

Модель геодинамо, согласующаяся с данными о крупномасштабной структуре конвекции в ядре Земли

Л.К. КРУТЬЕВА, Г.М. ВОДИНЧАР

Институт космических исследований и распространения радиоволн

ДВО РАН, п. Паратунка Камчатского края

e-mail: kruteva_lu@mail.ru

Построена маломодовая модель геодинамо, структура поля скоростей которой согласована с данными о распределении плотности в жидком ядре Земли. Модель включает две компоненты температуры, одну полоидальную компоненту скорости и две тороидальные, моделирующие кориолисов эффект. Магнитное поле представлено основным диполем и шестью модами, структурно согласованными с модами скорости.

Показано, что в данной модели в течение не менее полумиллиона лет может поддерживаться магнитное поле, дипольная компонента которого близка по величине к реальной дипольной компоненте геомагнитного поля.

Введение

Одним из ключевых вопросов для геодинамо является структура конвективных течений в жидком ядре. Косвенную информацию об этой структуре можно получить из данных о неоднородностях в плотности жидкого ядра. В статье [4] проанализированы результаты ряда работ по splitting-функциям собственных колебаний Земли в которых получены срезы распределения плотности на различных глубинах. Вариации плотности на глубине 3900 км, соответствующие splitting-функции жидкого ядра, приведенные в [4], представлены на рис. 1. Здесь прослеживается четкая 12-зонная шахматная структура. Автором работы [4] на основе этих данных была высказана гипотеза о соответствующей структуре конвекции, где в шести областях материал ядра "тонет а в шести – "всплывает". В работе [1] исследовалась возможность существования конвекции с такой структурой без учета магнитного поля. Было показано, что при общепринятых значениях физических параметров ядра эта конвекция может поддерживаться в ядре. В настоящей работе построена модель геодинамо в основе которой лежит подобная структура конвекции. Исследуется вопрос о том, может ли она в течение длительного времени поддерживать магнитное поле дипольного типа близкое по величине к наблюдаемому, а также будут ли характерные значения скорости согласовываться с имеющимися оценками [2].

Формулировка краевой задачи геодинамо

Рассматриваем вращающуюся вместе с Землей с угловой скоростью Ω систему координат, начало которой расположено в центре Земли, а ось Oz проходит через северный полюс. Обозначим через \mathbf{v} , \mathbf{B} и P поля скорости, магнитной индукции и давления, соответственно. Поле температуры внешнего ядра представим в виде $T + T_s$, где T_s –

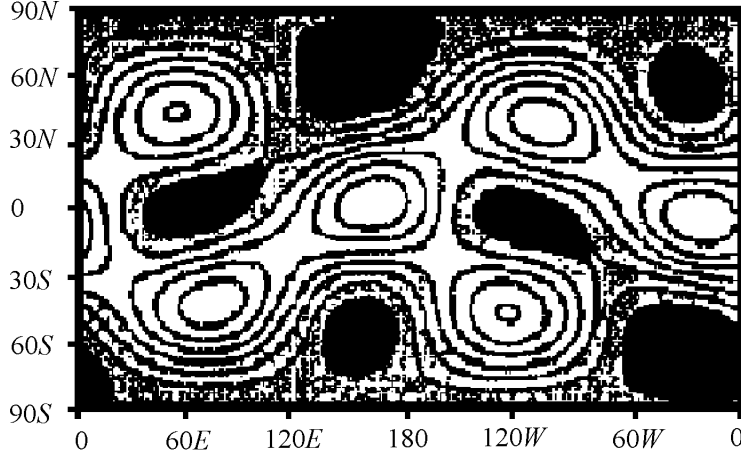


Рис. 1. Портрет splitting-функции для моды ${}_{11}S_4$ собственных колебаний Земли из работы [4]. Черный цвет – плотность вещества на 0.2% выше средней, белый – плотность на 0.2% ниже средней. По горизонтальной оси отмечены градусы долготы, по вертикальной – широты.

стационарное распределение температуры, соответствующее теплопередаче в виде чистой теплопроводности, а T – отклонение от этого распределения.

Будем использовать следующие упрощающие предположения: вещество внешнего ядра несжимаемое, относительная магнитная проницаемость всего пространства $\mu = 1$, вариации плотности внешнего ядра относительно среднего значения ρ_0 малы, кинематическая вязкость ν и температуропроводность k внешнего ядра, а также магнитная вязкость ν_m всего ядра постоянны. Среду за пределами ядра считаем непроводящей, что приводит к потенциальности поля \mathbf{B} в этой области. Температура на внутренней r_1 и внешней $r_2 = r_1 + h$ границах жидкого ядра сохраняет постоянные значения T_1 и $T_2 = T_1 + \delta T$. Эти предположения являются обычными при постановке задач геодинамики [8, 7]. Также будем считать, что поле \mathbf{v} нулевое за пределами внешнего ядра, т.е. в рассматриваемой модели отсутствует явление супервращения внутреннего ядра.

Тогда уравнения динамо записываются в приближении Буссинеска в виде [8]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \beta \frac{g_2}{r_2} T \mathbf{r} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)(T + T_s) &= k \Delta T, \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\
 \nabla \mathbf{v} &= 0, \\
 \nabla \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь g_2 – ускорение свободного падения на границе ядра, β – коэффициент объемного теплового расширения внешнего ядра, μ_0 – магнитная постоянная.

Если принять в качестве единиц измерения расстояния, скорости, времени, давления, температуры и магнитной индукции величины $h, \nu/h, h^2/\nu, \rho_0 \nu^2/h^2, \delta T$ и $\nu \sqrt{\mu_0 \rho_0}/h$, соответственно, то уравнения (1) в безразмерных переменных запишутся в виде (обозначения переменных сохранены):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \text{RaPr}^{-1} \frac{Tr}{r_2} \mathbf{e}_r - \tau (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T - r_1 r_2 \frac{v_r}{r^2} &= \text{Pr}^{-1} \Delta T, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q^{-1} \text{Pr}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\
\nabla \mathbf{v} &= 0, \\
\nabla \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Управляющими параметрами модели являются: число Релея $\text{Ra} = \delta T g_2 h^3 \beta / (\nu k)$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu / k$, число Кориолиса $\tau = 2h^2 \Omega / \nu$, число Робертса $q = k / \nu_m$.

Для исключения поля давления возьмем ротор от обеих частей первого уравнения системы (2), учитывая, что $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = (1/2) \text{grad} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}$, и получим систему:

$$\begin{aligned}
\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}) &= \text{rot} \Delta \mathbf{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \text{rot} \left(\frac{Tr}{r_2} \mathbf{e}_r \right) - \tau (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + \text{rot} (\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T - r_1 r_2 \frac{\mathbf{v}_r}{r^2} &= \text{Pr}^{-1} \Delta T, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q^{-1} \text{Pr}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\
\nabla \mathbf{v} &= 0, \\
\nabla \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Систему (3) дополняем однородными граничными условиями для температуры, условиями прилипания для скорости на внутренней и внешней границах жидкого ядра: $T(r = r_1) = T(r = r_2) = 0$, $\mathbf{v}(r = r_1) = \mathbf{v}(r = r_2) = 0$.

Для магнитного поля на границе внешнего ядра используются вакуумные граничные условия, требующие непрерывного перехода соленоидального поля общего вида в области $r < r_2$ в потенциальное при $r > r_2$. Разложим магнитное поле в ядре по сферическим функциям на тороидальные и полоидальные составляющие

$$\mathbf{B}_{nm}^T = \text{rot} (R_{nm}^T(r, t) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_{nm}^P = \text{rot} \text{rot} (R_{nm}^P(r, t) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}), \tag{4}$$

где вид функций $R_{nm}^T(r, t)$ и $R_{nm}^P(r, t)$ конкретизируем позже. Тогда вакуумные граничные условия при $r = r_2$ примут вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{nm}^T(r = r_2) &= \mathbf{0}, \quad \text{rot} \mathbf{B}_{nm}^T(r = r_2) = \mathbf{0}, \\
\mathbf{B}_{nm}^P(r = r_2) \parallel \mathbf{B}_{nm}^{\text{out}}(r = r_2), \quad \text{rot} \mathbf{B}_{nm}^P(r = r_2) &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Спектральные разложения полей

Будем раскладывать поля температуры, скорости и индукции по собственным полям спектральных задач, связанных с оператором Лапласа. Температуру представим в виде $T = \sum_{k,n,m} k \alpha_{nm}(t) k \Theta_{nm}(r, \theta, \varphi)$, где $k \Theta_{nm}$ — собственные функции оператора

Лапласа, нулевые при $r = r_{1,2}$. Тороидальную составляющую поля скорости запишем в виде $\mathbf{v} = \sum_{k,n,m} k\beta_{nm}^T(t) {}_k\mathbf{v}_{nm}^T(r, \theta, \varphi)$, где ${}_k\mathbf{v}_{nm}^T = \text{rot} (R_{kn}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})$ – собственные поля векторного оператора Лапласа, удовлетворяющие условию прилипания при $r = r_{1,2}$. Наконец, полоидальную часть скорости представим в виде $\mathbf{v}_{nm}^P = \sum_{k,n,m} k\beta_{nm}^P(t) {}_k\mathbf{v}_{nm}^P(r, \theta, \varphi)$, где ${}_k\mathbf{v}_{nm}^P = \text{rot rot} (R_{kn}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r})$ – собственные поля спектральной задачи $\text{rot} \Delta \mathbf{P} + \mu \text{rot} \mathbf{P} = 0$ в пространстве полоидальных полей, нулевых при $r = r_{1,2}$.

Строение функций ${}_k\Theta_{nm}$ описано в [6], построение полей ${}_k\mathbf{v}_{nm}^T, {}_k\mathbf{v}_{nm}^P$ выполнено в [1].

Компоненты (4) магнитного поля также будем раскладывать по полям задачи

$$\text{rot} \Delta \mathbf{B}_{nm} + \eta \text{rot} \mathbf{B}_{nm} = 0, \quad (6)$$

с соответствующими краевыми условиями. Мы опускаем сейчас верхний индекс из формулы (4), поскольку пока рассуждения носят общий характер для полей обоих типов. Разделяя радиальную и временную переменную, представим поля \mathbf{B}_{nm} в виде

$$\mathbf{B}_{nm} = \sum_k k\gamma_{nm}(t) \text{rot} ({}_k R_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}) = \sum_k k\gamma_{nm}(t) {}_k\mathbf{B}_{nm}.$$

Здесь индекс $k = 0, 1, 2, \dots$ соответствует дискретизации спектра задачи (6) по радиальной переменной. В [1] показано, что функции ${}_k R_{nm}$ с учетом их ограниченности в центре Земли имеют вид $(A_{kn} j_n(\sqrt{\eta_{kn}} r) + B_{kn} r^n) Y_n^m$, где $j_n(\cdot)$ – сферические функции Бесселя 1-го рода, коэффициенты A_{kn} и B_{kn} определяются из краевых условий с точностью до нормирующего множителя.

Далее рассмотрим поля разных типов отдельно. Краевые условия для тороидальных полей ${}_k\mathbf{B}_{nm}^T$ дают систему уравнений

$${}_k R_{nm}^{BT}(r_2) = \left. \frac{d_k R_{nm}^{BT}}{dr} \right|_{r=r_2} = 0 \quad (7)$$

на коэффициенты A_{kn} и B_{kn} . Условие нетривиальной разрешимости этой системы определяет для каждого n счетное множество собственных значений η_{kn}^T , как решений уравнения

$$j_n(\sqrt{\eta_{kn}} r_2) n r_2^{n-1} - r_2^n \left. \frac{d j_n(\sqrt{\eta_{kn}} r)}{dr} \right|_{r=r_2} = 0. \quad \text{После нахождения из этого уравнения}$$

коэффициентов η_{kn}^T , подставляем их в одно из уравнений системы (7), откуда получаем коэффициенты A_{kn} и B_{kn} с точностью до нормирующего множителя. Условие нормировки выберем в виде $\int_{R^3} ({}_k\mathbf{B}_{nm}^T)^2 dV = \int_{r \leq r_2} ({}_k\mathbf{B}_{nm}^T)^2 dV = 1$, которое соответствует единичной безразмерной энергии выделяемой полем ${}_k\mathbf{B}_{nm}^T$ во всем пространстве.

Для полоидальных полей краевое условие $\text{rot} \mathbf{B}_{nm}^P(r = r_2) = \mathbf{0}$ дает уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R_{kn}^{BP} |_{r=r_2} = 0, \quad (8)$$

а условие $\mathbf{B}_{nm}^P(r = r_2) \parallel \mathbf{B}_{nm}^{out}(r = r_2)$ приводит к уравнению

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{n+1}{r} \right) R_{kn}^{BP} |_{r=r_2} = 0. \quad (9)$$

Аналогично случаю тороидальных полей, условие ненулевой разрешимости системы (8-9) дает уравнения на собственные значения η_{kn}^P , подстановка которых в эту систему позволяет определить коэффициенты A_{kn} и B_{kn} с точностью до нормирующего множителя.

Сам этот множитель находим из условия нормировки

$$\int_{R^3} ({}_k\mathbf{v}_{nm}^P)^2 dV = \int_0^{+\infty} [R_{kn}^{BP}]^2 n^2(n+1)^2 dr + \int_0^{+\infty} \left[\frac{R_{kn}^{BP}}{r} + \frac{dR_{kn}^{BP}}{dr} \right]^2 r^2 n(n+1) dr = 1 \quad (10)$$

Как и в предыдущем случае, это условие приводит к единичной энергии, выделяемой полем во всем пространстве. В левом интеграле формулы (10) интегрирование ведется по всему пространству, а правая часть формулы представляет из себя результат аналитического интегрирования левой по угловым переменным. При интегрировании по промежутку $r > r_2$ в (10) предполагается, что в этом промежутке $R_{kn}^{BP}(r) = R_{kn}^{BP}(r_2) \left(\frac{r}{r_2} \right)^{-(n+1)}$. Такое выражение накладывается непрерывным переходом магнитного поля через границу внешнего ядра. Все вышеописанные расчеты базисных магнитных мод, связанные с решением уравнений на собственные значения, систем для коэффициентов, нормировками выполнялись в пакете MAPLE 12. При этом интегрирование по угловым переменным выполнялось аналитически, а по радиальной – численно. Эти расчеты были проведены для $k = 0, \dots, 5$ и $n = 1, \dots, 10$.

Отбор мод для представления конвективной структуры

Выполним отбор мод скорости, которые определяют вышеописанную во Введении структуру течений с 12 чередующимися зонами поднятия и опускания вещества. В работе [1] показано, что подобная структура вертикальных течений описывается полоидальными компонентами ${}_k\mathbf{v}_{4,\pm 2}^P$. При этом крупномасштабная конвекция с транспортом материала от нижней границы к верхней получается при $k = 0$. Знаки радиальной проекции компоненты ${}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$ и некоторые ее линии тока приведены на рис. 2. Ясно, что линейными комбинациями двух таких мод можно обеспечить любой фазовый сдвиг 12-зонной картины по углу φ . Поскольку выбор начала отсчета угла φ совершенно произволен, можно ограничиться только модой ${}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$.

Для того, чтобы учесть кориолисов снос основной компоненты скорости, направленные $\mathbf{e}_z \times {}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$ действующей на нее силы Кориолиса аппроксимировалось другими компонентами скорости. В качестве критерия приближения использовалась минимизация невязки $\sum_{k,n,m} ({}_kq_{nm} {}_k\mathbf{v}_{nm}^T + {}_ks_{nm} {}_k\mathbf{v}_{nm}^P) - \mathbf{e}_z \times {}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$ в метрике скалярного произведения

$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \int (\mathbf{P} \mathbf{Q}) dV$, где интегрирование ведется по объему жидкого ядра. Результаты расчетов показали, что отличными от нуля являются только коэффициенты ${}_kq_{3,2}$, ${}_kq_{5,2}$ и ${}_0s_{4,-2}$. При этом в порядке убывания коэффициентов

$$\mathbf{e}_z \times {}_k\mathbf{v}_{4,2}^P \approx 0.41{}_0\mathbf{v}_{5,2}^T - 0.34{}_1\mathbf{v}_{3,2}^T - 0.25{}_0\mathbf{v}_{3,2}^T - 0.17{}_1\mathbf{v}_{5,2}^T - 0.1{}_0\mathbf{v}_{4,-2}^P - 0.06{}_2\mathbf{v}_{5,2}^T + 0.04{}_2\mathbf{v}_{3,2}^T + \dots$$

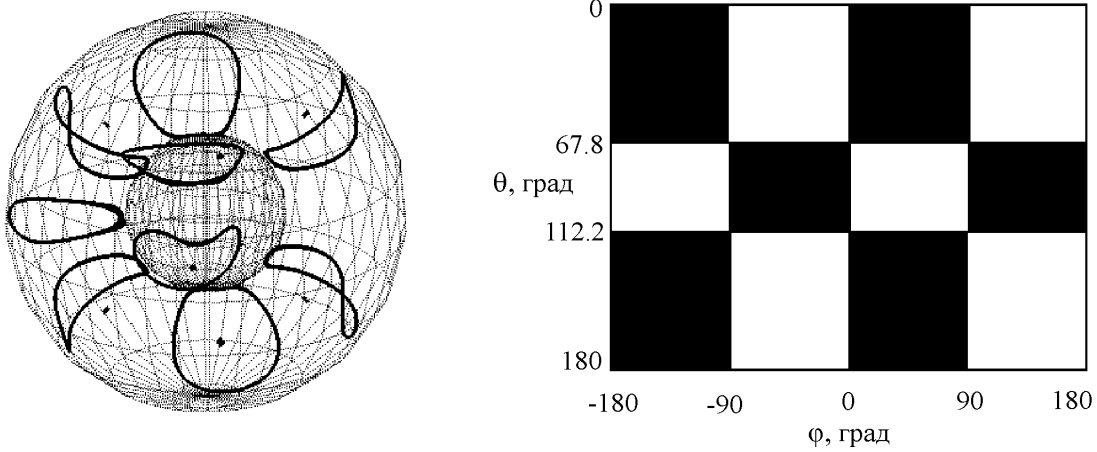


Рис. 2. Линии тока моды ${}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$ (слева) и ее радиальная компонента (справа). Черный цвет – течение снизу вверх, белый – наоборот.

С учетом этого разложения для аппроксимации кориолисова сноса основной моды скорости в модели использовались две тороидальные компоненты ${}_0\mathbf{v}_{5,2}^T$ и ${}_1\mathbf{v}_{3,2}^T$.

Для представления температуры были оставлены две моды: ${}_1\Theta_{0,0}$ и ${}_0\Theta_{4,2}$. Первая дает равномерное по сфере отклонение по радиусу от стационарного профиля (используется по аналогии с моделью Лоренца маломодовой конвекции в плоском слое [3]), вторая «запускает» основную конвективную моду ${}_0\mathbf{v}_{4,2}^P$.

Магнитное поле представим модами ${}_0\mathbf{B}_{1,0}^P$, ${}_0\mathbf{B}_{1,\pm 1}^P$, описывающими дипольную часть, а также пространственно (по индексам) связанными с компонентами скорости модами ${}_0\mathbf{B}_{5,\pm 2}^T$, ${}_0\mathbf{B}_{5,\pm 2}^P$, ${}_0\mathbf{B}_{3,\pm 2}^T$, ${}_0\mathbf{B}_{3,\pm 2}^P$, ${}_0\mathbf{B}_{4,\pm 2}^T$, ${}_0\mathbf{B}_{4,\pm 2}^P$.

Таким образом, первоначально в модели будем использовать 3 компоненты скорости, 2 – температуры, 15 – магнитной индукции. В дальнейшем число магнитных мод удастся сократить.

Для удобства далее перейдем к одноиндексным обозначениям в соответствии с Таблицей 1.

Итак, принимаются разложения полей:

$$T = \alpha_0(t)\Theta_0 + \alpha_1(t)\Theta_1, \mathbf{v} = \sum_{i=0}^2 \beta_i(t)\mathbf{v}_i, \mathbf{B} = \sum_{i=0}^{14} \gamma_i(t)\mathbf{B}_i. \quad (11)$$

Собственные значения мод температуры, скорости и индукции обозначим, соответственно, через λ_i , μ_i , η_i .

Разложения (11) подставим в систему (3), предварительно взяв в ней ротор третьего уравнения. Следуя идее метода Галеркина [5] получим квадратичную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для амплитуд

Таблица 1

Трехиндексные комбинации и типы полей			Один индекс
k	n	m	Тип поля
Моды температуры			
1	0	0	0
0	4	2	1
Моды скорости			
1	3	2	tor
0	4	2	pol
0	5	2	tor
Моды индукции			
0	1	-1	pol
0	1	0	pol
0	1	1	pol
0	4	-2	tor
0	4	2	tor
0	4	-2	pol
0	4	2	pol
1	3	-2	tor
1	3	2	tor
1	3	-2	pol
1	3	2	pol
0	5	-2	tor
0	5	2	tor
1	5	-2	pol
0	5	2	pol

$\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^2 A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^3 B_{ij}^k \beta_i \beta_j - \sum_{i=0}^3 A_i^k \beta_i \mu_i + \text{RaPr}^{-1} \sum_{j=0}^1 C_j^k \alpha_j + \\
+ \tau \sum_{i=0}^2 E_i^k \beta_i + \sum_{i,j=0}^{14} L_{i,j}^k \gamma_i \gamma_j, \quad k &= 0,1,2, \\
\frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{2,1} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=0}^2 H_i^s \beta_i - \text{Pr}^{-1} \lambda_s \alpha_s, \quad s = 0,1, \\
\sum_{i=0}^{14} Q_i^l \frac{d\gamma_i}{dt} &= \sum_{i,j=0}^{2,14} W_{ij}^l \beta_i \gamma_j - q^{-1} \text{Pr}^{-1} \sum_{i=0}^{14} Q_i^l \eta_i \gamma_i, \quad l = 0, \dots, 14.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $A_i^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} \mathbf{v}_i \rangle$, $B_{ij}^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (\mathbf{v}_i \times \text{rot} \mathbf{v}_j) \rangle$, $C_j^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (T_j \mathbf{r} \mathbf{e}_r / r_2) \rangle$, $E_j^k = -\langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_i) \rangle$, $L_{ij}^k = \langle \text{rot} \mathbf{v}_k, \text{rot} (\text{rot} \mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_j) \rangle$, $F_{ij}^s = -\langle \Theta_s, (\mathbf{v}_i \nabla) \Theta_j \rangle$, $H_i^s = \langle \Theta_s, (\mathbf{v}_i)_r (r_1 r_2 / r^2) \rangle$, $Q_i^l = \langle \text{rot} \mathbf{B}_l, \text{rot} \mathbf{B}_i \rangle$, $W_{ij}^l = \langle \text{rot} \mathbf{B}_l, \text{rot} \text{rot} (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_l) \rangle$.

Все эти скалярные произведения являются интегралами либо по объему всего ядра (коэффициенты Q_i^l) либо жидкого ядра (все остальные) от известных базисных полей.

Они были вычислены в системе MAPLE 12, причем аналитическое интегрирование по θ и φ показало, что многие коэффициенты нулевые. В частности, равны нулю все коэффициенты W_{ij}^l для $l = 0, 2, 5, \dots, 8, 11, 12$, а матрицы с элементами A_i^k и Q_i^l диагональные. Тогда из системы (12) видно, что амплитуды магнитных мод \mathbf{V}_l при вышеупомянутых l экспоненциально затухают и эти моды можно отбросить. Таким образом, окончательно в модели оставляем только 7 магнитных мод. Система (12) тогда преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
A_0^0 \frac{d\beta_0}{dt} &= -A_0^0 \mu_0 \beta_0 + \tau E_1^0 \beta_1 + L_{4,1}^0 \gamma_1 \gamma_4 + (L_{1,9}^0 + L_{9,1}^0) \gamma_1 \gamma_9, \\
A_1^1 \frac{d\beta_1}{dt} &= -A_1^1 \mu_1 \beta_1 + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} C_1^1 \alpha_1 + \tau (E_0^1 \beta_0 + E_2^1 \beta_2) + (L_{1,3}^1 + L_{3,1}^1) \gamma_1 \gamma_3 + \\
&+ (L_{1,10}^1 + L_{10,1}^1) \gamma_1 \gamma_{10} + (L_{1,14}^1 + L_{14,1}^1) \gamma_1 \gamma_{14}, \\
A_2^2 \frac{d\beta_2}{dt} &= -A_2^2 \mu_2 \beta_2 + \tau E_1^2 \beta_1 + L_{4,1}^2 \gamma_1 \gamma_4 + (L_{1,13}^2 + L_{13,1}^2) \gamma_1 \gamma_{13}, \\
\frac{d\alpha_0}{dt} &= F_{1,1}^0 \beta_1 \alpha_1 + \text{Pr}^{-1} \lambda_0 \alpha_0, \\
\frac{d\alpha_1}{dt} &= F_{1,0}^1 \beta_1 \alpha_0 + H_1^1 \beta_1 - \text{Pr}^{-1} \lambda_1 \alpha_1, \\
Q_1^1 \frac{d\gamma_1}{dt} &= W_{0,9}^1 \beta_0 \gamma_9 + W_{1,3}^1 \beta_1 \gamma_3 + W_{1,10}^1 \beta_1 \gamma_{10} + W_{1,14}^1 \beta_1 \gamma_{14} + \\
&+ W_{2,13}^1 \beta_2 \gamma_{13} - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_1^1 \eta_1 \gamma_1, \\
Q_3^3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= W_{1,1}^3 \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_3^3 \eta_3 \gamma_3, \\
Q_4^4 \frac{d\gamma_4}{dt} &= W_{2,1}^4 \beta_2 \gamma_1 + W_{0,1}^4 \beta_0 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_4^4 \eta_4 \gamma_4, \\
Q_9^9 \frac{d\gamma_9}{dt} &= W_{0,1}^9 \beta_0 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_9^9 \eta_9 \gamma_9, \\
Q_{10}^{10} \frac{d\gamma_{10}}{dt} &= W_{1,1}^{10} \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_{10}^{10} \eta_{10} \gamma_{10}, \\
Q_{13}^{13} \frac{d\gamma_{13}}{dt} &= W_{1,1}^{13} \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_{13}^{13} \eta_{13} \gamma_{13}, \\
Q_{14}^{14} \frac{d\gamma_{14}}{dt} &= W_{1,1}^{14} \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} \text{Pr}^{-1} Q_{14}^{14} \eta_{14} \gamma_{14}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Примем следующие значения для параметров земного ядра [9]: $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\nu_m = 10^{-6}$ м²/с, $k = 10^{-5}$ м²/с, $\delta T = 10^3$ К, $\beta = 10^{-4}$ К⁻¹, $g_2 = 7$ м/с². Известно также, что $h = 2.1 \cdot 10^6$ м и $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $r_1 = 1391$ км.

Система (13) при любых значениях управляющих параметров имеет нулевую точку покоя, соответствующую отсутствию конвекции и магнитного поля. При вычислении ненулевых точек покоя учтем, что система ((2)) обладает симметрией относительно замены знака магнитного поля, а система (13) обладает симметрией относительно смены знаков амплитуд скоростных мод и температурной амплитуды α_1 при сохранении знака α_0 . Эта вторая симметрия специфична для рассматриваемой маломодовой модели.

Численно, с использованием пакета MAPLE 12, были найдены три несимметричные ненулевые точки покоя. Координаты β_1 и γ_1 этих точек, определяющих характерные

Таблица 2

№ т./п.	β_1	γ_1
1	$1.54 \cdot 10^2$	0
2	$2.46 \cdot 10^8$	$6.87 \cdot 10^{11}$
3	$2.77 \cdot 10^7$	$6.02 \cdot 10^{12}$

скорость конвекции и интенсивность основного диполя приведены в Таблице 2. С учетом вышеуказанных симметрий первая точка таблицы расщепляется на две, а каждая из двух оставшихся – на четыре точки. Первая точка соответствует непроводящему материалу ядра, т.е. не представляет интереса с точки зрения задачи генерации магнитного поля.

Пересчитывая безразмерную скорость для точки № 2 в систему Си, получим, что $\beta_1 = 2.46 \cdot 10^8 \sim 2 \cdot 10^{-4}$ м/с, а имеющиеся оценки реальной характерной скорости конвекции дают значения порядка 10^{-4} м/с [2].

Амплитуде γ_1 дипольной моды $\mathbf{B}_1 = {}_0\mathbf{B}_{1,0}^P$ в эмпирической модели референтного геомагнитного поля IGRF [10] соответствует коэффициент Гаусса g_1^0 . Значение этого коэффициента, соответствующее $\gamma_1 = -6.87 \cdot 10^{11}$, составляет $-25 \cdot 10^4$ нТл. Реальное значение коэффициента равно $-3 \cdot 10^4$ [10].

Таким образом, точки покоя с координатами $\beta_1 = \pm 2.46 \cdot 10^8$, $\gamma_1 = -6.87 \cdot 10^{11}$ дают стационарные решения модели, совпадающие по порядку величин с имеющимися оценками скорости конвекции и менее, чем на порядок отличающиеся от наблюдаемой величины основного диполя.

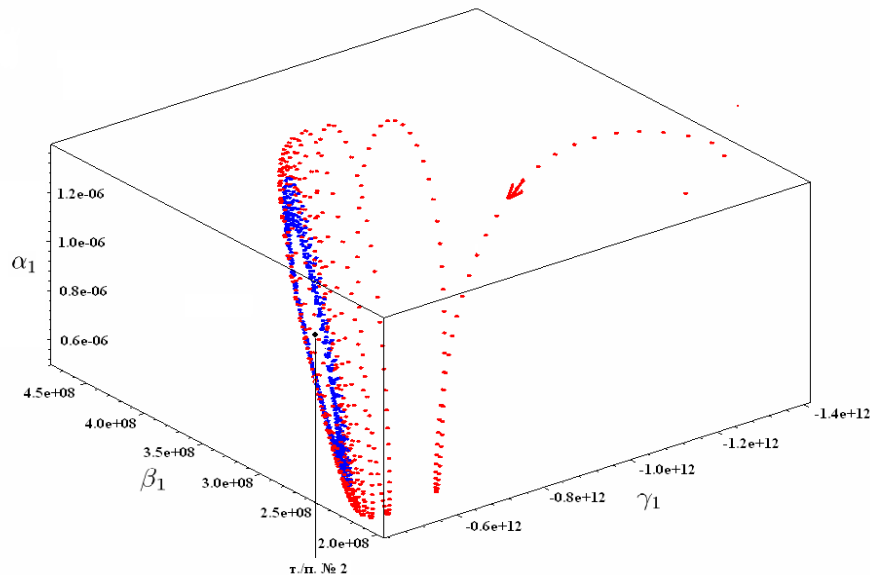


Рис. 3. Проекция фазовых траекторий (красная и синяя), начинающихся в окрестности точки покоя (т./п.) №2 на подпространство переменных $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Исследование точек покоя из Таблицы 2 и нулевой точки на устойчивость по линейному приближению показало, что все они являются неустойчивыми. В то же время

численный расчет фазовых траекторий, начинающихся в окрестности точки № 2, методом Розенброка показал существование колебаний типа предельного цикла. Результаты вычислений говорят о длительном (не менее полумиллиона лет) устойчивом режиме генерации магнитного поля, при котором дипольная компонента поддерживается на значениях порядка 10^5 нТл. Результаты этих вычислений графически иллюстрируются рис. 3 и 4.

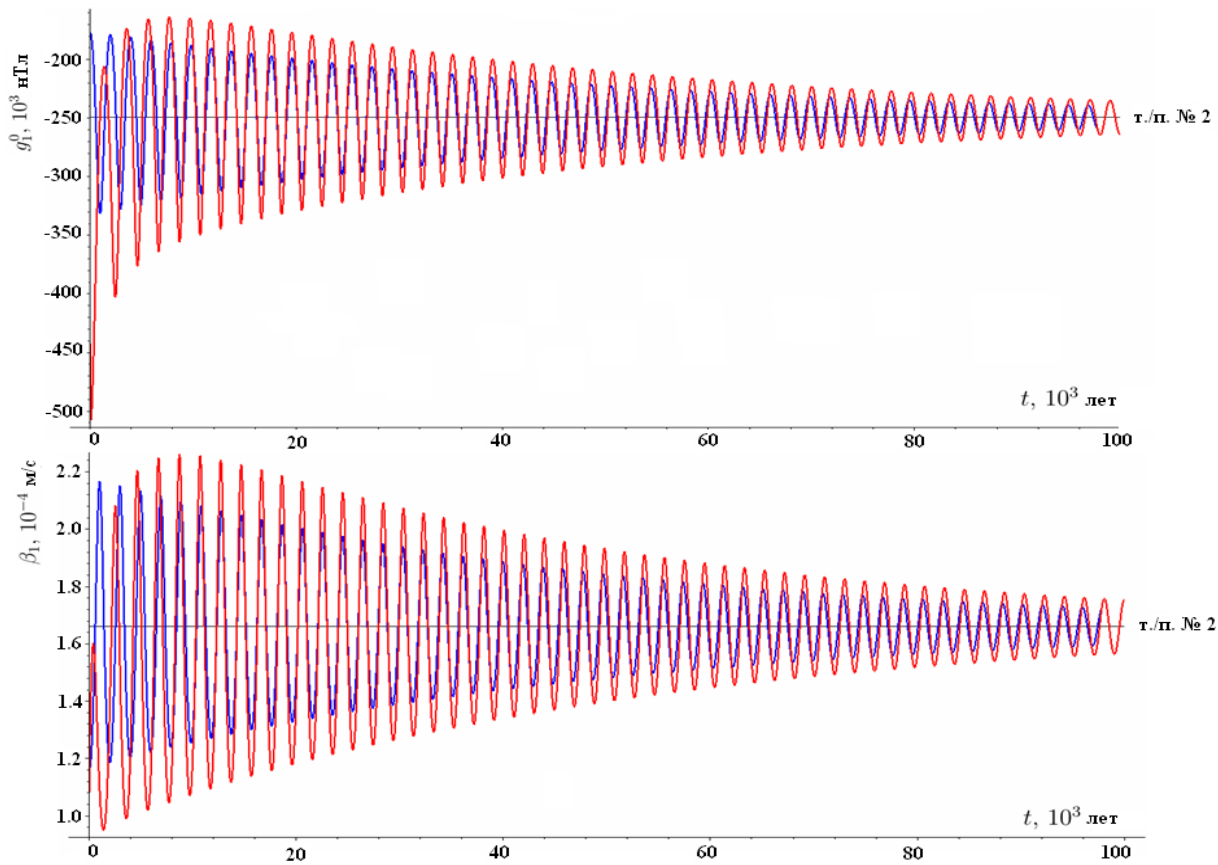


Рис. 4. Графики коэффициента Гаусса g_1^0 и амплитуды β_1 основной конвективной моды для фазовых траекторий с рис. 3. Значения приведены размерные в системе Си. Горизонтальными черными линиями отмечены стационарные значения точки покоя № 2.

Выводы

В настоящей работе предложена и изучена маломодовая модель геодинамо, поле скоростей которой согласуется с данными о структуре конвекции в ядре. Магнитное поле представлено вертикальным диполем и шестью модами, структурно связанными с гидродинамическими токами. Показано, что при принятых в теории геодинамо значениях физических параметров ядра, в модели возможен устойчивый в течение длительного времени режим магнитогидродинамической конвекции. Характерные скорости конвекции и величина дипольной компоненты магнитного поля при этом близки к наблюдаемым.

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проект 10-III-B-07-158).

Список литературы

- [1] ВОДИНЧАР Г.М., ШЕВЦОВ Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 4. С. 3–15.
- [2] ГОЛИЦЫН Г.С. Режимы конвекции на различных вращающихся геофизических и астрофизических объектах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 1. С. 20-31.
- [3] ЗАСЛАВСКИЙ Г.М., САГДЕЕВ Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [4] КУЗНЕЦОВ В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // УФН. 1997. Т. 169. № 9. С. 1001-1012.
- [5] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 232 с.
- [6] ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
- [7] JONES C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond., A. 2000. V. 358, P. 873-897.
- [8] KONO M., ROBERTS P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Reviews of Geophysics. 2002. V. 40. № 10. P. B1-B41.
- [9] MERRIL R.T., MCELHINNY M.W., MCFADDEN P.L. The Magnetic Field of the Earth. N.Y.: Acad. Press, 1996. 532 p.
- [10] International Geomagnetic Reference Field. <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>.