Редукция в моделировании динамики вращающегося слоя электропроводной несжимаемой жидкости с учетом эффектов диффузии магнитного поля

С.И. Перегудин
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: peregudinsi@yandex.ru

С.Е. Холодова
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики
e-mail: kholodovase@yandex.ru

Целью данной статьи является редукция системы уравнений с частными производными, моделирующей возмущение в слое идеальной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, ограниченном поверхностями, изменяющимся в пространстве и во времени, с учетом инерционных сил.

Для полученных в результате редукции уравнений построены решения, описывающие распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале.

Если электропроводная жидкая среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамическом движении в ней возникают электрические токи. Эти токи изменяют магнитное поле. Но на токи в магнитном поле действуют силы, способные изменить характер движения среды. Следовательно, гидродинамическое движение и электромагнитные явления взаимосвязаны. Эта связь описывается совместной системой уравнений поля и уравнений движения жидкости. Согласно работам известного шведского физика и астрофизика Г. Альфвена связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями возрастает с увеличением линейного масштаба явления. Для крупномасштабных явлений эта связь может быть достаточно сильной. В частности, это относится, например, к недрам звезд и жидкому ядру Земли [1]–[3].

Вопросам о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости посвящены работы [5], [6], в которых рассматривалась модель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой теории в уравнении движения пренебрегается силой инерции. В результате отфильтровываются инерциальные, альфвеновские волны и волны Россби. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость $\mathbf{v}$ находится неоднозначно, а с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей привлекаются вязкие силы и пренебрегается вязкостью, когда это допустимо.

В работе [8] исследовалась задача о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости в слое между плоскостями $z = 0, z = d$ в магнитострофическом приближении с учетом вязких сил.

В данном исследовании предполагается, что границы слоя не являются постоянными, а представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени; кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

1. Динамика тонкого вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости

Рассмотрим тонкий вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ слой электропроводной несжимаемой жидкости, ограниченный снизу подвижным дном, заданным относительно отсчетного уровня $z = 0$ поверхностью $z = -h_B(x, y, t)$, с неизвестной функцией $h_B(x, y, t)$, а сверху — известной поверхностью $-Z(x, y)$. Ось вращения жидкости совпадает с осью z, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$.

1.1. Основные уравнения горизонтальной структуры электропроводной вращающейся жидкости

Основные уравнения магнитной гидродинамики рассматриваемой задачи в проекциях на координатные оси имеют вид [1], [2]

$$\frac{dv_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) + 2\omega v_y + \frac{1}{\rho}\left(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\frac{dv_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - 2\omega v_x + \frac{1}{\rho}\left(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \tag{2}$$

$$\frac{dv_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - g + \frac{1}{\rho}\left(b_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \lambda\Delta b_x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = \lambda\Delta b_y, \tag{5}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = \lambda\Delta b_z, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости жидкости, p — давление, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, b_x, b_y, b_z — компоненты магнитной индукции поля, $\lambda = \dfrac{1}{\sigma\mu}$, μ — магнитная проницаемость, σ — электропроводность среды, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли.

Граничными условиями для данной системы являются условия непротекания сквозь твердые границы и фиксация гидродинамического давления на верхней поверхности, а также фиксация величины магнитного поля на обеих поверхностях.

Введем в рассмотрение характерные масштабы изменения переменных в уравнениях (1)–(7): D — движения в вертикальном направлении (предполагается, что значение D равно средней глубине слоя жидкости $h_B(x, y, t) - Z(x, y)$), L — движения в горизонтальном направлении, U — горизонтальной компоненты скорости, B — горизонтальных компонент поля, H — вертикальной компоненты поля, T — временной и P — поля давления.

Для рассматриваемой задачи естественно предположение, что

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1.$$

Кроме того, в уравнении неразрывности (7) первое и второе слагаемые имеют порядок $O\left(\dfrac{U}{L}\right)$, поэтому порядок третьего слагаемого $O\left(\dfrac{W}{D}\right)$ не больше $O\left(\dfrac{U}{L}\right)$. Следовательно,

$$W \le O(\delta U).$$

Аналогично, оценивая порядки слагаемых уравнения соленоидальности (7), получим

$$H \le O(\delta B).$$

Оценивая, далее, слагаемые в уравнениях (1)–(6), перейдем в этих уравнениях к безразмерным переменным. В результате получим

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho L}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) + 2\omega U v_y + \frac{B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\right), \tag{8}$$

$$\frac{U}{T}\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho L}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - 2\omega U v_x + \frac{B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\delta U}{T}\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\delta U^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho D}\left(P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{b^2}{2\mu}\right) - g + \frac{\delta B^2}{L\mu\rho}\left(b_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\right), \tag{10}$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_x}{\partial t} + \frac{UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \frac{\lambda B}{L^2}\Delta b_x, \tag{11}$$

$$\frac{B}{T}\frac{\partial b_y}{\partial t} + \frac{UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \frac{\lambda B}{L^2}\Delta b_y, \tag{12}$$

$$\frac{\delta B}{T}\frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{\delta UB}{L}\left(v_x\frac{\partial b_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial b_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial b_z}{\partial z} - b_x\frac{\partial v_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial v_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \frac{\lambda B}{L^2}\Delta b_z. \tag{13}$$

Здесь и далее безразмерные переменные имеют прежние соответствующие обозначения.

В уравнениях (8) и (9) все слагаемые одного порядка, если динамическое, магнитное и кинетическое давления имеют один порядок: $P \sim \dfrac{B^2}{\mu} \sim \rho U^2 \sim \dfrac{\rho U}{T}$. В этом случае уравнения (1) и (2) без изменения используются для дальнейшего исследования.

Отношение конвективного члена в уравнениях индукции (11) и (13) к диффузионному члену, выраженное через характерную скорость жидкости U и характерную длину L, является безразмерным параметром $\dfrac{LU}{\lambda}$, который называют магнитным числом Рейнольдса. Оно характеризует связь потока плазмы и магнитного поля. В лабораторных условиях обычно $R_m \ll 1$, и эта связь является слабой, тогда как в астрофизике, как правило $R_m \gg 1$, и эта связь сильная. Уравнение индукции определяет поведение магнитного поля, если известна скорость, и это поведение существенным образом зависит от величины магнитного числа Рейнольдса R_m. В общем случае магнитные силовые линии частично переносятся потоком плазмы и частично диффундируют через нее.

Далее именно этот общий случай и будем рассматривать. Таким образом, примем $R_m = 1$, будем считать, что диффузионные члены имеют тот же порядок, что и конвективные.

Учет диффузионных членов необходим при изучении динамики волн более локального характера, т.е., когда L много меньше радиуса слоя, а также при очень великих масштабах времени T. Хотелось бы увидеть влияние диффузии магнитного поля на его генерацию. Сможет ли существовать такое поле сколь угодно длительное время, и будет ли оно существовать при отключении затравочного поля.

На поверхности $z = -h_B$ функция b_z удовлетворяет условию

$$b_z(x, y, -h_B, t) = b_{z0}(x, y, t),$$

Краевое условие для b_z на поверхности $z = -Z(x, y)$ имеет вид

$$b_z(x, y, -Z, t) = b_{z0}^{(e)}(x, y, t).$$

Таким образом, вследствие условия $\delta \ll 1$ получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega v_y + g \frac{\partial h_B}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2\omega v_x + g \frac{\partial h_B}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho} \left(b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} \right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial h_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h_B - Z) v_x] + \frac{\partial}{\partial y} [(h_B - Z) v_y] = 0, \tag{16}$$

$$(h_B - Z) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_x, \tag{18}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial y_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_y, \tag{19}$$

в которой, в сравнении с системой (1)–(7) меньшее число динамических уравнений, искомых функций (за счет исключения v_z и b_z из уравнений исходной системы) и независимых переменных (так как z не входит больше в явном виде в динамические уравнения). Искомые переменные v_x, v_y, b_x, b_y, h_B являются функциями только x, y, t. В уравнениях (18) и (19) $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. В дальнейшем изложении индекс у двумерного оператора Лапласа опускается.

К уравнениям (14)–(19) добавляются граничные условия непротекания через вертикальные границы рассматриваемой области и задание магнитного поля на них:

$$v_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + v_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) = 0, \tag{20}$$
$$b_x = b_x^{(L)}, \qquad b_y = b_y^{(L)}, \qquad (x, y) \in L,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к горизонтальному сечению границы области.

1.2. Малые возмущения

Введем функцию полной глубины $H = h_B - Z$. Пусть толщина жидкого слоя в состоянии покоя равна $H_0(x, y)$. Представим функцию $H(x, y, t)$ в виде

$$H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x, y, t), \tag{21}$$

где $\eta(x, y, t)$ — малое возмущение, характеризуемое неравенством $\eta \ll H_0$.

Для описания распространения малых возмущений применим стандартный в механике сплошных сред метод линеаризации системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение среды. Будем искать решение системы (14)–(19) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, y, t), \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x, y, t), \tag{22}$$

предполагая, что малые возмущения горизонтальной скорости $\mathbf{v}'$, горизонтального магнитного поля $\mathbf{b}'$ распространяются по некоторому стационарному однородному фону, описываемому постоянными величинами $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{b}_0$. Рассмотрим случай $\mathbf{v}_0 = 0$.

Подставив (21) и (22) в уравнения (14)–(19) и сохранив члены только первого порядка малости по $\mathbf{v}'$, $\mathbf{b}'$, η, получим систему уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y = g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho}\mathcal{D}b_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x = g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}\mathcal{D}b_y, \quad \frac{\partial b_x}{\partial t} = \mathcal{D}v_x + \frac{1}{R_m}\Delta b_x, \tag{23}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = \mathcal{D}v_y + \frac{1}{R_m}\Delta b_y, \qquad H_0\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}\right) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0, \tag{24}$$

где

$$\alpha = 2\omega, \qquad\qquad \mathcal{D} = b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y} \text{ —}$$

дифференциальный оператор. Введем в рассмотрение функции $\widetilde{\eta}(x, y, t)$, $\widetilde{b}_x(x, y, t)$, $\widetilde{b}_y(x, y, t)$, определяемые равенствами

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g}\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\widetilde{\eta}(x, y, t), \tag{25}$$

$$b_x(x, y, t) = \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\widetilde{b}_x(x, y, t), \tag{26}$$

$$b_y(x, y, t) = \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\widetilde{b}_y(x, y, t), \qquad\qquad \mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{27}$$

Заметим, что соотношениями (25)–(27) функции η, b_x, b_y определяются неоднозначно: если функция $\eta_0(x, y, t)$ удовлетворяет соотношению (25), то, очевидно, соотношению (25) удовлетворяет и функция вида

$$\widetilde{\eta} = \eta_0(x, y, t) + \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)\cos\alpha t + \eta_3(x, y)\sin\alpha t, \tag{28}$$

где $\eta_j(x, y), j = 1, 2, 3,$ — произвольные функции.

Аналогично, в (26) и (27) функции $\widetilde{b}_x$ и $\widetilde{b}_y$ представимы в виде

$$\widetilde{b}_x = b_x^{(0)}(x, y, t) + b_x^{(1)}(x, y) + b_x^{(2)}(x, y)\cos\alpha t + b_x^{(3)}(x, y)\sin\alpha t, \tag{29}$$

$$\widetilde{b}_y = b_y^{(0)}(x, y, t) + b_y^{(1)}(x, y) + b_y^{(2)}(x, y)\cos\alpha t + b_y^{(3)}(x, y)\sin\alpha t, \tag{30}$$

где $b_x^{(j)}, b_y^{(j)}, j = 1, 2, 3$ — произвольные функции своих аргументов в рассматриваемой области.

Подставив функции η, b_x, b_y из (25)–(27) в уравнения (23) и проинтегрировав результат по t, получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \mathcal{D}_t \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{0x} \\ \eta_{0y} \end{pmatrix} + \left[C_1(x,y) - \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) - \alpha^2 \left(\frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial b_x^{(3)}}{\partial y} \right) - \right.$$
$$\left. -\alpha^2 \left(\frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial b_y^{(3)}}{\partial y} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos\alpha t \\ -\sin\alpha t \end{pmatrix} + \left[C_2(x,y) - \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) - \alpha^2 \left(\frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial b_x^{(3)}}{\partial x} \right) - \right.$$
$$\left. -\alpha^2 \left(\frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial b_y^{(3)}}{\partial x} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin\alpha t \\ \cos\alpha t \end{pmatrix} + \mathcal{D}\mathcal{D}_t \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x^{(0)} \\ b_y^{(0)} \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{C}(x,y) = (C_2(x,y), -C_1(x,y), 0) \in \mathcal{H}_2(\Omega)$, $C_j(x,y) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $j = 1, 2$. Воспользуемся следующей леммой [4].

Лемма. Для любого вектора $\mathbf{C}(x,y) \in \mathcal{H}_2(\Omega)$ найдутся функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, такие, что $\mathbf{C} = (\varphi_x + \psi_y, \varphi_y - \psi_x, 0)$, где $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$, $\psi_x(x,y)$, $\psi_y(x,y)$ — обобщенные частные производные функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.

Доказательство леммы приведено в [4]. Используя лемму и полагая в (31)

$$\left(\eta_2 + b_x^{(2)} + b_y^{(2)}\right)(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{\alpha^2}, \qquad \left(\eta_3 + b_x^{(3)} + b_y^{(3)}\right)(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\alpha^2},$$

получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \mathcal{D}_t \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\eta}_x \\ \widetilde{\eta}_y \end{pmatrix} + \mathcal{D}\mathcal{D}_t \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{b}_x \\ \widetilde{b}_y \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Введем в рассмотрение функцию $\xi(x,y,t)$, определяемую равенством

$$\eta(x,y,t) = \left(\mathcal{F}^2 + (\alpha\mathcal{D}^2)^2\right)\xi(x,y,t), \qquad \mathcal{F} = \mu\rho\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right) - \mathcal{D}^2\mathcal{D}_t. \qquad (33)$$

Проинтегрировав далее уравнения (24) с учетом (32), получим уравнение для функции $\xi(x,y,t)$:

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)^2 \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}. \qquad (34)$$

На основании изложенного приходим к следующему выводу.

Утверждение. Любое решение $\mathbf{v}(x,y,t)$, $\mathbf{b}(x,y,t)$, $\eta(x,y,t)$ задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\mathbf{b}(x,y,t) = \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\widetilde{\mathbf{b}}, \qquad \eta = \frac{1}{g}\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\widetilde{\eta}, \qquad \widetilde{\widetilde{\eta}} = \mathcal{D}_t\widetilde{\eta}, \qquad \widetilde{\widetilde{\mathbf{b}}} = \mathcal{D}_t\widetilde{\mathbf{b}}, \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & \alpha \\ -\alpha & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{\eta}}_{\mathbf{x}} + \mathcal{D}\widetilde{\widetilde{b}}_x \\ \widetilde{\widetilde{\eta}}_{\mathbf{y}} + \mathcal{D}\widetilde{\widetilde{b}}_y \end{pmatrix}, \qquad (36)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{b}}_x \\ \widetilde{\widetilde{b}}_y \end{pmatrix} = \mathcal{D}\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right) \begin{pmatrix} \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2 & \alpha\mu\rho\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) \\ -\alpha\mu\rho\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) & \mu\rho\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \qquad (37)$$

$$\widetilde{\widetilde{\eta}}(x,y,t) = \left(\mathcal{F}^2 + (\alpha\mathcal{D}^2)^2\right)\xi(x,y,t), \qquad \mathcal{F} = \mu\rho\left(\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2\right)\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{R_m}\right) - \mathcal{D}^2\mathcal{D}_t, \tag{38}$$

где функция $\xi(x,y,t)$ является решением уравнения (34).

Замечание. Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (34) порождает решение системы, моделирующей малые возмущения в тонком слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, если построенные по формулам (35)–(38) функции $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$, η удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

Для удобства дальнейших исследований уравнение (34) запишем в виде

$$\left(b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^6}{\partial t^6} + 2\alpha^2\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \alpha^4\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{R_m}\frac{\partial^5}{\partial t^5} - 2\alpha^2\frac{\Delta}{R_m}\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \alpha^4\frac{\Delta}{R_m}\frac{\partial}{\partial}\right)\Delta\xi -$$
$$-\frac{\left(b_{0x}\dfrac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3}{\mu\rho}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^4\right)\Delta_2\xi = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}. \tag{39}$$

2. Волны в прямолинейном слое и канале переменной глубины

Рассмотрим свободные линейные колебания вращающегося слоя электропроводной жидкости. А именно, исследуем распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале.

Направляя ось Oy параллельно $\mathbf{b}_0$, уравнение (39) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_m}\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2} - \frac{b_{0y}^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]A\zeta = \frac{b_{z0}(x,y,t) - b_{z0}^{(e)}(x,y,t)}{b_{0y}(\mu\rho)^2 H_0(x,y)}, \tag{40}$$

решение которого

$$\zeta(x,y,t) = (C_1(x,y) + C_2(x,y)t)\cos\alpha t + (C_3(x,y) + C_4(x,y)t)\sin\alpha t +$$
$$+\left(\widetilde{C}_1(x,y,t) + \widetilde{C}_2(x,y,t)t\right)\cos\alpha t + \left(\widetilde{C}_3(x,y,t) + \widetilde{C}_4(x,y,t)t\right)\sin\alpha t,$$
$$\widetilde{C}_1 = \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t_0}^{t}(\alpha t\cos\alpha t - \sin\alpha t)S\,dt, \qquad \widetilde{C}_2 = -\frac{1}{2\alpha^2}\int_{t_0}^{t}S\cos\alpha t\,dt,$$
$$\widetilde{C}_3 = \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t_0}^{t}(\cos\alpha t + \alpha t\sin\alpha t)S\,dt, \qquad \widetilde{C}_4 = -\frac{1}{2\alpha^2}\int_{t_0}^{t}S\sin\alpha t\,dt.$$

Произвольные функции C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничного условия.

Пусть $H_0 = \mathrm{const}$ и $b_{z0} - b_{z0}^{(e)} = \mathrm{Re}\ Be^{i(kx+ly-\sigma t)}$. Тогда уравнение (39) имеет решение

$$\zeta = \mathrm{Re}\ Ae^{i(kx+ly-\sigma t)},$$

если выполняется дисперсионное соотношение

$$\left(\sigma^2 - \alpha^2\right)^2\left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i\frac{(k^2+l^2)}{R_m}\sigma\right)\left(k^2 + l^2\right)(b_{0x}k + b_{0y}l) = \frac{B}{Ai(\mu\rho)^2 H_0}. \tag{41}$$

В частности, при $b_{z0} = b_{z0}^{(e)}$ из (41) имеем

$$\left(\sigma^2 - \alpha^2\right)^2 \left(\sigma^2 - \frac{(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} + i\frac{(k^2 + l^2}{R_m}\sigma\right) = 0,$$

откуда

$$\sigma = \pm\alpha, \qquad \sigma = \pm\sqrt{\frac{4(b_{0x}k + b_{0y}l)^2}{\mu\rho} - \frac{(k^2+l^2)^2}{R_m^2}} - i\frac{(k^2+l^2)}{2R_m}.$$

Для частоты σ имеются две четко разделяющиеся ветви. Первый тип колебаний — инерционная волна. В них существенную роль играют инерция и кориолисова сила. Частота инерционных волн вещественна, эти волны устойчивы. Второй тип колебаний — магнитные волны. Их частота — комплексна. Но в силу того, что мнимая часть частоты σ отрицательная, магнитные волны неустойчивость также не обнаруживают.

Заметим, что при $\mathbf{b}_0 = 0$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{(k^2+l^2)^2}{4R_m^2}} - i\frac{(k^2+l^2)^2}{2R_m^2} = \pm i\frac{(k^2+l^2)^2}{2R_m^2} - i\frac{(k^2+l^2)^2}{2R_m^2} = -i\frac{(k^2+l^2)^2}{R_m^2},$$

$$\zeta = \Re e A \exp i(kx + ly + i\frac{(k^2+l^2)}{R_m}t) = A\exp - \frac{(k^2+l^2)}{R_m}t\cos(kx+ly).$$

Таким образом, диффузия магнитного поля способствует его затуханию, в то время как в случае вмороженного поля наблюдается установившийся во времени процесс, т.е. индуцированное магнитное поле может существовать сколь угодно длительное время.

В частности, при $R_m \to \infty$ получаем известное дисперсионное соотношение для волны Альфвена

$$\sigma = \pm\frac{kb_{0x} + lb_{0y}}{\sqrt{\mu\rho}}.$$

Список литературы

[1] *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008.Т. 48, № 5, С. 882-898.

[2] *Холодова С.Е., Перегудин С.И.* Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. — СПб.: Изд–во СПбГУ, 2009 г. — 455 с.

[3] *Перегудин С.И., Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010.Т. 50, № 11, С. 1-15.

[4] *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990. — 344 с.

[5] *Busse F.H.* A model of the geodynamo. // Geophys. J. Roy. Asron. Soc., 42, 437–459, 1975.

[6] *Zhang K.–K., Busse F.H.* Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number. // Phys. Earth Planet. Inter., 59, 208–222, 1990.

[7] *Fearn D.R.* Thermal and magnetically driven instabilities in a rapidly rotating fluid sphere. // Geophys. Asrophys. Fluid Dyn., 14, 103–126, 1979.

[8] *Fearn D.R., Proctor M.R.* Hydromagnetic waves in a differentially rotating sphere. // J. Fluid Mech., 128, 1–20, 1983.