Линейная модель распределения ресурсов с интервальными коэффициентами[1]

М.В. Куркина
Югорский государственный университет

Введение

При управлении большим количеством объектов возникает естественная задача распределения ресурсов. Если процесс управления многошаговый, то даже в случае простых математических моделей объектов задача их оптимального управления решается исключительно численными методами математического программирования, в частности методами динамического программирования. О качественном исследовании, о выделении основных факторов в управляемой модели речи не идет.

Естественно поэтому выделении таких математических моделей, которые с одной стороны достаточны просты для аналитического (качественного) исследования, с другой стороны были бы достаточно общими. Как известно в первом приближении любую функцию можно считать линейной, поэтому в данной работе при построении математической модели мы ограничимся только линейными функциями.

Ограничение лишь линейными функциями, как показано в работах [3] – [11], не уменьшает содержательности и возможности различных модификаций и обобщений в задаче распределения ресурсов.

Линейная модель распределения ресурсов.

В классической задаче [1] распределения ресурсов планируется проект вложения ресурсов в деятельность m предприятий в течение n лет. Начальный ресурс равен ξ_0. Ресурс X, вложенный в i-ое предприятие, приносят к концу года доход $f_i(X)$ и возвращаются в размере $\varphi_i(X) < X$; $i = 1, 2, \ldots, m$. По истечении года весь оставшийся ресурс заново перераспределяют между предприятиями, новых ресурсов не поступает и доход в производство не вкладывается. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющегося ресурса. Процесс распределения ресурса рассматривается как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Ресурс здесь понимается в обобщенном смысле слова, он может быть технологический, трудовой или финансовый.

Теорема 1. *Пусть функции $f_i(X)$ и $\varphi_i(X)$ (функции дохода и возврата средств соответственно), линейные $f_i(X) = h_iX$, $\varphi_i(X) = r_iX$; $h_i > 0$, $r_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $Z^*(y, k)$ – максимальное значение дохода для оптимального процесса управления на отрезке лет $[k, k+1, \ldots, n]$ с начальным ресурсом y (функции Р. Беллмана условного оптимального дохода). Тогда функции условного оптимального дохода $Z^*(y, k)$ также будут линейные $Z^*(y, k) = H_ky$, при этом коэффициенты H_k находятся рекуррентно;*

$$\begin{array}{rcl} H_n & = & \lambda(0), \\ H_{n-1} & = & \lambda(H_n), \\ & & \ldots \\ H_1 & = & \lambda(H_2), \end{array}$$

где функция $\lambda(x) = \max\limits_{1 \le i \le m} [h_i + r_ix]$ – верхняя огибающая линейных функций.

Доказательство приведено в [2]. Формально данная задача является задачей линейного программирования и может быть численно решена с помощью стандартных алгоритмов, но при этом потеряется информация о "структуре" задачи, нельзя будет провести качественное исследование данной задачи, выделить в управляемых объектах наиболее существенные их характеристики.

Существенную информацию о качественном поведении управляемой системы можно извлечь из поведения функции $\lambda(x)$. Будем функцию $\lambda(x)$ называть преобразованием Лежандра [4] конечного множества точек $Q_i(h_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

Теорема 2. *Функция* $\lambda(x) = \max_i [h_i + r_i x]$ *– кусочно-линейная выпуклая вниз функция, ее производные (левая и правая) удовлетворяют неравенствам*

$$\min_i r_i \le \lambda'_l(x) \le \lambda'_r(x) \le \max_i r_i$$

Пример 3. *Для большей наглядности рассмотрим числовой пример из 5 объектов* $Q_i(h_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, *параметры которых:*

$$\begin{bmatrix} 1.91 & 0.81 & 1.53 & 1.44 & 0.72 \\ 0.23 & 0.18 & 0.47 & 0.64 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие точки в плоскости (h, r) *изображены на рисунке 1:*

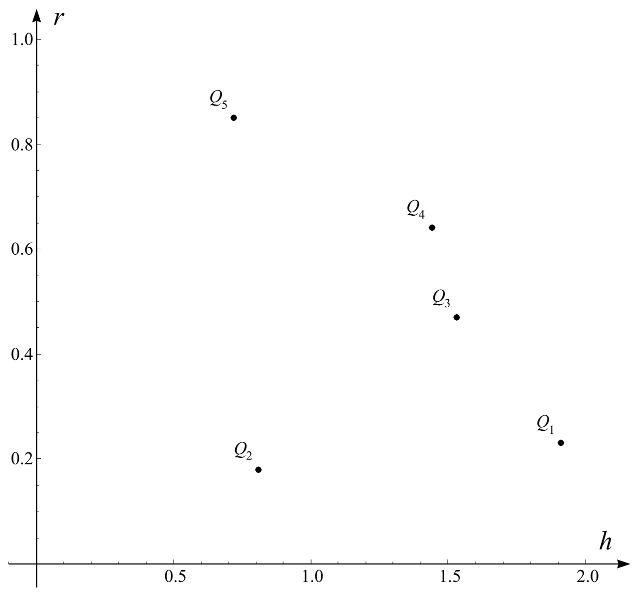

Рис. 1: Положение объектов Q_i в плоскости параметров (h, r).

Точкам Q_i *соответствуют прямые* $y = h_i + r_i x$ *в плоскости* (x, y) *и функция* $\lambda(x) = \max_i [h_i + r_i x]$ *– верхняя огибающая прямых (см. рис. 2). Коэффициенты* H_k *можно легко выразить через эту функ-*

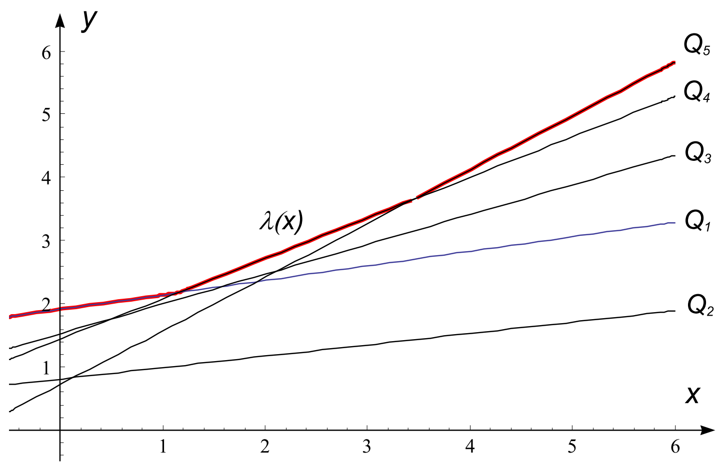

Рис. 2: Преобразование Лежандра множества Q_i.

цию. Соответствующее геометрическое построение для плана на 6 лет выполнено на рис. 3

Определение 4. *Припишем каждому линейному звену кусочно-линейной функции* $\lambda(x) = \max_i [h_i + r_i x]$ *номер соответствующего объекта и будем получившуюся конструкцию называть, для краткости, "управлением" в данной динамической задаче. Если известно "управление", то оптимальный план на любой период времени легко построить.*

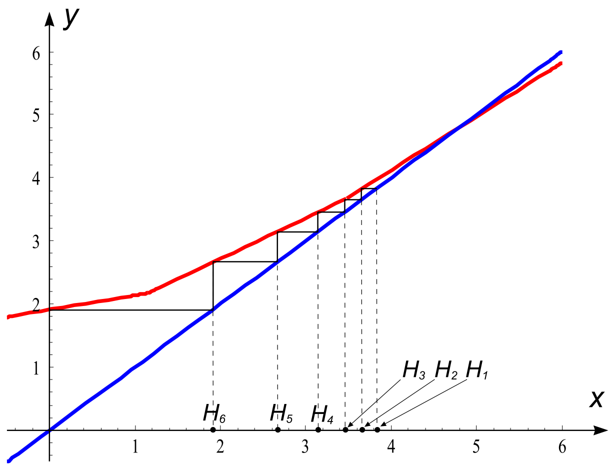

Рис. 3: Построение оптимального плана на 6 лет.

Замечание 5. *Из рисунков 2 и 3 видно, что в работе по оптимальному плану на 6 лет будут участвовать только три предприятия $\{Q_5, Q_4, Q_4, Q_4, Q_4, Q_1\}$. Остальные предприятия $\{Q_2, Q_3\}$, для которых выполняется строгое неравенство*

$$\lambda(x) > h_i + r_i x, \quad \forall x$$

привлекать к работе нецелесообразно. На первых этапах оптимального плана будут работать ресурсосберегающие предприятия (с большим значением r_i). Лишь на последних этапах будет участвовать предприятие приносящие высокий доход (с большим значением h_i). Окончательный доход, полученный от m предприятий в течение n лет – составляет

$$Z^*(y_1, 1) = H_1 y_1.$$

Основываясь на полученном качественном поведении решения поставленной задачи введем следующее определение:

Определение 6. *Коэффициентом эффективности i-ого предприятия назовем решение уравнения $x = h_i + r_i x$, т. е. число*

$$P_i = \frac{h_i}{1 - r_i}$$

Используя понятие коэффициента эффективности можно исследовать качественное поведение решения поставленной задачи.

Теорема 7. *Для многомерной линейной модели распределения ресурсов справедливы утверждения;*

$$\begin{aligned} \max_i h_i \quad &\leq \quad H_1 \leq \max_i P_i, \\ \lim_{n\to\infty} H_1 \quad &= \quad \max_i P_i, \end{aligned}$$

где коэффициент $\lim_{n\to\infty} H_1$ – соответствует бесконечно шагавой модели распределения ресурсов.

Как следует из теоремы, если планирование неограниченно числом этапов, то результат зависит лишь от значения

$$\max_i P_i.$$

На практике число этапов ограниченно и достаточно мало 3 – 5. Существенную роль при этом будут играть объекты с большим значением h_i – доходом. Оценим их влияние.

Лемма 8. *Пусть $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ – неубывающие функции и $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$, для $\forall x$. Тогда*

$$\lambda_1^{(k)}(x) \leq \lambda_2^{(k)}(x), \quad \forall x,$$

где $\lambda_1^{(2)}(x) = \lambda_1(\lambda_1(x))$,..., $\lambda_1^{(k)}(x) = \lambda_1\left(\lambda_1^{(k-1)}(x)\right)$ – композиция функции.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по k. □

Теорема 9. *Пусть*

$$h^* = h_{i_0} = \max_i \{h_i\}, \quad P^* = P_{i_1} = \max_i \left\{ \frac{h_i}{1 - r_i} \right\}$$

Положим

$$\lambda_2(x) = \frac{P^* - h^*}{P^*} x + h^*, \quad \lambda_1(x) = \max \{f_{i_0}(x), f_{i_1}(x)\}$$

Тогда для любого числа этапов n выполняется:

$$\lambda_1^{(n)}(0) \le H_1 \le \lambda_2^{(n)}(0)$$

Доказательство. Из выпуклости функции $\lambda(x)$ следуют неравенства (см. рис. 4)

$$\lambda_1(x) \le \lambda(x) \le \lambda_2(x),$$

применяя лемму получим искомое утверждение. □

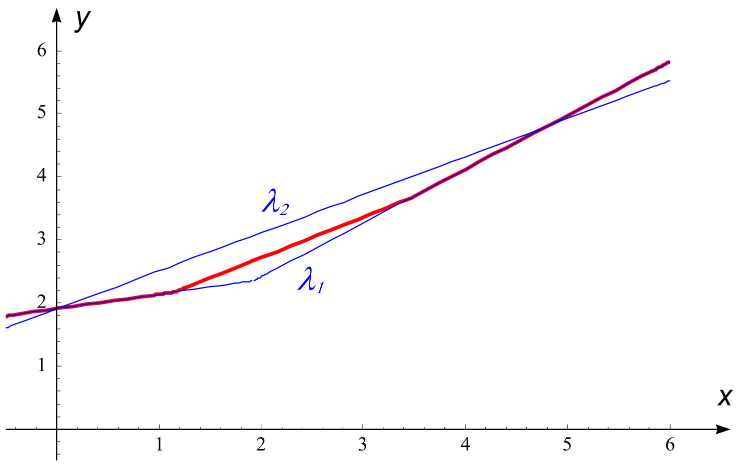

Рис. 4: Построение оптимального плана на 6 лет.

Замечание 10. *Функции $\lambda_1(x) = \max \{f_{i_0}(x), f_{i_1}(x)\}$ соответствует модель состоящая из двух объектов управления Q_{i_0} и Q_{i_1} – максимальной доходности и максимальной эффективности. Определим на скольких этапах будет задействован объект с максимальной доходностью. Для краткости введем обозначения:*

$$f_{i_0}(x) = f_0(x) = h_0 + x r_0, \quad f_{i_1}(x) = f_1(x) = h_1 + x r_1.$$

Тогда

$$f_0^{(p)}(0) = h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-1}),$$
$$f_1(f_0^{(p-1)}(0)) = h_1 + r_1 \left(h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-2}) \right).$$

Условие перехода от объекта Q_1 к объекту Q_0 имеет вид:

$$f_0^{(p)}(0) < f_1(f_0^{(p-1)}(0)),$$
$$f_0^{(p-1)}(0) > f_1(f_0^{(p-2)}(0)),$$

где $p = n - k$, k – номер этапа на котором происходит переход от объекта Q_1 к объекту Q_0. Отсюда получаем условие перехода:

$$h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-1}) < h_1 + r_1 \left(h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-2}) \right), \tag{1}$$

$$h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-2}) > h_1 + r_1 \left(h_0(1 + r_0 + \cdots + r_0^{p-3}) \right). \tag{2}$$

Заметим, что выполняются неравенства

$$\frac{h_1}{1-r_1} > \frac{h_0}{1-r_0}, \quad h_0 > h_1$$

Отсюда имеем

$$\frac{1-r_1}{1-r_0} < \frac{h_1}{h_0} < 1$$

Следовательно из (1), (2) получаем

$$\frac{1-r_1}{1-r_0}(1-r_0^{p-1}) + r_0^{p-1} < \frac{h_1}{h_0}, \quad \frac{1-r_1}{1-r_0}(1-r_0^{p-2}) + r_0^{p-2} > \frac{h_1}{h_0},$$

или

$$r_0^{p-1} < \frac{\frac{h_1}{h_0} - \frac{1-r_1}{1-r_0}}{1 - \frac{1-r_1}{1-r_0}} < r_0^{p-2}$$

Момент переключения между объектами управления равен

$$p = \log_{r_0}\left(\frac{\frac{h_1}{h_0} - \frac{1-r_1}{1-r_0}}{1 - \frac{1-r_1}{1-r_0}}\right) + 1 = \log_{r_0}\left(\frac{(P_1-P_0)(1-r_1)}{P_0(r_1-r_0)}\right) + 1.$$

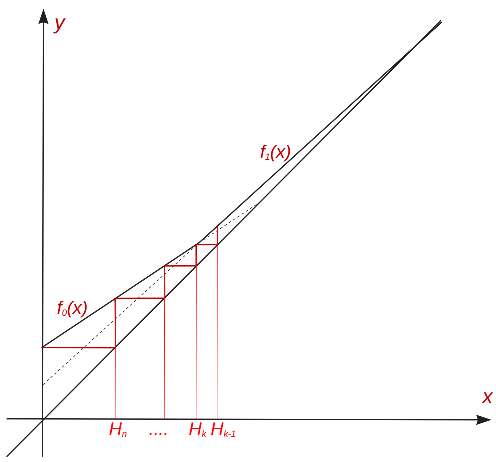

Рис. 5: Условие перехода управления для двух объектов.

Обобщенная линейная модель с интервальными коэффициентами

Путем введения интервальных коэффициентов в линейные функции, можно постановку задачи распределения ресурсов приблизить к реальной задаче.

Задача. *Пусть функции $f_i(X)$ и $\varphi_i(X)$ (функции дохода и возврата средств соответственно), линейные $f_i(X) = \boldsymbol{h}_i X$, $\varphi_i(X) = \boldsymbol{r}_i X$; где $\boldsymbol{h}_i = [h_i^0, h_i^1]$, $\boldsymbol{r}_i = [r_i^0, r_i^1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, интервалы возможных значений коэффициентов. Требуется определить возможные значения дохода и соответствующие оптимальное управление.*

Теорема 11. *Обозначим через $Z^*(y,k)$ – максимальное значение дохода для оптимального процесса управления на отрезке лет $[k, k+1, \ldots, n]$ с начальным ресурсом y (функции Р. Беллмана условного оптимального дохода). Тогда функции условного оптимального дохода $Z^*(y,k)$ также будут линейные $Z^*(y,k) = \boldsymbol{H}_k y$, где интервалы $\boldsymbol{H}_k$ равны;*

$$\boldsymbol{H}_k = [\lambda_0^{(n-k)}(0), \lambda_1^{(n-k)}(0)],$$

где функции $\lambda_0(x) = \max\limits_{1\le i\le m}\left[h_i^0 + r_i^0 x\right]$, $\lambda_1(x) = \max\limits_{1\le i\le m}\left[h_i^1 + r_i^1 x\right]$ – верхние огибающие линейных функций (см. рис. 6), где $\lambda^{(2)}(x) = \lambda\left(\lambda(x)\right)$,..., $\lambda^{(k)}(x) = \lambda\left(\lambda^{(k-1)}(x)\right)$ – композиция функции.

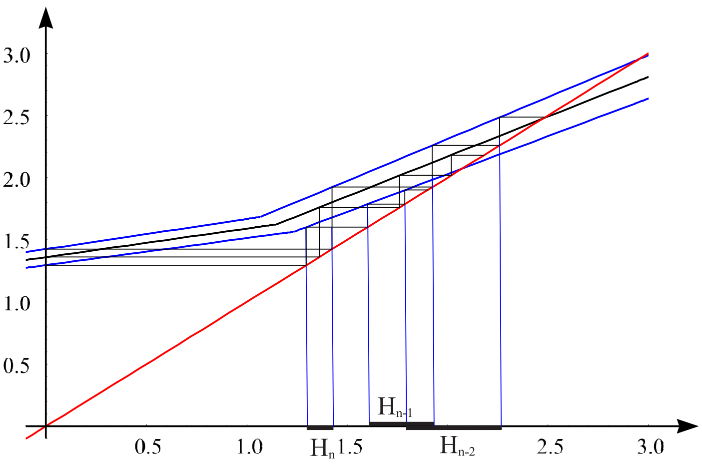

Рис. 6: Построение интервалов H_k.

Доказательство. Фиксируем значения коэффициентов $h_i \in \mathbf{h}_i$, $r_i \in \mathbf{r}_i$. Рассмотрим объекты управления Q_i определяемые линейными функциями $f_i(X) = h_i X$, $\varphi_i(X) = r_i X$. Тогда

$$\max_i(h_i^0 + xr_i^0) \le \max_i(h_i + xr_i) \le \max_i(h_i^1 + xr_i^1)$$

Следовательно для любого управления $\lambda(x)$ выполняется

$$\lambda_0(x) \le \lambda(x) \le \lambda_1(x),$$

применяя лемму 8 получим искомое утверждение. □

Определение 12. *Величины*

$$P_i^0 = \frac{h_i^0}{1 - r_i^0}, \quad P_i^1 = \frac{h_i^1}{1 - r_i^1}$$

назовем соответственно нижним и верхним значением коэффициента эффективности i-ого предприятия, очевидно $P_i^0 \le P_i^1$.

Теорема 13. *Пусть $\mathbf{r}_i = [r_i^0, r_i^1] \subset [0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Для обобщенной линейной модели распределения ресурсов с интервальными коэффициентами справедливы утверждения;*

$$\begin{aligned} \max_i h_i^0 &\le H_1 \le \max_i P_i^1, \\ \lim_{n\to\infty} H_1 &\in \left[\max_i P_i^0; \max_i P_i^1\right], \end{aligned}$$

где коэффициент $\lim_{n\to\infty} H_1$ – соответствует бесконечно шаговой модели распределения ресурсов.

Доказательство. Доказательство следует из геометрической интерпретации теоремы 11 рис. 6. □

Лемма 14. *Положим*

$$\begin{aligned} \triangle h_i = h_i^1 - h_i^0, &\quad \delta h = \max_i \triangle h_i, \\ \triangle r_i = r_i^1 - r_i^0, &\quad \delta r = \max_i \triangle r_i. \end{aligned}$$

Справедливо неравенство

$$\lambda_1(x) - \lambda_0(x) \le \max_i(\triangle h_i + x\triangle r_i) \le \delta h + x\delta r.$$

Доказательство. Величина $||\overrightarrow{u}|| = \max_i |u_i|$ является нормой вектора $\overrightarrow{u}$ и для нее выполняется неравенство треугольника $|\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}| \le ||\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_2}||$, отсюда следует нужное неравенство. □

Теорема 15. *Определим интервалы:*

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j = [r_i^0 r_j^0; r_i^1 r_j^1] = [r_{ij}^0, r_{ij}^1],$$
$$\boldsymbol{h}_{ij} = \boldsymbol{h}_i + \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{h}_j = [h_i^0 + r_i^0 h_j^0; h_i^1 + r_i^1 h_j^1] = [h_{ij}^0, h_{ij}^1],$$

Пусть функции $f_{ij}(X) = f_i(f_j(X))$ *и* $\varphi_{ij}(X) = \varphi_i(\varphi_j(X))$, $i, j = 1, \ldots, m$ *(функции дохода и возврата средств соответственно), тогда* $f_{ij}(X) = \boldsymbol{h}_{ij} X$, $\varphi_{ij}(X) = \boldsymbol{r}_{ij} X$, *причем*

$$\max_{ij} \left\{ h_{ij}^0 + r_{ij}^0 x \right\} = \lambda_0^{(2)}(x), \quad \max_{ij} \left\{ h_{ij}^1 + r_{ij}^1 x \right\} = \lambda_1^{(2)}(x).$$

Библиографический список

[1] *Вентцель Е. С.* Исследование операций. – М.: Наука, 1972.

[2] *Славская М. В., Карымов В. Р.* Многомерная линейная модель распределения ресурсов// Материалы научно-методической конференции "Математическое образование на Алтае"(МОНО 2001).

[3] *Славская М. В.* Многомерная линейная модель распределения ресурсов с ограничениями // Вестник БГПУ, 2001, №1, С.41-44.

[4] *Куркина М. В., Пономарев И. В.* Преобразование Лежандра конечного множества//Сборник тезисов международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии", Новосибирск, 14-20 сентября 2009г, стр. 64.

[5] *Куркина М. В.* Бесконечномерный аналог многомерной линейной модели распределения ресурсов с ограничениями. //Рубцовск. Тр. рубцовского индустр. инст. Вып.9, 2001,

[6] *Куркина М. В.* Линейная модель распределения ресурсов с равномерным распределением параметров// Барнаул. Вестник БГПУ, №2, 2002г.

[7] *Куркина М. В.* Непрерывная модель распределения ресурсов// Барнаул. Вестник БГПУ, №3, 2003г.

[8] *Куркина М. В.* Динамическая система, связанная с линейной задачей распределения ресурсов // Барнаул. Вестник БГПУ, №4, 2004г.

[9] *Kurkina M. V.* A dynamic system related to a linear resource allocation problem //Doklady Mathematics, Vol. 71, No. 2, 2005, 214-216pp, . c Pleiades Publishing, Ltd 3p

[10] *Куркина М. В., Славский В. В.* Об одном обобщении линейной задачи распределения ресурсов //Труды региональной конференции "Математическое образование на Алтае 2008 г. Барнаул.

[11] *Куркина М. В., Панько Р. В.* Моделирование в системе Matlab многомерной динамической линейной задачи распределения ресурсов с ограничениями//Сборник статей III Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. –, Пенза, 2009.С.65-68.