Исследование краевой задачи для одной гибридной системы дифференциальных уравнений *

А.Д.Мижидон
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
e-mail: miarsdu@mail.ru

С.Г.Баргуев

В работе рассматривается краевая задача для одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений. Такого класса гибридная система дифференциальных уравнений имеет место при описании динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью пружин твердыми телами. В качестве теоретических основ исследования предлагается единый подход к построению частотных уравнений таких систем.

1. Постановка задачи

При исследовании механических колебаний элементов различных конструкций, деталей и механизмов во многих случаях расчетными схемами исследования является твердое тело (или система твердых тел) соединенное упругими связями со стержнем [1-6]. Для вывода уравнений движения систем используется вариационный принцип Гамильтона, который справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Полученные на основании принципа Гамильтона, уравнения движений таких механических систем являются гибридными системами дифференциальных уравнений. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Рассмотрим гибридную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A\ddot{z}(t) + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0 \\ k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) = \sum\limits_{\imath=1}^{m} q_\imath (d^{\imath'} z(t) - u(x,t))\delta(x - a_\imath), \end{cases} \tag{1}$$

где $z(t)$ – n-мерная вектор-функция; $u(x,t)$ – скалярная функция; $\bar{u}(t)$ – m-мерная вектор-функция с компонентами $u(a_1,t),\ldots,u(a_m,t)$; A, B – заданные, постоянные $n \times n$-матрицы; C – заданная, постоянная $n \times m$-матрица; D – заданная, постоянная $m \times n$-матрица; $d^\imath$ – n-мерный вектор, составленный из строк матрицы D; $k, b, a_\imath, q_\imath$ – заданные постоянные, причем $0 \le a_\imath \le l$; штрих $()'$ – здесь и ниже операция транспонирования.

На функцию $u(x,t)$ наложены граничные условия, соответствующие условиям, накладываемым на правый и левый конец стержня. В случае жесткой заделки эти граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00309-а).

Отметим, система (1)-(2) является общей математической моделью механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями.

Введем понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющей краевым условиям (2).

Для этого рассмотрим множество вектор-функций

$$K = \{(y(\cdot), \nu(\cdot,\cdot)) : y(\cdot) \in \mathbf{C}^n_{\infty,[0,T]}, \nu(\cdot,\cdot) \in \mathbf{C}^2_{\infty,D}\}, \tag{3}$$

где $D = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ – прямоугольник.

Потребуем, чтобы любая вектор-функция из множества функций K удовлетворяла условиям

$$\begin{gathered} y(0) = y(T) = 0, \\ \nu(x,0) = \nu(x,T) = 0, \\ \nu(0,t) = \nu(l,t) = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \nu}{\partial x}(l,t) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Введенные вектор-функции назовем основными.

Определение 1. *Вектор-функцию* $z(\cdot) \in \mathbf{C}^n_{2,[0,T]}$ *, скалярную функцию* $u(\cdot,\cdot) \in \mathbf{C}^2_{4,2,D}$ *назовем обобщенным решением краевой задачи (1)-(2), если для любой основной вектор-функции* $(y(\cdot), \nu(\cdot,\cdot)) \in K$ *имеет место тождество*

$$\int\limits_0^T (A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}), y(t))dt +$$
$$+ \iint\limits_D \left(k\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\tfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \sum_{\imath=1}^m q_\imath (d^{\imath'} z(t) - u(x,t))\delta(x - a_\imath) \right) \nu(x,t)dxdt = 0.$$

2. Вспомогательная краевая задача

Подставив в систему (1) $z(t)$, $u(x,t)$ в виде

$$z(t) = Z\sin\omega t, \quad u(x,t) = V(x)\sin\omega t$$

где ω – собственная частота, Z – n-мерный вектор амплитуд колебаний масс, $V(x)$ – амплитуда колебаний точек упругого стержня, после преобразований получим

$$(-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \tag{5}$$

$$-\omega^2 kV(x) + b\frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} = \sum_{\imath=1}^m q_\imath (d^{\imath'} Z - V(x))\delta(x - a_\imath) \tag{6}$$

где $\bar{V}$ – m-мерный вектор с компонентами $V(a_1, \ldots, V(a_m))$.

В силу граничных условий (2) функция $V(x)$ должна удовлетворять условиям

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0) = \frac{\partial V}{\partial x}(l) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу (6)-(7).

Определение 2. *Скалярную функцию $V(\cdot) \in \mathbf{C}_{4,[0,T]}$ назовем обобщенным решением краевой задачи (6)-(7), если для любой компоненты $\nu(\cdot,\cdot)$ основной вектор-функции $(y(\cdot),\nu(\cdot,\cdot)) \in K$ имеет место тождество при любом $t \in [0,T]$*

$$\int\limits_0^l \left(-\omega^2 kV(x) + b\frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} - \sum_{\imath=1}^m q_\imath(d^{\imath'} Z - V(x))\delta(x-a_\imath) \right) \nu(x,t)dx = 0.$$

Теорема 1. *При любых значениях ω и Z функция*

$$V(x) = \sum_{\imath=1}^m G_\imath(x-a_\imath) q_\imath(d^{\imath'} Z - V(a_\imath)) \tag{8}$$

является обобщенным решением краевой задачи (6)-(7), где функции $G_\imath(x)$, $(\imath = 1,\ldots,m)$ обобщенные решения уравнения

$$-\omega^2 k G_\imath(x) + b\frac{\partial^4 G_\imath(x)}{\partial x^4} = \delta(x), \quad (\imath = 1,\ldots,n), \tag{9}$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{cases} G_\imath(-a_\imath) = G_\imath(l-a_\imath), \\ \frac{\partial G_\imath}{\partial x}(-a_\imath) = \frac{\partial G_\imath}{\partial x}(l-a_\imath), \quad (\imath = 1,\ldots,m) \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Для функции (8) справедливость выполнения краевых условий (7) непосредственно следует из краевых условий (10) для функций $G_\imath(x)$, $(\imath = 1,\ldots,m)$.

В том, что (8) является решением уравнения (6) убедимся непосредственной подстановкой (8) в исходное уравнение (6).

Для этого представим (8) в виде

$$V(x) = \sum_{\imath=1}^m \int\limits_0^l G_\imath(x-\xi) q_\imath(d^{\imath'} Z - V(\xi))\delta(\xi - a_\imath)d\xi. \tag{11}$$

Подставим (11), в левую часть уравнения (6), умножив на $\nu(x,t)$ из класса основных функций, проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Далее меняя порядок интегрирования и учитывая (9), получим

$$\int\limits_0^l \left\{ \int\limits_0^l \sum_{\imath=1}^m \left[\left(-k\omega^2 G_\imath(x-\xi) + b\tfrac{\partial^4 G_\imath(x-\xi)}{\partial x^4} \right) q_\imath(d^{\imath'} Z - V(\xi))\delta(\xi-a_\imath) \right] d\xi \right\} \cdot \nu(x,t)dx =$$
$$= \sum_{\imath=1}^m \int\limits_0^l \left[q_\imath(d^{\imath'} Z - V(\xi))\delta(\xi-a_\imath) \cdot \int\limits_0^l \left(-k\omega^2 G_\imath(x-\xi) + b\tfrac{\partial^4 G_\imath(x-\xi)}{\partial x^4} \right) \nu(x,t)dx \right] d\xi =$$
$$= \sum_{\imath=1}^m \int\limits_0^l \left[q_\imath(d^{\imath'} Z - V(\xi))\delta(\xi-a_\imath) \cdot \int\limits_0^l \nu(x,t)\delta(x-\xi)dx \right] d\xi =$$
$$= \sum_{\imath=1}^m \int\limits_0^l \left[q_\imath(d^{\imath'} Z - V(\xi))\nu(\xi,t)\delta(\xi-a_\imath) \right] d\xi = \sum_{\imath=1}^m \left[q_\imath(d^{\imath'} Z - V(a_\imath))\nu(a_\imath,t) \right].$$

Аналогично, подставив (11) в правую часть уравнения (6), после преобразований получим

$$\int\limits_0^l \left[\sum_{\imath=1}^m q_\imath(d^{\imath'}Z - V(x))\delta(x-a_\imath)\right]\nu(x,t)dx =$$
$$= \sum_{\imath=1}^m \int\limits_0^l q_\imath(d^{\imath'}Z - V(x))\delta(x-a_\imath)\nu(x,t)dx = \sum_{\imath=1}^m \left[q_\imath(d^{\imath'}Z - V(a_\imath))\nu(a_\imath,t)\right],$$

то есть в результате проделанных преобразований, левая и правая части исходного уравнения тождественно совпадают. Таким образом, выражение (8) является решением уравнения (9) в обобщенном смысле.Теорема доказана.

Для нахождения функций $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_m(x)$ входящих в (8) имеем m краевых задач для уравнения

$$-\omega^2 kG(x) + b\frac{\partial^4 G(x)}{\partial x^4} = \delta(x), \tag{12}$$

с условиями (10).

Общее решение $G(x)$ уравнения (12) можно найти в виде суммы общего обобщенного решения $G_0(x)$ однородного уравнения

$$-\omega^2 kG(x) + b\frac{\partial^4 G(x)}{\partial x^4} = 0, \tag{13}$$

и некоторого обобщенного решения $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (12), то есть

$$G(x) = G_0(x) + \tilde{G}(x) \tag{14}$$

Общее решение $G_0(x)$ однородного уравнения (13) можно записать в виде

$$G_0(x) = c_1S_1(\beta x) + c_2S_2(\beta x) + c_3S_3(\beta x) + c_4S_4(\beta x),$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные; $S_1(\beta x), S_2(\beta x), S_3(\beta x), S_4(\beta x)$ – функции Крылова, которые определяются следующим образом

$$S_1(\beta x) = \frac{\mathrm{ch}(\beta x) + \cos(\beta x)}{2}, \quad S_2(\beta x) = \frac{\mathrm{sh}(\beta x) + \sin(\beta x)}{2},$$
$$S_3(\beta x) = \frac{\mathrm{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)}{2}, \quad S_4(\beta x) = \frac{\mathrm{sh}(\beta x) - \sin(\beta x)}{2}.$$

Здесь $\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 k}{b}}$. Отметим, что выражение для обобщенного решения $G_0(x)$ совпадает с классическим решением.

Частное обобщенное решение $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (12) можно определить в виде [6]

$$\tilde{G}(x) = \theta(x)\frac{kS_4(\beta x)}{b\beta^3}, \tag{15}$$

где $\theta(x)$ – функция, определяемая следующим образом

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. Частотные уравнения

Для нахождения функций $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_m(x)$, согласно представлению (14), определим произвольные константы $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3, \mathrm{c}_4$ из условий выполнения соответствующих граничных условий.

Далее, принимая в (8) последовательно значения $x = a_1$, $x = a_2$, …, $x = a_m$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_1), V(a_2), \ldots, V(a_m)$

$$(1 + G_\jmath(0)q_\jmath V(a_\jmath) + \sum_{\substack{\imath=1,\\ \imath\neq\jmath}}^{m} G_\imath(a_\jmath - a_\imath)q_\imath V(a_\imath)) = \sum_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_\jmath - a_\imath)q_\imath d^{\imath'} Z, \quad (\jmath = 1, \ldots, m). \tag{16}$$

Используя матричные обозначения, систему (16) можно записать в виде

$$M\overline{V} = NZ,$$

где M – матрица системы размерности $m \times m$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \ldots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \ldots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \ldots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

N – матрица размерности $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_1 - a_\imath)q_\imath d_1^\imath & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_1 - a_\imath)q_\imath d_2^\imath & \ldots & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_1 - a_\imath)q_\imath d_n^\imath \\ \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_2 - a_\imath)q_\imath d_1^\imath & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_2 - a_\imath)q_\imath d_2^\imath & \ldots & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_2 - a_\imath)q_\imath d_n^\imath \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_m - a_\imath)q_\imath d_1^\imath & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_m - a_\imath)q_\imath d_2^\imath & \ldots & \sum\limits_{\imath=1}^{m} G_\imath(a_m - a_\imath)q_\imath d_n^\imath \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение линейной системы алгебраических уравнений (16), представим в виде

$$\overline{V} = M^{-1}NZ \tag{17}$$

Подставив (17) в систему (5), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд Z

$$(-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N)Z = 0 \tag{18}$$

Система (18) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (18) к нулю, получим уравнение собственных частот

$$\det\{-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N\} = 0 \tag{19}$$

Отметим, уравнение собственных частот (19) является трансцендентным, содержащим периодические тригонометрические функции, а также монотонные гиперболические функции, в силу чего появляется бесконечный дискретный набор собственных частот.

4. Сравнительный анализ, предложенного подхода

Для примера, рассмотрим механическую систему, состоящую из массы m, установленной с помощью двух пружин жесткости c_1 и c_2 на упругом стержне длины l. Масса m может перемещаться поступательно в направлении оси O_1z и совершать угловые отклонения ϕ. Перемещение точек стержня описывается функцией $u(x,t)$.

Полученные на основании принципа Гамильтона, для этой механической системы уравнения движений имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c_1(z - d_1\phi - u(a_1,t)) + c_2(z + d_2\phi - u(a_2,t)) = 0, \\ J_\phi\ddot{\phi} - c_1d_1(z - d_1\phi - u(a_1,t)) + c_2d_2(z + d_2\phi - u(a_2,t)) = 0, \\ \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1(z - d_1\phi - u(x,t))\delta(x-a_1) + c_2(z + d_2\phi - u(x,t))\delta(x-a_2), \end{cases} \tag{20}$$

где J_ϕ – момент инерции твердого тела относительно центра масс при повороте на угол ϕ; d_1 – расстояние от центра масс до оси пружины, закрепленной в точке a_1; d_2 – расстояние от центра масс до оси пружины, закрепленной в точке a_2; ρ – плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения; E – модуль упругости стержня; J – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Система гибридных дифференциальных уравнений (20) принадлежит общему, рассмотренному выше классу систем уравнений (1).

Применение предложенного подхода для построения частотного уравнения механической системы, описываемой уравнениями (20) привело к уравнению вида

$$\begin{aligned} &(-m\omega^2 + c_1 + c_2 - \alpha c_1 - \mu c_2)(-J_\phi\omega^2 + c_1d_1^2 + c_2d_2^2 + c_1d_1\gamma - c_2d_2\nu) = \\ &= (-c_1d_1 + c_2d_2 + c_1d_1\alpha - c_2d_2\mu)(-J_\phi\omega^2 + c_1d_1^2 + c_2d_2^2 + c_1d_1\gamma - c_2d_2\nu), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\alpha = \frac{\mu_1\beta_2 - \mu_2\beta_1}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{\nu_1\beta_2 - \nu_2\beta_1}{\Delta}, \quad \mu = \frac{\alpha_1\mu_2 - \alpha_2\mu_1}{\Delta}, \quad \nu = \frac{\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_1}{\Delta},$$
$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \alpha_1 = 1 + e_1G_1(0), \quad \alpha_2 = e_1G_1(a_2 - a_1),$$
$$\beta_1 = e_2G_2(a_1 - a_2), \quad \beta_2 = 1 + e_2G_2(0),$$
$$\mu_1 = E_1G_1(0) + e_2G_2(a_1 - a_2), \quad \mu_2 = E_1G_1(a_2 - a_1) + e_2G_2(0),$$
$$\nu_1 = -e_1d_1G_1(0) + e_2d_2G_2(a_1 - a_2), \quad \nu_2 = -e_1d_1G_1(a_2 - a_1) + e_2d_2G_2(0),$$
$$e_1 = \frac{c_1}{\rho F}, \quad e_2 = \frac{c_2}{\rho F}.$$

Для проведения сравнительного анализа, с целью проверки адекватности предлагаемой методики получения собственных частот, был произведен расчет собственных частот согласно уравнению (21). Для этого были взяты данные из работы [7], в которой для получения собственных частот автором был использован метод допускаемых мод или форм, разработанный в [8]. Полученные им результаты сравнивались с результатами, полученными в работе [9], где авторы использовали аналитико-численно-комбинированный метод (АЧКМ) и метод конечных элементов (МКЭ).

Данные для стержня: модуль упругости $E = 2,069 \times 10^{11} N \cdot m^{-2}$, плотность материала стержня $\rho = 15,3875 kg \cdot m^{-1}$, момент инерции поперечного сечения $J = 3,0679 \times$

$10^{-7}m^4$, длина $l = 1,0m$. Для упруго присоединенной упругой системы: масса твердого тела $m = 1,53875kg$, момент инерции твердого тела относительно центра масс $J_\phi = 1,53875kg \cdot m^2$, жесткость пружин $c_1 = c_2 = 6,34761 \times 10^6 N \cdot m^{-1}$, координаты точек крепления пружин a_1, a_2 соответственно, расстояния от точек крепления пружин до центра масс $d_1 = 0,06667m$, $d_2 = 0,13333m$ соответственно.

В таблице приведены результаты проведенного расчета согласно уравнению частот (23), а также результаты расчета тремя методами, приведенных в [7]. Из таблицы видно хорошее совпадение полученных результатов.

$\omega_\imath, rad \cdot s^{-1}$	АЧКМ	МКЭ	Подход Philip D.Cha [7]	Предлагаемый подход
ω_1	273,8904	273,8565	273,8892	273,8564
ω_2	1388,6244	1388,5937	1388,6073	1388,5914
ω_3	2880,5511	2879,7694	2880,0323	2879,7628
ω_4	4222,2172	4221,9181	4221,9610	4221,8472
ω_5	7837,1068	7837,4548	7836,9696,	7836,9522

5. Заключение

Предложен единый подход к построению частотных уравнений для одного класса динамических систем, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является общей математической моделью механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями. Сравнительный анализ численных расчетов, проведенных предложенным методом с расчетами проведенными другими способами, известными из литературы, показал достоверность и универсальность предлагаемого подхода.

Список литературы

[1] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О вынужденных колебаниях механической системы установленной на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2004. № 1. С. 32–34.

[2] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Лебедева Н.В. К исследованию виброзащитной системы с упругим основанием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 2(22). С. 13–203.

[3] Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании //Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика и информатика. 2009. № 9. С. 58–66.

[4] Баргуев С.Г., Елтошкина Е.В., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. Исследование возможности гашения колебаний масс, установленных на упругом стержне //Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 4(28). С. 78–84.

[5] Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. О пределах применимости классической схемы расчета собственных частот в виброзащитной системе с двумя защищаемыми объектами //Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика и информатика. 2010. С. 135–144.

[6] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа, установленной на упругом стержне //Вестник Восточно-Сибирского государственного технологического университета. 2010. № 1 С. 26-33.

[7] Philip D.Cha Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems // Journal of Sound and Vibration. 2007. № 307. С. 386–392.

[8] L. Meirovitch Fundamental of Vibrations// McGraw-Hill Companies. New York. 2001.

[9] 9. J.-J. Wu, A.R. Whittaker The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems // Journal of Sound and Vibration. 1999. № 227. С. 361–381.