Нелинейно–дисперсионные модели на вращающейся сфере: новый вывод и законы сохранения*

З.И. Федотова, Г.С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

Дан вывод нелинейно–дисперсионных уравнений мелкой воды на сфере, не использующий предположение о потенциальности течения. Выведены уравнения типа Буссинеска, для которых выполнен баланс энергии.

Введение

В работе [1] на основе масштабирования 3D-уравнений гидродинамики на вращающейся сфере получена нелинейно–дисперсионная (НЛД) модель на сфере. При выводе было использовано условие потенциальности течения. В [2] для случая плоской геометрии показано, что НЛД-уравнения можно получить без предположения о потенциальности течения, введя условие независимости главной части горизонтальной составляющей вектора скорости от вертикальной координаты.

В настоящей работе аналогичный результат получен в сферической геометрии. Для НЛД-модели на вращающейся сфере выписаны уравнения баланса импульса и энергии. Выведена модель типа Буссинеска, для которой имеет место баланс энергии.

1. Уравнения Эйлера на сфере.

Рассмотрим систему координат $O\lambda\theta r$, привязанную к центру сферы, вращающейся с постоянной скоростью Ω, где λ — долгота, отсчитываемая к востоку от некоторого меридиана ($0 \le \lambda < 2\pi$), $\theta = \pi/2 - \varphi$ — дополнение до широты φ ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$), r — радиальная координата. Сила притяжения $\mathbf{g}$ считается направленной к центру Земли. Толщина слоя воды считается малой по сравнению с радиусом R, поэтому $g = |\mathbf{g}|$ и плотность воды ρ берутся постоянными, $\rho \equiv 1$. Введем обозначения: $J = -r^2 \sin\theta$ — якобиан преобразования от декартовых координат к сферическим, v^α ($\alpha = 1,2,3$) — контравариантные компоненты скорости ($v^1 = \dot{\lambda}$, $v^2 = \dot{\theta}$, $v^3 = \dot{r}$); v_γ ($\gamma = 1,2,3$) — ковариантные компоненты скорости, связанные с v^α формулами [1, 3]

$$v_1 = \Omega r^2 \sin^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, v^1, \qquad v_2 = r^2 v^2, \qquad v_3 = v^3 = w\,. \tag{1}$$

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости будем рассматривать в виде [1]

$$(Jv^1)_\lambda + (Jv^2)_\theta + (Jw)_r = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\,\mathbf{v}_r + \nabla p = \mathbf{r}, \tag{3}$$

$$w_t + \mathbf{u}\cdot\nabla w + w w_r + p_r = -g + r_3, \tag{4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00721-а), а также в рамках программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ–6293.2012.9).

где через w обозначена радиальная, или «вертикальная», составляющая скорости v^3, $\mathbf{u} = (v^1, v^2)^{\text{т}}$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\text{т}}$ — векторы, составленные соответственно из контравариантных и ковариантных компонент «горизонтальной» составляющей вектора скорости; p — давление, $\nabla = (\partial/\partial\lambda,\ \partial/\partial\theta)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^{\text{т}}$,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = (\Omega + v^1)^2\, r^2 \sin\theta\cos\theta, \quad r_3 = (\Omega + v^1)^2\, r \sin^2\theta + (v^2)^2\, r\ . \tag{5}$$

Для формулировки задачи о поверхностных волнах считаем, что слой жидкости ограничен снизу непроницаемым подвижным дном $r = R - h(\lambda, \theta, t)$, а сверху — свободной поверхностью $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$. Условия на этих границах имеют вид [3]

$$(\eta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\eta - w)\Big|_{r=R+\eta} = 0, \quad p\Big|_{r=R+\eta} = 0, \quad (h_t + \mathbf{u}\cdot\nabla h + w)\Big|_{r=R-h} = 0. \tag{6}$$

Для вывода уравнений мелкой воды на сфере введем характерные масштабы. Пусть L и h_0 — масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно, a_0 — характерная амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$ — параметр нелинейности. С величиной L свяжем горизонтальный масштаб λ_0, измеренный в радианах: $\lambda_0 = L/R = \varepsilon/\mu$, где $\varepsilon = h_0/R \ll 1$ — относительная толщина слоя воды, $\mu = h_0/L$ — параметр частотной дисперсии. Масштаб времени t_0 определим как $t_0 = L/\sqrt{gh_0}$. Тогда масштаб угловой скорости распространения волны определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{\lambda_0}{t_0} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{\sqrt{gh_0}}{L} = \frac{\sqrt{gh_0}}{R}.$$

За масштаб «горизонтальной» угловой скорости частиц жидкости в волне также принимается величина ω_0. Через $s = r - R$ обозначим новую переменную. В соответствии с введенными масштабами определим безразмерные переменные:

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \overline{\theta} = \frac{\theta}{\lambda_0}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \overline{s} = \frac{s}{h_0}, \quad \overline{H} = \frac{H}{h_0}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \overline{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \tag{7}$$

$$\overline{v}^\beta = \frac{v^\beta}{\omega_0}, \quad \overline{v}_\beta = \frac{v_\beta}{R\sqrt{gh_0}}\ (\beta = 1, 2), \quad \overline{w} = \frac{w}{\mu\sqrt{gh_0}}, \quad \overline{p} = \frac{p}{gh_0}. \tag{8}$$

Формулы (8) для обезразмеривания компонент скорости непосредственно вытекают из соотношений (7) и отличаются от рассмотренных в [1].

Далее черту над безразмерными переменными будем опускать для упрощения обозначений.

2. Уравнения Эйлера в приближении “тонкого слоя”.

В работе [1] приведены уравнения Эйлера для случая, когда отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$ в связи с предположением о малости толщины океанического слоя. Если использовать для обезразмеривания формулы (7), (8), то эти модифицированные уравнения запишутся в следующем виде:

$$(J_0 v^1)_\lambda + (J_0 v^2)_\theta + (J_0 w)_s = 0\ ; \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\mathbf{v}_s + \nabla p = \mathbf{r}\ , \tag{10}$$

$$\mu^2\Big(w_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)w + ww_s\Big) + p_s = -1\ , \tag{11}$$

при этом $J_0 = -\sin\theta$, $\mathbf{u} = (v^1, v^2)^{\text{т}}$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\text{т}}$, $\nabla = (\partial/\partial\lambda,\ \partial/\partial\theta)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^{\text{т}}$,

$$v_1 = \big(\Omega + v^1\big)\sin^2\theta; \qquad v_2 = v^2\,, \tag{12}$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = (\varepsilon/\mu)\,(\Omega + v^1)^2\ \sin\theta\cos\theta\,. \tag{13}$$

Граничные условия (6) для системы уравнений (9)—(11) принимают следующий вид:

$$(\alpha\eta_t + \alpha\mathbf{u}\cdot\nabla\eta - w)\,\big|_{s=\alpha\eta} = 0, \tag{14}$$

$$p\big|_{s=\alpha\eta} = 0, \tag{15}$$

$$(h_t + \mathbf{u}\cdot\nabla h + w)\,\big|_{s=-h} = 0. \tag{16}$$

Отталкиваясь от обезразмеренных модифицированных 3D-уравнений (9) —(16), приступим к выводу приближенных моделей.

3. Вывод НЛД-уравнений на сфере.

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина жидкости H и вектор скорости $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\lambda, \theta, t)$. Возьмем за $\mathbf{c}$ среднюю по глубине скорость $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{c} = (c^1, c^2)^{\text{т}} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{u}\,ds. \tag{17}$$

Выражение (17) записано в безразмерном виде, $H = \alpha\eta + h$. Тогда уравнение неразрывности для НЛД-модели примет следующий вид:

$$H_t + \nabla\cdot(H\mathbf{c}) = 0\,, \tag{18}$$

где оператор дивергенции вычисляется по формуле

$$\nabla\cdot\mathbf{c} = \frac{(J_0c^1)_\lambda + (J_0c^2)_\theta}{J_0}\,. \tag{19}$$

Уравнение (18) вытекает (см. [1]) из уравнения несжимаемости (9), проинтегрированного по толщине слоя жидкости с учетом граничных условий (14), (16).

3.1. Основное предположение вывода. Вспомогательные формулы.

Для вывода приближенной модели будем использовать разложение компонент вектора скорости в ряды по степеням параметра μ^2:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mu^2\mathbf{u}^1 + O(\mu^4), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mu^2\mathbf{v}_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4). \tag{20}$$

Определив для удобства величины

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} \Omega\ \sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из соотношений (12) получаем представление

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_0 + M\mathbf{u}\,. \tag{21}$$

Так как в длинноволновом приближении изменение величин по оси Os незначительно по сравнению с изменением в “горизонтальной плоскости”, будем считать, что

$$\left(\mathbf{u}^0\right)_s = 0\ . \tag{22}$$

Ниже с использованием разложений (20) выразим функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, w через скорость $\mathbf{c}$ приближенной модели. Сначала найдем связь между w_0 и $\mathbf{u}^0$. Подстановка функций $\mathbf{u}$ и w (20) в уравнение (9) позволяет получить соотношение $\nabla\cdot\mathbf{u}^0 + (w_0)_s = 0$, интегрируя которое по радиальной координате в пределах от $-h$ до s и учитывая, что функция $\mathbf{u}^0$ не зависит от s, имеем

$$(s+h)\nabla\cdot\mathbf{u}^0 + w_0(s) - w_0\big|_{s=-h} = 0. \tag{23}$$

Далее используем условие (16), из которого при использовании разложений (20) вытекает

$$w_0\big|_{s=-h} = -D_0 h, \quad D_0 = \partial/\partial t + \mathbf{u}^0\cdot\nabla\ .$$

С учетом этого выражения из (23) получаем линейное распределение w_0 по глубине:

$$w_0(s) = -D_0 h - (s+h)\nabla\cdot\mathbf{u}^0\ . \tag{24}$$

Следующий шаг — установление связи между скоростями $\mathbf{u}$ и $\mathbf{c}$. Подставляя первое из разложений (20) в формулу (17), имеем

$$\mathbf{c} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left(\mathbf{u}^0 + \mu^2\mathbf{u}^1 + O(\mu^4)\right)ds = \mathbf{u}^0 + \mu^2\,\frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{u}^1 ds + O(\mu^4)\ . \tag{25}$$

Отсюда следует, что первую из формул (20) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mu^2\mathbf{V} + O(\mu^4), \quad \mathbf{V} = \mathbf{u}^1 - \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{u}^1 ds\ , \tag{26}$$

причем имеет место равенство

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{V}ds = 0\ . \tag{27}$$

С учетом формулы (21) получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_0 + M\mathbf{c} + \mu^2 M\mathbf{V} + O(\mu^4). \tag{28}$$

Наконец, из (20) с учетом (24) и вытекающей из (25) формулы $\mathbf{u}^0 = \mathbf{c} + O(\mu^2)$ имеем требуемое для компоненты w представление с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$:

$$w = -Dh - (s+h)\nabla\cdot\mathbf{c} + O(\mu^2)\,, \tag{29}$$

где D — оператор полной производной:

$$D = \partial/\partial t + \mathbf{c}\cdot\nabla. \tag{30}$$

Формулы (26), (28), (29) используются ниже при выводе уравнений НЛД-модели.

3.2. Формула для давления в НЛД–модели на сфере.

Чтобы выразить давление через переменные НЛД–модели, интегрируем уравнение (11) по "вертикальной" координате в пределах от s $(-h < s < \alpha\eta)$ до $\alpha\eta$ и с учетом условия (15) и равенства $\mathbf{u} = \mathbf{c} + O(\mu^2)$, вытекающего из (26), получаем

$$\mu^2 \int\limits_s^{\alpha\eta} \Big(Dw + ww_\zeta + O(\mu^2)\Big) d\zeta - p(s) = s - \alpha\eta\,. \tag{31}$$

Подынтегральное выражение вычисляем с использованием формулы (29) для w:

$$Dw + ww_s = -D^2h - (s+h)D\,(\nabla\cdot\mathbf{c}) + (s+h)\,(\nabla\cdot\mathbf{c})^2 + O(\mu^2) = -R_2 - (s+h)R_1 + O(\mu^2),$$

где

$$R_1 = D\,(\nabla\cdot\mathbf{c}) - (\nabla\cdot\mathbf{c})^2\,, \quad R_2 = D^2h. \tag{32}$$

Из (31) с учетом полученных выражений вытекает формула распределения давления по координате s, $-h \le s \le \alpha\eta$:

$$p(s) = H - (s+h) - \mu^2\left[\Big(H - (s+h)\Big)R_2 + \left(\frac{H^2}{2} - \frac{(s+h)^2}{2}\right)R_1\right] + O(\mu^4) = \widetilde{p}\,(s) + O(\mu^4). \tag{33}$$

3.3. Уравнения движения НЛД–модели на сфере.

Используя выражения (26), (28), (29) и формулу для давления (33), выведем уравнения движения НЛД-модели, исходя из векторного уравнения (10). Согласно формуле (26) преобразуем r_2:

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\left[\Omega + (c^1 + O(\mu^2))\right]^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{\varepsilon}{\mu}\left(\Omega + c^1\right)^2 \sin\theta\cos\theta + O(\varepsilon\mu)\,.$$

В силу предположения о малости ε будем считать, что

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\left(\Omega + c^1\right)^2 \sin\theta\cos\theta\,, \tag{34}$$

сохранив за правой частью уравнения (10) обозначение $\mathbf{r}$.

Интегрируя уравнение (10) по полной глубине и учитывая условие (15), приходим к соотношению

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{v}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\mathbf{v}_s)\,ds + \nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{r}\,ds. \tag{35}$$

Так как вектор $\mathbf{r}$, ввиду (34), не зависит от s, то правая часть (35) равна $\mathbf{r}H$. Преобразуем соотношение (35), используя представление w и p через переменные $\mathbf{c}$, H. Для вычисления членов с давлением из левой части (35) используем формулу (33):

$$\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h = \alpha H\nabla\eta - \mu^2\left[\nabla\Big(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\Big) - H\nabla h\Big(\frac{H}{2}R_1 + R_2\Big)\right] + O(\mu^4). \tag{36}$$

Для вычисления слагаемого с “вертикальной” компонентой скорости применим формулы (28) и (29), что позволяет после выкладок с учетом (27) получить выражение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\mathbf{v}_s ds = \mu^2 M \int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\mathbf{V}_s ds = \mu^2 M\Big[Dh\mathbf{V}\big|_{s=-h} - \big(Dh + H(\nabla\cdot\mathbf{c})\big)\mathbf{V}\big|_{s=\alpha\eta}\Big] + O(\mu^4)\,. \quad (37)$$

Группа членов уравнения (35), содержащая “горизонтальные” компоненты скорости, преобразуется с помощью аналогичных приемов, включающих подстановку выражений (26), (28), вынос операции дифференцирования из-под знака интеграла и применение формулы (27), что позволяет получить соотношение, объединяя которое с (37), будем иметь

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \left(\mathbf{v}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\mathbf{v}_s\right) ds = HM\mathbf{c}_t + H\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\left(\mathbf{K}_0 + M\mathbf{c}\right) + O(\mu^4)\,.$$

Вывод этой формулы полностью аналогичен тому, что приведен в работе [1]. Сравнивая полученное равенство с интегралом (35) и учитывая (36), приходим к уравнению движения НЛД–модели

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \alpha\nabla\eta = \mu^2\left[\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right)\right] + \mathbf{r} + O(\mu^4). \quad (38)$$

Здесь для упрощения записи введен новый вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\text{т}}$, который в отличие от вектора из (21) не зависит от s и определяется через скорость $\mathbf{c}$: $\mathbf{v} = \mathbf{K}_0 + M\mathbf{c}$. Таким образом, выведена система НЛД-уравнений (18), (38) без предположения о потенциальности исходного 3D-течения, совпадающая с той, что получена в [1].

Что же дает условие потенциальности? Сравнение выводов НЛД-моделей показывает, что использование этого условия в [1] позволяет в явном виде выписать второй член $\mathbf{u}^1$ разложения скорости $\mathbf{u}$ по формуле (20), и тем самым явно вычислить $\mathbf{V}$ из формулы (26). Как следует из настоящей работы, для вывода уравнения движения эта явная формула не нужна, достаточно соотношения (27).

4. Уравнение баланса импульса.

Перейдем к размерным переменным и перепишем систему уравнений (18), (38), отбрасывая $O(\mu^4)$:

$$H_t + \nabla\cdot(H\mathbf{c}) = 0, \quad H = \eta + h\,; \quad (39)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right) + \mathbf{r}\,, \quad (40)$$

$$v_1 = \left(\Omega + c^1\right)R^2\sin^2\theta, \quad v_2 = R^2c^2; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \left(\Omega + c^1\right)^2 R^2\sin\theta\cos\theta\,.$$

Приведем другие формы записи полученной НЛД-модели. Из формулы (33) вытекает, что в качестве функции давления в НЛД-модели можно рассматривать $\widetilde{p}(s)$. Если через P обозначить среднее по толщине слоя жидкости давление

$$P = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta}\widetilde{p}ds = \frac{gH}{2} - \frac{H^2}{3}R_1 - \frac{H}{2}R_2, \quad (41)$$

то уравнение движения (40) запишется следующим образом:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla(PH)}{H} = \mathbf{r} + q\nabla h\,, \tag{42}$$

при этом

$$q = \frac{1}{H}\widetilde{p}\Big|_{s=-h} = g - \frac{H}{2}R_1 - R_2\,. \tag{43}$$

Умножая уравнение (39) на $\mathbf{v}$, а (40) на H и складывая результаты, приходим к записи НЛД-уравнения движения с дивергентной левой частью:

$$(H\mathbf{v})_t + \nabla\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{v}) + \nabla(HP) = qH\nabla h + H\mathbf{r}\,, \tag{44}$$

где $\mathbf{c}\otimes\mathbf{v}$ — тензорное произведение векторов.

5. Уравнение баланса энергии.

Для получения уравнения баланса энергии выполним ряд преобразований над уравнением движения (42), умножив каждое из скалярных уравнений на отвечающую ему компоненту вектора скорости и сложив полученные уравнения. Тогда группа членов, содержащих скорость, запишется в виде

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_t + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{r} = D\,(\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}{2} - U)\,, \tag{45}$$

где

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (c^1\,R\sin\theta)^2 + (c^2\,R)^2,\ \ U = (\Omega^2 R^2\sin^2\theta)/2\,,$$

D — оператор полной производной (30). Далее преобразуем оставшуюся группу членов уравнения (42), умноженного на $\mathbf{c}$:

$$\frac{1}{H}\mathbf{c}\cdot\nabla(PH) - q\mathbf{c}\cdot\nabla h = \frac{\nabla\cdot(\mathbf{c}PH)}{H} - P\nabla\cdot\mathbf{c} - qDh + qh_t\,.$$

По аналогии с [2] можно показать, что справедливо равенство

$$P\nabla\cdot\mathbf{c} + qDh = -D\left(\mathcal{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}{2} + U\right)\,,$$

где через $\mathcal{E}$ обозначена полная энергия НЛД-модели:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}{2} + \frac{H^2}{6}(\nabla\cdot\mathbf{c})^2 + \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{c})Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2} - U\,. \tag{46}$$

Это выражение для энергии нетрудно получить, проинтегрировав по толщине слоя жидкости выражение для полной энергии 3D-модели гидродинамики, учтя при этом соотношения (17), (20), (29), отбросив члены порядка $O(\mu^4)$ и поделив результат на H (см. для аналогии в плоском случае работу [2]). Объединяя все члены уравнения движения (42), умноженного на $\mathbf{c}$, имеем

$$\mathcal{E}_t + \mathbf{c}\cdot\nabla\mathcal{E} + \frac{1}{H}\nabla\cdot(\mathbf{c}HP) + qh_t = 0\,. \tag{47}$$

Умножим полученное уравнение на H и сложим с уравнением неразрывности (39), умноженным на $\mathcal{E}$. Получаем

$$(H\mathcal{E})_t + \nabla\cdot(\mathbf{c}H(\mathcal{E}+P)) + Hqh_t = 0\,, \tag{48}$$

которое может быть записано в форме, аналогичной для плоского случая:

$$\frac{\partial J_0 H\mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J_0 c^1 H(\mathcal{E}+P)}{\partial\lambda} + \frac{\partial J_0 c^2 H(\mathcal{E}+P)}{\partial\theta} = -J_0 Hqh_t\,,\quad J_0 = -R^2\sin\theta\,. \tag{49}$$

Это уравнение имеет консервативный вид в случае стационарного дна.

6. Модель типа Буссинеска

При выводе НЛД-уравнений (18), (38) предположение о малости амплитуды волн не использовалось. Допуская связь между параметрами α и μ^2, приходим к уравнениям типа Буссинеска, отличающимся от полностью нелинейной НЛД-модели тем, что группа дисперсионных членов принимает слабо-нелинейный вид. Далее будем считать, что $\alpha = O(\mu^2)$.

Выразим из уравнения неразрывности дивергенцию $\nabla\cdot\mathbf{c} = -DH/H$ и перепишем выражение для R_1 следующим образом:

$$R_1 = \frac{D(H\nabla\cdot\mathbf{c})}{H}\,.$$

Тогда для P и q, определенных формулами (41), (43) и переписанных в безразмерном виде, получим выражения

$$P = \frac{H}{2} - \mu^2\left(\frac{H}{3}D\left(H\nabla\cdot\mathbf{c}\right) + \frac{H}{2}D^2h\right), \quad q = 1 - \mu^2\left(\frac{1}{2}D\left(H\nabla\cdot\mathbf{c}\right) + D^2h\right). \tag{50}$$

Учитывая, что $H = h + \alpha\eta$, и пренебрегая в выражениях (50) членами порядка $O(\alpha\mu^2)$, $O(\alpha^2\mu^2)$, приходим к модифицированным выражениям P_B и q_B, которые после возвращения к размерным переменным примут вид:

$$P_B = \frac{gH}{2} - \frac{h}{3}D\left(h\nabla\cdot\mathbf{c}\right) - \frac{h}{2}D^2h, \quad q_B = g - \frac{1}{2}D\left(h\nabla\cdot\mathbf{c}\right) - D^2h\,. \tag{51}$$

Таким образом, приходим к НЛД-модели типа Буссинеска со следующим уравнением движения:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla(P_BH)}{H} = \mathbf{r} + q_B\nabla h\,. \tag{52}$$

Уравнение баланса полной энергии, которая теперь принимает вид

$$\mathcal{E}_B = \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})}{2} + \frac{h^2}{6}(\nabla\cdot\mathbf{c})^2 + \frac{h}{2}(\nabla\cdot\mathbf{c})Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2} - U\,, \tag{53}$$

получается тем же способом, что и в предыдущем параграфе, и имеет форму, аналогичную уравнению (48):

$$(H\mathcal{E}_B)_t + \nabla\cdot\left(\mathbf{c}H(\mathcal{E}_B + P_B)\right) + Hq_Bh_t = 0\,. \tag{54}$$

Это уравнение записывается также в виде (49) при замене величин $\mathcal{E}$, P, q на $\mathcal{E}_B$, P_B, q_B. Таким образом, получена модель типа Буссинеска на вращающейся сфере, у которой в случае стационарного дна имеется закон сохранения полной энергии.

Список литературы

[1] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 22–35.

[2] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94 –108.

[3] Хакимзянов Г.С. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.