэффициентов теплопередачи на стенке фильеры (1) и теплообмена на стенке дорна (2) от скорости литья шликера

Коэффициент теплопередачи на стенке фильеры k при малых скоростях литья имеет большие значения, а с ростом скорости литья снижается и стремится к предельному значению. Коэффициент теплообмена на стенке дорна α_d имеет несколько меньшее значение по сравнению с теплопередачей на стенке фильеры, и также снижается с ростом скорости литья (рис. 3).

5 Результаты расчетов и сравнение с данными экспериментов

Расчеты проводились при тех же режимных параметрах и условиях проведения вышесказанных экспериментов. На рисунке 4 представлены расчетные данные по распределению температуры в кольцевой полости в соответствии с условиями первой серии экспериментов (табл. 1). Как отмечалось выше, в первой серии экспериментов было исследовано влияние скорости литья на положение зоны фазового перехода. Диаграммы представлены в том же порядке, как данные экспериментов на рисунке 2.

На входе в цилиндрическую часть кольцевой полости температура шликера была постоянной и равнялась $t_0 = 80$ °С. В области горячего контура изолинии температуры (изотермы) показывали области постоянных значений температуры и параметров шликерной массы, находящейся в жидком состоянии. В этой части полости температуры шликера и горячей воды одинаковые, и на стенке фильеры теплопереноса практически не происходит.

В области холодного контура начинается охлаждение шликерной массы. Во втором контуре охлаждения разность температур шликерной массы и холодной воды приводит к ин-

тенсивной теплопередаче, снижению температуры и изменению реологических свойств шликерной массы. В начале второго контура имеется переходная область, где поле температуры переменное и ее значение изменяется от 80 до 54 °С.

Изотерма АВ с температурой 54 °С выражает верхнюю границу зоны затвердевания шликерной массы, а изотерма CD 40 °С – нижнюю границу. В зоне затвердевания между изотермами 54 и 40 °С шликер переходит из жидкого состояния в твердопластичное. На всех рисунках расчетные изолинии сопоставлены с экспериментальными данными изотерм «солидусов» АВ и CD (пунктирные линии). Можно отметить согласие расчетных и опытных данных положений изотерм АВ и CD.

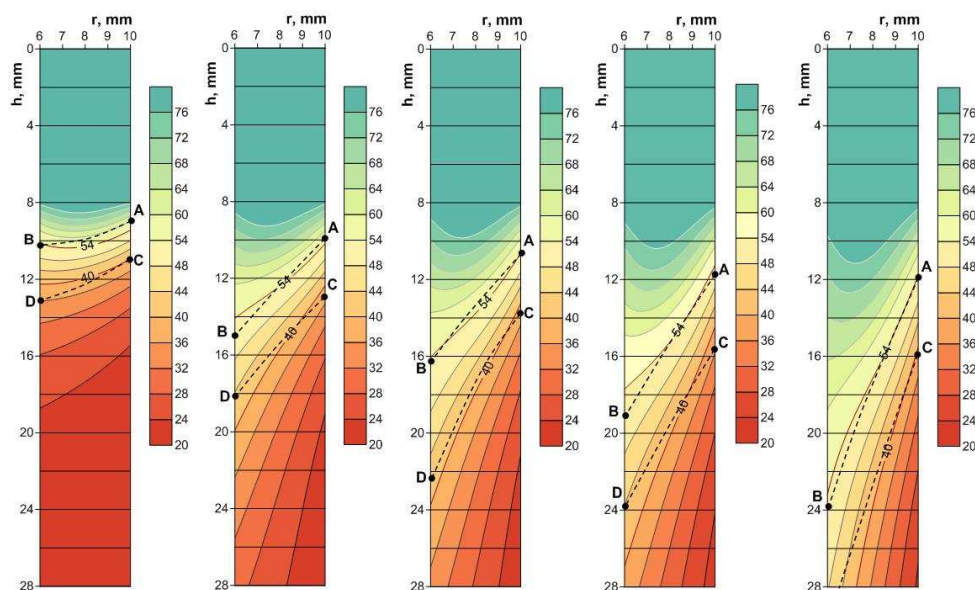


Рис. 4. Сравнение расчетных и опытных данных распределения температуры в зависимости от скорости литья шликера

При скорости литья $u_0 = 20$ мм/мин положение зоны перехода шликера из жидкого состояния в твердопластичное расположено ближе к началу холодного контура. С ростом скорости литья от 40 до 100 мм/мин положение зоны перехода начинает перемещаться вниз по направлению движения отливки и занимает более обширные области. Это объясняется тем, что с увеличением скорости литья конвективное составляющее потока тепла шликерной массы также повышается. Положение зоны перехода постепенно растягивается, и охватывает всю длину формовочной полости (рис. 4).

Расчетные данные распределения температуры шликерной массы, полученные по условиям второй серии экспериментов (табл. 2) представлены на рисунке 5.

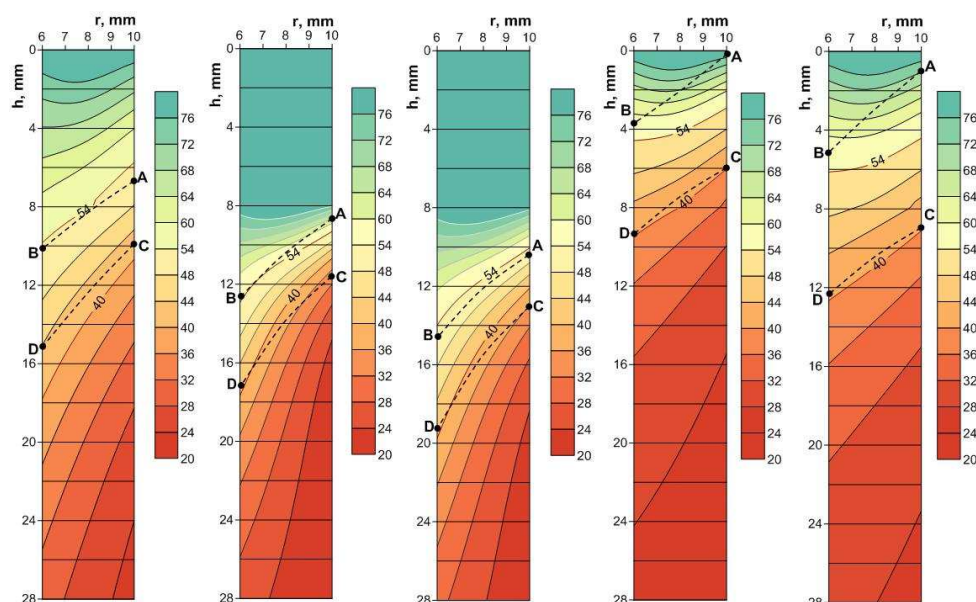
В этой серии расчетов скорость литья во всех экспериментах поддерживалась при 20 мм/мин, и проводилось изучение влияние расхода и температуры горячей воды в контуре охлаждения на положение зоны отвердевания отливки.

Опытные данные второй серии показывали, что при температуре горячей воды 60 °С и малых расходах (125 л/час) верхний (горячий) контур работает как зона охлаждения. Начало изотермы АВ первого режима, изотерм АВ и CD четвертого и пятого режимов находятся в зоне горячего контура. В этих случаях теплосъем от холодного контура был более интенсивным, это повлияло на охлаждение шликерной массы в зоне горячего контура.

Таблица 2. Режимы опытов в зависимости от расхода и температуры горячей воды

№ диаграммы		1	2	3	4	5
Режим литья	Расход горячей воды, л/час	125	250	500	500	500
	Расход холодной воды, л/час	1500	1500	1500	1500	100
	Скорость литья, мм/мин	20	20	20	20	20
	Температура горячей воды, °C	80	80	80	60	60
	Температура холодной воды, °C	20	20	20	20	20

С ростом расхода горячей воды от 250 до 500 л/час теплопереноса от холодного контура к горячему не происходит, по этой причине охлаждение и затвердевание шликерной массы имеет место в зоне холодного контура (рис. 5).

**Рис. 5.** Сравнение расчетных и опытных данных распределения температуры в зависимости от расхода и температуры горячей воды

Как было указано выше, коэффициенты теплообмена и теплопередачи на стенках полости были определены в зависимости от скорости литья (рис. 3). Расчетные данные зоны перехода, определяемые изотермами АВ (54 °C) и CD (40 °C), находятся в согласии с результатами экспериментов для первых трех режимов. В четвертом и пятом режимах расчетные данные качественно согласуются с опытными данными (рис. 5). Расчетные данные, также как и результаты экспериментов, показывают возможность управления процессом формирования термопластичного шликера оксида бериллия путем подбора расхода и температуры горячей воды.

В третьей серии экспериментов было исследовано влияние температуры и расхода холодной воды на тепловой режим затвердевания отливки. В таблице 3 приведены режимные параметры данной серии: расход и температура горячей и холодной воды, скорость литья отливки. Во всех опытах третьей серии скорость литья была 20 мм/мин. Расход и температура горячей воды тоже не изменялись: 500 л/час и 80 °C. Расход холодной воды варьировался от 250 до 1500 л/час, а температура – от 15 до 20 °C.

Таблица 3. Режимы опытов в зависимости от расхода и температуры холодной воды

№ диаграммы		1	2	3	4	5
Режим литья	Расход горячей воды, л/час	500	500	500	500	500
	Расход холодной воды, л/час	1000	500	250	1500	250
	Скорость литья, мм/мин	20	20	20	20	20
	Температура горячей воды, °C	80	80	80	80	80
	Температура холодной воды, °C	15	15	15	20	20

На рисунке 6 показаны расчетные данные распределения температуры и положения зоны перехода отливки, ограниченные изотермами «солидусов» АВ и CD.

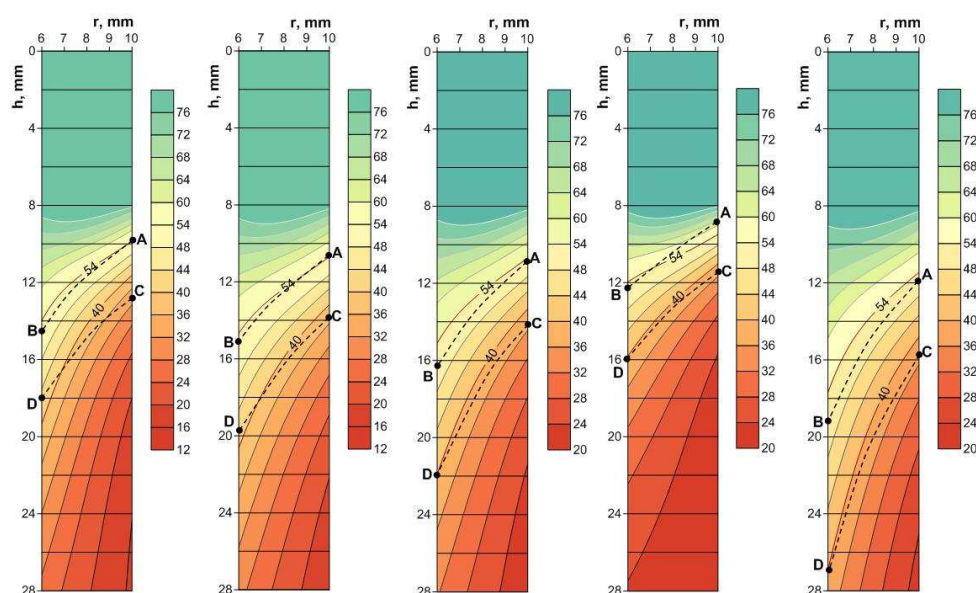


Рис. 6. Сравнение расчетных и опытных данных распределения температуры в зависимости от расхода и температуры холодной воды (табл. 3)

В первых трех случаях температура холодной воды была равна 15 °C, а ее расход изменялся от 1000 до 250 л/час. Снижение температуры холодной воды привело к повышению интенсивности теплосъема, а снижение расхода холодной воды, наоборот, замедлил процесс теплосъема. Повышение температуры холодной воды до 20 °C, также как и снижение ее расхода привело к уменьшению теплосъема.

Расчетные изолинии температуры, полученные путем использования коэффициентов теплообмена на поверхности дна и теплопередачи на фильере, согласуются с результатами экспериментов (рис. 6).

Таким образом, расчеты по вышеприведенной математической модели позволяют определить коэффициенты теплообмена и теплопередачи на стенках кольцевой полости, провести обобщение опытных данных, и найти режимные параметры для регулирования теплообмена при формовании шликерной массы методом горячего литья.

6 Заключение

В ходе трех серий экспериментов по исследованию влияния режимов литья на температурное поле в зоне затвердевания отливки были определены:

- положения зоны затвердевания шликерной массы в формообразующей полости при изменении скорости литья от 20 до 100 мм/мин.
- положения зоны затвердевания шликерной массы в формообразующей полости в зависимости от расхода и температуры воды в горячем контуре.
- положения зоны затвердевания шликерной массы в формообразующей полости в зависимости от расхода и температуры воды в холодном контуре.

Верхняя граница зоны затвердевания была оценена изотермой «солидуса» (54 °C), а нижняя граница – изотермой «солидуса» (40 °C).

Установленные в ходе экспериментов распределения температуры шликера в формообразующей полости фильеры в зависимости от скорости литья, условий теплосъема на стенках кольцевой полости позволяют определить переход шликера от вязкопластичного состояния в твердопластичное.

Результаты экспериментов были проанализированы и обобщены с использованием математической модели процесса затвердевания термопластичного шликера. Система уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии неньютоновской жидкости рассматривается совместно с реологической моделью Шведова-Бингама. Реологические и теплофизические свойства шликера были найдены на основе опытных данных, и выражают зависимости от температуры. Коэффициенты теплообмена и теплопередачи на стенках кольцевой полости были определены в оптимизационных расчетах, проведенных в соответствии с условиями экспериментов. В расчетах получены поля температуры шликерной массы в вязкопластичном (жидком) и твердопластичном состояниях, определены положения изотерм, выражающие верхнюю и нижнюю границы зоны затвердевания. Полученные в расчетах коэффициенты теплообмена и теплопередачи позволили определить условия теплообмена между шликером оксида бериллия и охлаждающей водой, найти режимные параметры для регулирования теплообмена отливки в формовочной полости.

Результаты расчетов находятся в согласии с данными экспериментов, и показывают физическую обоснованность предложенной математической модели процесса затвердевания термопластичного шликера оксида бериллия.

Список литературы

1. Грибовский, П.О.: Горячее литье керамических изделий. – Москва, 1961.
2. Добровольский, А.Г.: Шликерное литье. Металлургия. – Москва, 1977.
3. German, R.M., Bose, A.: Injection molding of metals and ceramics. Princeton, New Jersey, USA (1997).
4. Шахов, С.А., Бицоев, Г.Д.: Применение ультразвука при производстве высокотеплопроводных керамических изделий. – Усть-Каменогорск, 1999.
5. Akishin, G.P., Turnaev, S.K., Vaispapor, V.Ya. et al.: Thermal conductivity of beryllium oxide ceramic. *Refractories and Industrial Ceramics*. 50, 465-468 (2009)
6. Shakhov, S.A.: Controlling the deformation behavior of thermoplastic slips with ultrasound. *Glass and Ceramics*. 64, 354-356 (2007)
7. Шахов, С.А., Гагарин, А.Е.: Реологические характеристики термопластичных дисперсных систем, обработанных ультразвуком. *Стекло и керамика*. 4, 19-21 (2008)
8. Voller, V.R., Prakash, C.: A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 30, 1709-1719 (1987)
9. Voller, V.R., Swaminathan, C.R., Thomas, B.G.: Fixed grid techniques for phase change problems: a review. *Intern. Journal of Numer. Meth. in Engin.* 30, 875-898 (1990)

10. Hu, H., Argyropoulos, S.A.: Mathematical modeling of solidification and melting: a review. *Model. and Simul. in Material Science and Engineering*. 4, 371–396 (1996)
11. Moraga, N. O., Andrade, M. A., Vasco, D.A.: Unsteady conjugated mixed convection phase change of power law non Newtonian fluid in a square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 53, 3308–3318 (2010)
12. Carbona, M., Cortes, C. Numerical simulation of a secondary aluminum melting furnace heated by a plasma torch. *Journal of Mater. Proces. Technology*. 214, 334–346 (2014)
13. *COMSOL. Inc. URL: <http://www.comsol.com/> [accessed: August/12/2014]*
14. Двинских, Ю.В., Попильский, Р.Я., Костин, Л.И., Кулагин, В.В.: Теплофизические свойства термопластичных литейных шликеров некоторых высокоогнеупорных окислов, Огнеупоры. 12, 37–40 (1979)
15. Zhabbasbayev, U.K., Ramazanova, G.I., Sattinova, Z.K., Shabdirova, A.D.: Modeling of the beryllia ceramics formation process. *Journal of the European Ceramic Society*. 33, 1403–1411 (2013)
16. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.2 – Москва: Мир, 1990.
17. Себеси, Т., Брэдшоу, П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. – Москва: Мир, 1987

Задача фильтрации жидкости к разноориентированной горизонтальной скважине в деформируемой трансверсально-изотропной среде

Н.Т. Ажиханов, Н.М. Жунисов

Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
nurlan.azhikhanov@iktu.kz, nurseit85@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача определения напряженного деформируемого состояния разноориентированного ствола горизонтальной скважины при фильтрации к ней жидкости в анизотропном, в частности трансверсально-изотропном пласте. При определении дебита горизонтальной скважины учитываются фильтрационные и упругие характеристики анизотропного пласта.

Ключевые слова: Фильтрация, скважина, деформация, метод конечных элементов, горизонтальная скважина.

1 Введение

В настоящее время разработка нефтяных месторождений со сложным геологическим строением и физико-механическими свойствами флюидов, насыщенных в продуктивных коллекторах, осуществляется с применением активных методов внутриконтурного воздействия, такими как блокового, очагового, площадного, ступенчатого и фигурного заводнений. С помощью указанных методов успешно ведется отбор запасов нефти, но, тем не менее, со временем выявляются отдельные участки с трудноизвлекаемыми запасами [1-7].

Изучение явления деформации коллекторов в процессе разработки нефтяных месторождений имеет важнейшее практическое значение. В этом направлении параллельно с теоретическими исследованиями ведется изучение с помощью физического моделирования. Однако эти подходы не могут адекватно охарактеризовать реальные процессы, имеющие место в пластовых условиях.

Основной задачей горизонтальной скважины является увеличение поверхности контакта с пластом с учетом напряженно-деформируемого состояния, таким образом, повышения ее производительности. В большинстве случаев стволы горизонтальной скважины бурятся параллельно плоскости напластования коллектора. Аналогичная задача в трехмерной постановке для упруго-деформируемого изотропного пласта рассмотрена в работах [8-11].

В целом, несмотря на успехи, достигнутые в механике насыщенных трещиноватых пористых сред, поиск новых подходов здесь остается актуальным. В работе, рассматриваются математические модели фильтрации жидкости к скважине в деформируемой и недеформируемой анизотропных пластах. Изучения явления деформации коллекторов имеет важнейшие практические значения, ибо могут иметь ухудшение продуктивных характеристик коллекторов. Поэтому необходимо рассмотреть математические модели фильтрации жидкости к многоствольной горизонтальной скважине (МГС) в анизотропных деформируемых средах.

2 Постановка задачи

В случае эксплуатации продуктивного пласта через многоствольную горизонтальную скважину (ГС), дебиты стволов, которых $\{Q_i(t_j)\}_{i=1}^m$ и забойные давления $\{p_i(t_j)\}_{i=1}^m$ в момент

времени t_j предполагается известным (рис.1). При этом система уравнений фильтрации жидкости в деформируемой среде имеет вид

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - W_3, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + (n' \rho_f + (1 - n') \rho_s) F_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 d_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

$$W_3 = \begin{cases} \frac{Q_k(t)}{\pi r_c^2} \left(1 - \frac{r_k^2}{r_c^2} \right), & r_k \leq r_c, |y| \leq l_y, k = \overline{1, m}, \\ 0, & r_k > r_c. \end{cases}$$

Здесь $p = p(x, y, z, t)$ - давление жидкости; u_i - компоненты перемещения $\{u, v, w\}$; k_{ij} - коэффициенты проницаемости; μ - вязкость жидкости; σ_{ij} - компоненты напряжения $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$; ε_{ij} - компоненты деформации $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$; d_{ijkl} - элементы матрицы коэффициентов деформации; n' - пористость; ρ_f, ρ_s - плотности жидкости и скелета (твёрдой фазы); F_i - компоненты вектора плотности массовых сил;

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2};$$

Здесь r_c - радиус скважины; $2l_y$ - длина стволов ГС; $Q_k(t)$ - дебит k -й скважины; m - количество скважин;

Начальные и граничные условия

$$u_i(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (5)$$

$$(\sigma_{ij} n_j - p n_i)|_{\Gamma_1} = f_i(t), \quad u_i|_{\Gamma_2} = 0, \quad (6)$$

$$p|_{\Gamma_3} = p_\Gamma(t), \quad \frac{\partial p}{\partial n_i} \Big|_{\Gamma_4} = 0 \quad (7)$$

$$p|_{\Gamma_{S_k}} = p_k(t), \quad k = \overline{1, m} \quad (8)$$

где f_i - компоненты вектора поверхностной плотности внешних сил, \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, т.е. граница состоит из двух независимых разбиений.

Особенности распределения напряжений в деформируемом анизотропном мелкослоистом с жестко сцепленными наклонными к горизонтальной плоскости под произвольным углом пласте вблизи горизонтальной скважины исследованы на основе механического его моделирования трансверсально-изотропным (транстропным) телом с плоскостью изотропии, совпадающей с плоскостью напластования слоев [12-17].

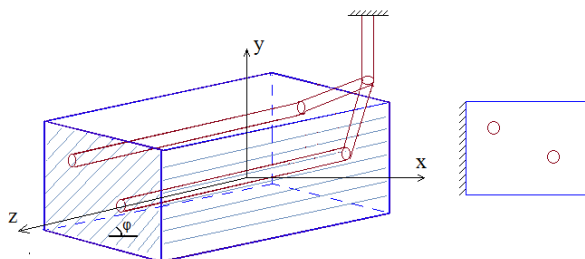


Рис. 1. Схема разноориентированной ГС в наклонной трансстропной среде. а) расчетная область; б) единичная длина ствола ГС.

3 Численная реализация

Для численной реализации применяется метод конечных элементов. Не останавливаясь детально на теоретических особенностях исследования МКЭ, укажем коротко некоторые его отличительные свойства.

В соответствии с МКЭ расчетная область разбивается на некоторое количество подобластей – конечных элементов [18-20]. Далее каждый конечный элемент оснащается системой базисных функций (функцией формы). Приближенное решение исходной задачи ищется в виде линейной комбинации таких базисных функций из условий, формально совпадающих с уравнениями метода Галеркина или Рунге.

Использование функцией формы, полученной точным решением рассматриваемой системы уравнений, является главным отличием МКЭ от других численных методов с точки зрения его программной реализации и применения. Приближенное решение ищется как линейная оболочка некоторой системы базисных функций. Конечномерная задача (система линейных алгебраических уравнений для узловых значений конечных элементов) во всех случаях формально получается из условия ортогональности невязки приближенного решения некоторому конечномерному подпространству.

При численной реализации исследовано упругое статическое напряженное и деформируемое состояние разноориентированного ствола ГС в трансстропном пласте в зависимости от упругой анизотропии, в том числе от степени несплошности сцеплением мелких наклонных слоев под углом φ , когда продольные оси полостей составляют произвольный угол ψ с линией простираемости плоскости изотропии (табл.1).

4 Заключение

На основе теоретических соотношений и методов получены основные формулы для определения продуктивности скважин в упругодеформируемой неоднородной среде, разработан алгоритм и пакет прикладных программ. Исследована сходимость вычислений методом конечных элементов, а также достоверность полученных результатов проверкой на тестовых задачах.

Напряженно-деформированное состояние разноориентированной скважины существенно зависит от физико-механических и фильтрационных свойств пласта. Установлено, что

Таблица 1. Изменение дебита разноориентированной ГС

Ψ	k_z/k_x	Φ (град)				
		0	30	45	60	90
30°	0.1	2.537	1.564	1.626	2.468	4.158
	0.5	1.912	1.955	2.188	2.604	3.205
	1	2.912	2.912	2.912	2.912	2.912
	5	25.152	14.700	8.903	6.620	8.089
	10	62.723	31.372	16.472	11.774	18.575
45°	0.1	2.537	1.677	1.701	2.290	3.355
	0.5	1.912	1.985	2.206	2.559	3.036
	1	2.912	2.912	2.912	2.912	2.912
	5	25.152	15.673	9.416	5.960	5.731
	10	62.723	34.538	17.975	9.888	12.076
60°	0.1	2.537	1.795	1.813	2.260	3.012
	0.5	1.912	2.017	2.235	2.548	2.945
	1	2.912	2.912	2.912	2.912	2.912
	5	25.152	16.904	10.445	5.889	3.824
	10	62.723	38.872	21.283	9.659	6.288

при увеличении отбираемой жидкости через горизонтальную скважину значения дебита существенно уменьшаются. Можно отметить следующую характерную особенность, увеличение дебита, с ростом разности между углом падения и углом наклона плоскости изотропии пласта.

На основе числовых результатов проведенных расчетов обоснован и разработан способ исследования особенностей фильтрационных полей и напряженного состояния в неоднородном пласте с горизонтальными скважинами. Полученные результаты и созданный пакет прикладных программ могут быть применены для оценки продуктивности нефтегазовых пластов и определения направлений бурения скважин.

Список литературы

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. – М.: Ижевск, 2004. –628 с.
2. Черных В.А. Гидрогеомеханика нефтегазодобычи. - М.: Изд-во ООО «ВНИИГАЗ», 2001. –273 с.
3. Зайцев В.М., Магадова Л.А., Губанов В.Б., Кожабегенов М.М. Лабораторные исследования возможности доизвлечения микроостаточной нефти после заводнения пластов XIII горизонта месторождения Узень // Нефть, газ и бизнес. –М, 2006. –№ 9 – С. 48-55.
4. Дияшев И.Р., Костерин А.В., Скворцов Э.В. Фильтрация жидкости в деформируемых нефтяных пластах. - Изд-во Казанского матем.общества, 1999. – 238 с.
5. Ажиханов Н.Т. Моделирование пространственной фильтрации жидкости в деформируемой анизотропной среде с разноориентированными скважинами: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.18 / Ажиханов Нурлан Тобаханович. - Алматы, 2010. - 239 с.
6. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. Алма-Ата, Наука, 1971. -160 с.
7. Dean, R.H., Gai, X., Stone, C.M. and Minkoff, S.E. A Comparison of Techniques for Coupling Porous Flow and Geomechanics. SPE Journal, 2006, 11(1): 132-140.
8. Иктисанов В.А. Гидродинамические методы исследования и моделирование многоствольных горизонтальных скважин. – Казань: Изд-во «Плутон», 2007.-124 с.
9. Khodabakhshi G., Spataru C. Development of a predictive mathematical model for fluid-porous media interaction problems. Supplement Proceedings of ICMI 45, Bacau, Sept.18-20, 2006. - p.123-138.
10. M.Vu , J.Sulem, D.Subrin, N.Monin. Semi-Analytical Solution for Stresses and Displacements in a Tunnel Excavated in Transversely Isotropic Formation with Non-Linear Behavior. Rock Mech Rock Eng (2013) 46:213–229

11. E.Ali, W.Guang, Zh.Zhiming, J.Weixue. Assessments of Strength Anisotropy and Deformation Behavior of Banded Amphibolite Rocks. *Geotech Geol Eng* (2014) 32:429–438
12. R.Gholami, V.Rasouli. Mechanical and Elastic Properties of Transversely Isotropic Slate. *Rock Mech Rock Eng* (2014) 47:1763–1773
13. Wittke W. *Rock Mechanics Based on an Anisotropic Jointed Rock Model*. Wiley, 2014. – 876.
14. Rohan Eduard, Cimrman Robert. Two-scale modeling of tissue perfusion problem using homogenization of dual porous media. *International journal for multiscale computational engineering*, 2010. - V.8 P.81-102
15. Ren-Shi Nie, Ying-Feng Meng, Yong-Lu Jia, Fu-Xiang Zhang, Xiang-Tong Yang, Xin-Nian Niu. Dual Porosity and Dual Permeability Modeling of Horizontal Well in Naturally Fractured Reservoir. *Transp Porous Med*, (2012) 92:213–235.
16. Shih-Jung Wang A, Kuo-Chin Hsu. Dynamic interactions of groundwater flow and soil deformation in randomly heterogeneous porous media. *Journal of Hydrology*, 499 (2013) 50–60.
17. Mihoubi, D., Bellagi, A., Modeling of heat and moisture transfers with stress-strain formation during convective air drying of deformable media, *Heat Mass Transf.* 48, 1697–1705 (2012).
18. Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor, P. Nithiarasu. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann; 7 Edition Hardcover – November 28, 2013. 584 pages
19. R. W. Lewis, B. A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, 2nd Edition. October 1998. 508 pages.
20. Khoei A.R., Haghghat E. Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces. *Applied Mathematical Modelling*, 35 (2011), 5426–5441.